

Calculs numériques et algébriques

Somme de termes et produit de facteurs

Développer et factoriser

Calculer avec des fractions

Calculer avec des puissances

Calculer avec des racines carrées

Equivalence

Résoudre une équation du premier degré

Résoudre une inéquation

Valeur absolue

Résoudre un système d'équations

Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{R}$

Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Calculer avec des exponentielles et des logarithmes

I. Somme de termes et produit de facteurs :

1. Exemples :

Sommes (ou différences de termes)

$$x - 6$$

$$(2x + 5) + 3x$$

$$(5 - x) - (1 + 9x)$$

$$3 + (2 + 3x)(x - 1)$$

Produits de facteurs

$$(5x + 1)(x - 3)$$

$$3(1 + 5x)$$

$$(9 - x)(4 + x)$$

$$(5 + 8x)(x - 8)^2$$

2. Remarques :

$\frac{4}{2-x}$ est appelé un quotient c'est le produit de 4 et de l'inverse de $2 - x$.

3. Valeurs interdites :

Pour certaines expressions dépendantes de x , il existe des valeurs de x pour lesquelles on ne peut pas calculer l'expression, car elle n'est pas définie.

Exemples : Soit $A(x) = \frac{x+5}{4+x}$
 $B(x) = \frac{x-3}{(x+1)(x-3)}$

Concernant $A(x)$, pour $x = -4$, on a $4 + x = 0$ donc il n'est pas possible de calculer $A(-4)$

Concernant $B(x)$, pour $x = -1$ ou $x = 3$, on a $(x + 1)(x - 3) = 0$, donc il n'est pas possible de calculer $B(-1)$ et $B(3)$.

(Le dénominateur ne peut pas être nul)

II. Développer et factoriser

1. La distributivité :

Définitions :

Développer c'est exprimer un produit en une somme ou une différence de termes.

Factoriser c'est transformer une somme ou une différence en produit de facteurs.

Réduire c'est simplifier au maximum en regroupant tous les termes de même nature.

RAPPEL de la distributivité simple :

Propriété : pour tous nombres k, a et b on a : $k(a \pm b) = ka \pm kb$

Exemple :

DEVELOPPER
→
 $x(4 + y) = 4x + xy$
←
FACTORISER

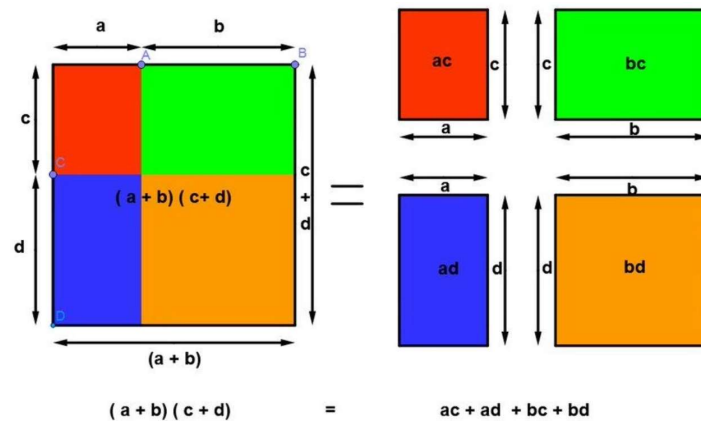
On dit que la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition ou à la soustraction.

Dans l'exemple on a **distribué** la multiplication par x sur les termes 4 et y .

2. La double distributivité :

Propriété : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Illustration avec les aires :



Exemples :

$$(x + 3)(y - 4) = xy - 4x + 3y - 12$$

$$2x(1 - x) - (x - 3)(3x + 2) = -5x^2 + 9x + 6$$

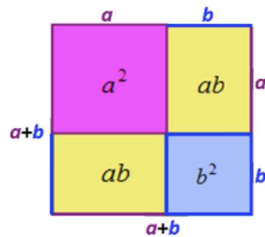
3. Identités remarquables :

Propriété : Pour tous nombres a et b , on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Remarques :

Illustration géométrique de la
1^{ère} identité remarquable :
En considérant les aires dans le carré,
on a : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



On utilise les identités remarquables pour développer ou factoriser une expression.

Exemples :

$$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

$$(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 - 1$$

$$25x^2 + 20x + 4 = (5x + 2)^2$$

Méthode pour développer une expression :

Développer l'expression suivante : $A = (x + 2)(4x - 3) - x(7 - x)$

On développe le membre de gauche en appliquant la **double distributivité** et le membre de droite en appliquant la **simple distributivité**.

$$A = (x + 2)(4x - 3) - x(7 - x)$$

$$A = 4x^2 - 3x + 8x - 6 - 7x + x^2$$

$$A = 5x^2 - 2x - 6$$

Autres formules utiles :

Formule du binôme : (démonstration par récurrence)

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Formule de Bernoulli : (démonstration par récurrence)

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

En remplaçant b par $-b$ on obtient :

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a + b) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k.$$

4. Factoriser :

Méthode pour factoriser une expression

Pour factoriser, il faut trouver dans chacun des termes de l'expression un facteur commun.

Exemples :

$A = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$ on voit que $(2 + 3x)$ est le facteur commun.

$$A = (2 + 3x)[3 - (5 + 2x)]$$

$$A = (2 + 3x)(-2 - 2x)$$

$B = (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(x + 1)$ on voit que $(2 - 5x)$ est le facteur commun.

$$B = (2 - 5x)[(2 - 5x) - (x + 1)]$$

$$B = (2 - 5x)(2 - 5x - x - 1)$$

$$B = (2 - 5x)(-6x + 1)$$

III. Calculer avec des fractions :

1. Définition :

Réduire au même dénominateur c'est transformer une addition ou une soustraction de deux fractions en une seule fraction.

2. Propriété :

Pour tous nombres a, b, c et d avec b et d non nuls, on a :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + cb}{bd}$$

Exemples : Réduire les expressions suivantes au même dénominateur.

$$A = \frac{5x}{x-2} - \frac{5}{3-x}$$

$$A = \frac{5x(3-x)}{(x-2)(3-x)} - \frac{5(x-2)}{(3-x)(x-2)}$$

$$A = \frac{15x - 5x^2 - (5x - 10)}{(x-2)(x-3)}$$

$$A = \frac{-5x^2 + 10x + 10}{(x-2)(x-3)}$$

$$B = 4 + \frac{5x}{2x+1}$$

$$B = \frac{4(2x+1)}{(2x+1)} + \frac{5x}{(2x+1)}$$

$$B = \frac{8x+4+5x}{(2x+1)}$$

$$B = \frac{13x+4}{2x+1}$$

3. Simplifier :

Définition : Une fraction est dite irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de facteurs communs (autre que 1 et -1), on cherche toujours à écrire les fractions sous forme irréductible en utilisant :

Propriétés :

- $\frac{a}{1} = a$, une fraction dont le dénominateur vaut 1 est égale à son numérateur.
 $\frac{1}{1} = 1 ; \frac{2}{1} = 2 ; \frac{3}{1} = 3 \dots$
- On ne modifie pas une fraction quand on multiplie ou qu'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.
 On considère a, b et k trois nombres avec b et k non nuls.
 On a : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div k}{b \div k}$
- $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ un signe moins en facteur de la fraction peut passer en facteur du numérateur ou du dénominateur.

Simplifications utiles à connaître :

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} \dots = 1$$

Exemples : Simplifier

$$A = \frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)^2(x+5)}$$

$$A = \frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)(x-1)(x+5)}$$

$$A = \frac{1}{x-1}$$

$$B = \frac{2x+2}{2x}$$

$$B = \frac{2(x+1)}{2x}$$

$$B = \frac{x+1}{x}$$

$$C = \frac{2x(x+1)}{2x}$$

$$C = x+1$$

4. Opérations sur les fractions

Produit : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ (avec b et d non nuls)

Inverse : $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$ (avec a et b non nuls)

Division : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$ (avec b, c et d non nuls)

Addition : $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ (avec c non nul)

Pour additionner ou soustraire des fractions on les met au même dénominateur.

Soustraction : $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Comparaison : si $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$ alors cela implique $a < b$. (avec d non nul)

Exemples :

Calculer : $\frac{2}{3} + \frac{5}{12} - 2 = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{5}{12} - \frac{2 \times 12}{12} = \frac{8+5-24}{12} = -\frac{11}{12}$

Résoudre : $\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$$\frac{3}{2}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{1 \times 3 - 1 \times 2}{2 \times 3}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{3-2}{6}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{1}{9} \times \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{27}$$

$$x = \frac{2}{18} \text{ on simplifie par 2}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

IV. Calculer avec des puissances

1. Puissances :

Définition : Soit a un nombre réel non nul et n un entier supérieur ou égal à 2.

On pose : $a^0 = 1$; $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$

On pose également : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ fois}}$

et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Dans l'écriture a^n , n est appelé l'**exposant**.

En conséquence de cette définition, on a les **propriétés** suivantes :

$$a^n a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

Opérateurs avec des nombres différents élevés à la même puissance :

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Exemples :

$$\text{Calculer } A = \frac{3^{10} \times 2^{10}}{6^{10} \times 6^{-1}} = \frac{6^{10}}{6^9} = 6$$

$$\text{Soit } D = \frac{(a^5 b^{-4})^{-2} \times c^{15} \times b^2}{a^{-8} \times b^5 \times (b^{-3} \times c^{12})^{-1}}$$

1) Simplifier D

2) Calculer D pour $a = 2$; $b = 100$ et $c = -1$

$$D = \frac{a^{-10} b^8 c^{15} b^2}{a^{-8} b^5 b^3 c^{-12}}$$

$$D = a^{-2} b^2 c^{27}$$

$$\text{Pour } a = 2 ; b = 100 \text{ et } c = -1, \text{ on a } D = 2^{-2} \times 100^2 \times (-1)^{27} = -\frac{10000}{4}$$

$$D = -2500$$

Avec des puissances de 10 :

$$10^n 10^m = 10^{n+m}$$

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^{n-m}$$

$$(10^n)^m = 10^{n \times m}$$

V. Calculer avec des racines carrées :

Propriété : Pour tout réel x il existe un unique réel strictement positif dont le carré vaut x .

Définition : La racine carrée d'un nombre réel positif x est l'unique réel positif, noté $\sqrt{x}$, dont le carré vaut x . On a : $(\sqrt{x})^2 = x$ avec $\sqrt{x} \geq 0$.

Exemples : (Racines carrées usuelles) On a :

$$\sqrt{0} = 0; \sqrt{1} = 1; \sqrt{4} = 2; \sqrt{9} = 3; \sqrt{16} = 4; \sqrt{25} = 5; \sqrt{36} = 6; \sqrt{49} = 7;$$

$$\sqrt{64} = 8; \sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{100} = 10; \sqrt{121} = 11; \sqrt{144} = 12; \sqrt{169} = 13.$$

Propriétés : Soient a et b deux réels positifs. On a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ où } b \neq 0$$

$$\text{Pour tout nombre réel } a : \sqrt{a^2} = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases}$$

Exemples : $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{4x} = \sqrt{2^2 x} = 2\sqrt{x} \text{ pour } x \geq 0.$$

Remarque. Pour tous réels a et b strictement positifs, on a : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.



Exemple. $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$.

Remarque. Pour tous réels a et b positifs, on a : $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Démonstration : $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b, \text{ d'une part et}$$

$$(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b \quad \text{car } a \text{ et } b \text{ sont positifs d'autre part}$$

$$\text{Donc } (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a \times b})^2 \text{ et donc } \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

Propriété : Soient a et b deux réels positifs. On a : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

Démonstration : $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$ d'une part et,

$(\sqrt{a+b})^2 = a + b$ d'autre part

Donc $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$ car $2\sqrt{ab} > 0$

D'où $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

VI. Equivalence

Définition : Le symbole $\Leftrightarrow$ se traduit par si et seulement si et lie deux propositions P et Q .

Si l'on a $P \Leftrightarrow Q$, alors on a à la fois $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftarrow Q$, qui signifie P implique Q et Q implique P .

Finalement, si P est vraie alors Q aussi et si Q est vraie alors P aussi.

Exemple : On a : $x = 3 \Leftrightarrow x - 3 = 0$.

En effet, si $x = 3$, alors $x - 3 = 0$ et si $x - 3 = 0$, alors $x = 3$.

Exemple : On n'a pas : $x > 1 \Leftrightarrow x^2 > 1$.

En effet on a : $x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$ car si $x > 1$ alors $x^2 > 1^2$ donc $x^2 > 1$.

Cependant on n'a pas : $x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$ car si $x^2 > 1$, alors $x \in]-\infty; -1[$ ou $x \in]1; +\infty[$, donc on n'a pas : $x > 1$.

VII. Résoudre une équation du premier degré :

Une équation du premier degré est une équation de la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ où x est l'inconnue.

Résoudre une telle équation consiste à « trouver le nombre x » pour lequel $ax + b = 0$

La théorie :

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a} \quad \text{donc} \quad S = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

La pratique :

$$-2x + 4 = 0$$

On ajoute -4 des deux côtés de l'égalité

$$-2x = -4$$

On divise par -2 qui est non nul des deux côtés de l'égalité

$$x = \frac{-4}{-2}$$

On simplifie

$$x = 2$$

On peut vérifier que lorsque l'on remplace x par 2 dans $-2x + 4$ on obtient $-2 \times 2 + 4 = 0$

Lorsque l'inconnue se situe des deux côtés de l'équation, le principe consiste à les regrouper dans le même membre pour se ramener à une équation de la forme $ax + b = 0$

Pour résoudre des équations de la forme $\frac{x+a}{b} = c$, il faut se ramener à une équation vue précédemment en multipliant chaque membre de l'égalité par b .

La théorie :

$$\frac{x+a}{b} = c \Leftrightarrow x+a = bc \Leftrightarrow x = bc - a \quad \text{donc} \quad S = \{bc - a\}$$

La pratique :

$$\frac{x+3}{5} = 2$$

On multiplie par 5 de chaque côté de l'égalité

$$x+3 = 10$$

On soustrait 3 à chaque membre de l'égalité.

$$x = 7$$

Quizz niveau 1 :



En hydrodynamique, pour un fluide peu visqueux et pour des vitesses peu élevées, les forces de frottements fluides se résument à l'expression mathématique suivante :

$F_x = \frac{1}{2} \times C_x \times \rho \times S \times v^2$ avec S la surface « frontale » qui entre en contact avec le fluide au cours du déplacement, ρ la masse volumique du fluide, C_x le coefficient de pénétration et v la vitesse de déplacement.

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont bonnes ?



$$C_x = \frac{2F_x}{\rho \times S \times v^2}$$



$$C_x = \frac{F_x}{2\rho \times S \times v^2}$$



$$C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho \times S \times v^2}$$



$$C_x = \frac{\frac{1}{2}\rho \times S \times v^2}{F_x}$$

Solution :

☒ $C_x = \frac{2F_x}{\rho \times S \times v^2}$

☐ $C_x = \frac{F_x}{2\rho \times S \times v^2}$

☒ $C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho \times S \times v^2}$

☐ $C_x = \frac{\frac{1}{2}\rho \times S \times v^2}{F_x}$

 Explication Générale

$$\frac{1}{2} \times C_x \times \rho \times S \times v^2 = F_x \text{ donc } C_x = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho \times S \times v^2} = \frac{2F_x}{\rho \times S \times v^2}$$

 La distance parcourue peut se calculer à partir de la vitesse V et de la durée Δt $d = V \times \Delta t$.

Quelles sont les relations correctes ?

☐ $\Delta t = \frac{d}{V}$

☐ $\Delta t = d \cdot V$

☐ $\Delta t = \frac{V}{d}$

Solution :

☒ $\Delta t = \frac{d}{V}$

☐ $\Delta t = d \cdot V$

Pour isoler Δt il faut diviser par V de chaque côté de l'équation.

☐ $\Delta t = \frac{V}{d}$

Pour isoler Δt il faut diviser par V de chaque côté de l'équation.

 Explication Générale

D'après l'énoncé on sait que $d = V \times \Delta t$.

Pour isoler Δt il faut diviser par V de chaque côté de l'équation : $\frac{d}{V} = \frac{V \times \Delta t}{V} \iff \Delta t = \frac{d}{V}$.

 La masse peut se calculer à partir de la masse volumique et du volume occupé : $m = \rho \times V$.

Quelles sont les relations compatibles avec $m = \rho \times V$?

☐ $\rho = \frac{m}{V}$

☐ $\rho = m \cdot V$

☐ $\rho = \frac{V}{m}$

Solution :

 La m

Quel

☐ t

☐ t

☐ t

☒ $\rho = \frac{m}{V}$

☐ $\rho = m \cdot V$

Pour isoler ρ il faut diviser par V de chaque côté de l'équation.

☐ $\rho = \frac{V}{m}$

Pour isoler ρ il faut diviser par V de chaque côté de l'équation.



Explication Générale

D'après l'énoncé on sait que $m = \rho \times V$.

Pour isoler ρ il faut diviser par V de chaque côté de l'équation : $\frac{m}{V} = \frac{\rho \times V}{V} \iff \rho = \frac{m}{V}$.



Lorsqu'un conducteur vérifie la loi d'Ohm, alors la tension à ses bornes est proportionnelle à l'intensité du courant qui le traverse. Cela s'écrit : $U = R \times I$; R est alors la résistance électrique du conducteur.

Quelle(s) est(sont) la(les) relation(s) correcte(s) ?

☐ $I = \frac{U}{R}$

☐ $I = R \cdot U$

☐ $I = \frac{R}{U}$

Solution :

☒ $I = \frac{U}{R}$

☐ $I = R \cdot U$

Pour isoler I il faut diviser les membres de chaque côté de l'équation par R .

☐ $I = \frac{R}{U}$

Pour isoler I il faut diviser les membres de chaque côté de l'équation par R .



Explication Générale

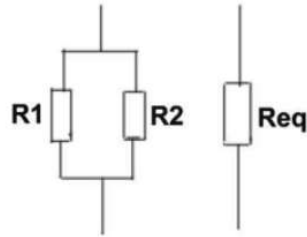
On sait que $U = R \cdot I$. Pour isoler I il faut diviser par R de chaque côté de l'équation : $\frac{U}{R} = \frac{R \times I}{R} \iff I = \frac{U}{R}$.

Quizz niveau 2 :



Deux résistances R_1 et R_2 sont branchées en dérivation entre deux bornes. La résistance équivalente R_e s'exprime en fonction de R_1 et R_2 par la relation :

$$\frac{1}{R_e} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}.$$



Quelle est l'expression correcte de R_1 en fonction de R_2 et R_e ?

☐ $R_1 = R_e - R_2$

☐ $R_1 = R_e + R_2$

☐ $R_1 = \frac{R_2 R_e}{R_2 - R_e}$

☐ $R_1 = \frac{R_2 R_e}{R_2 + R_e}$

☐ $R_1 = \frac{R_2 - R_e}{R_2 R_e}$

☐ $R_1 = \frac{R_2 + R_e}{R_2 R_e}$

☒ $R_1 = R_e - R_2$

Il ne faut pas oublier la présence des fractions.

☒ $R_1 = R_e + R_2$

Il ne faut pas oublier la présence des fractions.

☒ $R_1 = \frac{R_2 R_e}{R_2 - R_e}$

☒ $R_1 = \frac{R_2 R_e}{R_2 + R_e}$

Attention au signe des différents termes.

☒ $R_1 = \frac{R_2 - R_e}{R_2 R_e}$

Attention à la position des termes des fractions.

☒ $R_1 = \frac{R_2 + R_e}{R_2 R_e}$

Attention à la position des termes des fractions.



Explication Générale

Raisonnement : On cherche à isoler R_1 qui est au numérateur et au dénominateur à droite dans l'expression $\frac{1}{R_e} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}$.

Calcul littéral :

1. On multiplie par les dénominateurs pour se ramener à une équation en ligne : $R_1 \cdot R_2 = R_e \cdot (R_2 + R_1)$.
2. On développe : $R_1 R_2 = R_e \cdot R_2 + R_e \cdot R_1$.
3. On isole à gauche du signe égal les termes en R_1 : $R_e \cdot R_1 - R_1 R_2 = R_e \cdot R_2$.
4. On factorise par R_1 : $R_1 \cdot (R_e - R_2) = R_e \cdot R_2$.
5. On isole R_1 en divisant l'expression par $(R_e - R_2)$: $R_1 = \frac{R_e \cdot R_2}{(R_e - R_2)}$.



La relation de conjugaison d'une lentille à bords minces s'écrit : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$.

Que vaut $\overline{OA'}$ quand $f' = 0.04 \text{ m}$ et $\overline{OA} = -0.08 \text{ m}$?



$$\overline{OA'} = 0,08 \text{ m}$$



$$\overline{OA'} = 12,5 \text{ m}$$



$$\overline{OA'} = 8 \text{ cm}$$



$$\overline{OA'} = 0,08 \text{ m}$$

Attention aux unités.



$$\overline{OA'} = 12,5 \text{ m}$$

C'est l'inverse de OA' qui est calculé ici non OA' . Il reste une étape à faire.



$$\overline{OA'} = 8 \text{ cm}$$



Explication Générale

Raisonnement : on isole d'abord $\frac{1}{OA'}$ puis on prend l'inverse du résultat pour obtenir $\overline{OA'}$.

Calcul littéral :

- On isole $\frac{1}{OA'}$ en ajoutant $\frac{1}{OA}$ de chaque côté du signe égal : $\frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{OA}$.
- On se ramène à une seule fraction à droite (même dénominateur) : $\frac{1}{OA'} = \frac{\overline{OA} + f'}{OA \cdot f'}$.
- On inverse pour trouver le résultat demandé : $\overline{OA'} = \frac{OA \cdot f'}{\overline{OA} + f'}$.

Application numérique :

$$\overline{OA'} = \frac{0,04 \text{ m} \times (-0,08 \text{ m})}{0,04 \text{ m} - 0,08 \text{ m}} = 0,08 \text{ m}.$$



Une onde sonore se propage à la vitesse V dans un métal et à la vitesse v dans l'air sur une même distance L . On mesure Δt la différence des durées de parcours de cette onde dans un métal et dans l'air.

$$\Delta t = L \times \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right)$$

Quelle est l'expression de la vitesse V du son dans le métal?



$$V = \frac{v.L}{L - \Delta t \times v}$$



$$V = \frac{L}{\frac{L}{v} - \Delta t}$$



$$V = \frac{v}{1 - \frac{\Delta t \times v}{L}}$$



$$V = v - \frac{L}{\Delta t}$$

Solution :



$$V = \frac{v.L}{L - \Delta t \times v}$$



$$V = \frac{L}{\frac{L}{v} - \Delta t}$$



$$V = \frac{v}{1 - \frac{\Delta t \times v}{L}}$$



$$V = v - \frac{L}{\Delta t}$$

A partir de $1/V = 1/v - \frac{\Delta t}{L}$ on ne peut prendre l'inverse de chaque terme pour effectuer la soustraction.



Explication Générale

Raisonnement : On cherche à isoler V qui est au dénominateur à droite du signe égal dans $\Delta t = L \times \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{V} \right)$.

Calcul littéral :

1. On divise par L des deux côtés pour isoler V : $\frac{\Delta t}{L} = \frac{1}{v} - \frac{1}{V}$.
2. On isole $\frac{1}{V}$ à gauche du signe égal : $\frac{1}{V} = \frac{\Delta t}{L} - \frac{1}{v}$.
3. Pour pouvoir inverser les fractions, il faut qu'elles soient au même dénominateur. On met donc le terme de droite au même dénominateur : $\frac{1}{V} = \frac{v\Delta t}{Lv} - \frac{L}{vL} = \frac{v\Delta t - L}{Lv}$.
4. On prend l'inverse de cette expression : $V = \frac{v.L}{L - v\Delta t}$.

Expressions équivalentes : D'autres expressions proposées dans l'énoncé sont équivalentes à cette expression :

- On peut diviser par v au numérateur et au dénominateur : $V = \frac{L}{\frac{L}{v} - \Delta t}$.
- On peut diviser par L au numérateur et au dénominateur : $V = \frac{v}{1 - \frac{v\Delta t}{L}}$.

VIII. Résoudre une inéquation :

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x .

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs.

• Inéquation du premier degré :

Exemples :

1) $2x + 3 < 4 - 5x$

$2x + 5x < 4 - 3$

$7x < 1$

$x < \frac{1}{7}$ Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{7}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $\left] -\infty ; \frac{1}{7} \right[$.

2) $2(x - 4) \leq 4x - 5$

$2x - 8 \leq 4x - 5$

$2x - 4x \leq 8 - 5$

$-2x \leq 3$

$x \geq -\frac{3}{2}$ **On divise par un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité.**

Les solutions sont tous les nombres supérieurs à $-\frac{3}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $\left[-\frac{3}{2} ; +\infty \right[$.

• En étudiant le signe d'un produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3 - 6x)(x + 2) > 0$

Le signe de $(3 - 6x)(x + 2)$ dépend du signe de chaque facteur $3 - 6x$ et $x + 2$.

$3 - 6x = 0$ ou $x + 2 = 0$

$6x = 3$ $x = -2$

$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.

En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $(3 - 6x)(x + 2)$.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$3 - 6x$	+	+	0	-	
$x + 2$	-	0	+	+	
$(3 - 6x)(x + 2)$	-	0	+	0	-

On en déduit que $(3 - 6x)(x + 2) > 0$ pour $x \in \left] -2 ; \frac{1}{2} \right[$.

• En étudiant le signe d'un quotient

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$.

L'équation n'est pas définie pour $3x - 2 = 0$, soit $x = \frac{2}{3}$.

Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de $\frac{2-6x}{3x-2}$ dépend du signe des expressions $2 - 6x$ et $3x - 2$.

$2 - 6x = 0$ équivaut à $x = \frac{1}{3}$.

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$2 - 6x$	+	0	-	-
$3x - 2$	-	-	0	+
$\frac{2 - 6x}{3x - 2}$	-	0		-

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour $x = \frac{2}{3}$.

On en déduit que $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ pour $x \in \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3} ; +\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ est $\left]-\infty ; \frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3} ; +\infty\right[$.

IX. Valeur absolue :

Définition : La valeur absolue d'un nombre A est égale au nombre A si A est positif et au nombre -A si A est négatif.

Exemple : $|x - 5| = \begin{cases} x - 5, & \text{si } x \geq 5 \\ 5 - x, & \text{si } x \leq 5 \end{cases}$

Propriétés : Soient x et y deux nombres réels.

On a :

$$|x| \geq 0$$

$$|-x| = |x|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x| = 0 \text{ équivaut à } x = 0$$

$$|x| = |y| \text{ équivaut à } x = y \text{ ou } x = -y$$

$$|xy| = |x| \times |y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \text{ pour } y \neq 0$$

Exemples :

$$1) |-3| = 3 \text{ et } |3| = 3 \text{ donc } |-3| = |3|$$

$$2) \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ et } |-5| = 5 \text{ donc } \sqrt{(-5)^2} = |-5|$$

Propriété : Soit a un nombre réel.

Dire que x est tel que $|x - a| \leq r$ signifie que x appartient à l'intervalle $[a - r ; a + r]$.

Démonstration : Si $x - a \geq 0$, alors $x - a \leq r$ d'où $x \leq a + r$

Si $x - a \leq 0$, alors $x - a \geq -r$ d'où $x \geq a - r$

Il vient $a - r \leq x \leq a + r$

Quizz inéquation niveau 1 :



Résoudre l'inéquation $|x - 53| < 0,1$

☐

$x > 53,1$

☐

$52,9 < x < 53,1$

☐

$53,1 < x < 53,2$

☐

$x < 52,9$

☒

$x > 53,1$

Erreur de sens de l'inégalité

☒

$52,9 < x < 53,1$

☒

$53,1 < x < 53,2$

Décalage dans les calculs

☒

$x < 52,9$

Erreur de sens de l'inégalité



Explication Générale

Calcul :

L'énoncé donne $|x - 53| < 0,1$

- Pour **enlever la valeur absolue**, il faut traiter deux cas donnés :
 - Pour $x > 53$, on a $x - 53 < 0,1$
 - Pour $x < 53$, on a $53 - x < 0,1$
- Ces deux inéquations deviennent : $x < 53 + 0,1$ et $x > 53 - 0,1$
- On obtient donc l'encadrement : $52,9 < x < 53,1$

Niveau 2 :



La vergence d'une lentille mince a été évaluée :

$$V = (4 \pm 0,1)\delta \text{ (dioptries)}$$

Quelle expression avec une inégalité traduit la valeur de V?



$$|V - 4| < 0,1$$



$$|V + 4| < 0,1$$



$$|V - 0,1| < 4$$



$$|V + 0,1| < 4$$



$$|V - 4| < 0,1$$



$$|V + 4| < 0,1$$

Revoir le signe de la valeur



$$|V - 0,1| < 4$$

Confusion entre la valeur de la vergence et son incertitude



$$|V + 0,1| < 4$$

Confusion entre la valeur de la vergence et son incertitude



Explication Générale

Schéma : On commence par faire un schéma pour se représenter la situation



Modélisation : On peut donc écrire $4 - 0,1 < V < 4 + 0,1$ (en dioptrie)

Calcul :

- Pour utiliser la valeur absolue, il faut obtenir une expression de la forme $-a < X < +a$ que l'on pourra transformer en $|X| < a$
- On transforme donc l'expression précédente en soustrayant 4 et on obtient : $-0,1 < V - 4 < 0,1$
- On peut alors utiliser la valeur absolue : $|V - 4| < 0,1$



Deux véhicules progressent aux vitesses respectives de 40 m/s et 20 m/s dans la même direction. Le second a 90 m d'avance à l'instant initial.

Les équations horaires des 2 véhicules sont : $x_1(t) = 40t$ et $x_2(t) = -20t + 90$ (t mesuré en secondes)

Entre quelles dates, la distance entre les 2 véhicules sera t-elle inférieure à 30 m ?

☐ $1 < t < 2$

☐ $t > 1$

☐ $t > 2$

☒ $1 < t < 2$

☐ $t > 1$

Pour répondre à la question, il faut modéliser la distance par une valeur absolue et non par une simple inégalité.

☐ $t > 2$

Pour répondre à la question, il faut modéliser la distance par une valeur absolue et non par une simple inégalité.



Explication Générale

Raisonnement :

- Une distance est modélisée par la valeur absolue de la différence des 2 positions
- On transforme l'inéquation avec une valeur absolue par une double inéquation.

Rappel : Une inéquation du type $|ax + b| < d$ se traduit par l'inégalité $-d < ax + b < d$

Modélisation : La distance entre les deux véhicules est inférieure à 30 lorsque $|x_2 - x_1| < 30$, on pourrait aussi écrire $|x_1 - x_2| < 30$ sans incidence sur le résultat final.

Calcul littéral :

- On écrit la condition sur le temps t :
 - On remplace x_1 et x_2 par leurs expressions en fonction du temps et on obtient : $|-20t + 90 - 40t| < 30$
 - On calcule le terme de gauche : $|-60t + 90| < 30$
- On transforme l'inéquation sur une valeur absolue en une double inéquation : $-30 < -60t + 90 < 30$
- On résout l'inéquation
 - On soustrait 90 à tous les termes de l'expression : $-120 < -60t < -60$
 - On multiplie par (-1) toute l'expression, il faut donc changer le sens de l'inégalité : $[-120 < -60t < -60] \times (-1) \Rightarrow 120 > 60t > 60$
 - On isole l'inconnue t en divisant chaque terme par 60 et on obtient : $2 > t > 1$

Les 2 véhicules seront séparés de moins de 30 m entre $t = 1$ s et $t = 2$ s.



Deux véhicules progressent aux vitesses respectives de 40 m/s et 20 m/s dans la même direction. Le second a 90 m d'avance à l'instant initial.

Les équations horaires des 2 véhicules sont : $x_1(t) = 40t$ et $x_2(t) = 20t + 90$ (t mesuré en secondes)

Entre quelles dates, la distance entre les 2 véhicules sera t-elle inférieure à 30 m ?

☐

$3 < t < 6$

☐

$t > 3$

☐

$t > 6$



$3 < t < 6$



$t > 3$

Pour répondre à la question, il faut modéliser la distance par une valeur absolue et non par une simple inégalité.



$t > 6$

Pour répondre à la question, il faut modéliser la distance par une valeur absolue et non par une simple inégalité.



Explication Générale

Raisonnement :

- Une distance est modélisée par la valeur absolue de la différence des 2 positions
- On transforme l'inéquation avec une valeur absolue par une double inéquation.

Rappel : Une inéquation du type $|ax + b| < d$ se traduit par l'inégalité $-d < ax + b < d$

Modélisation : La distance entre les deux véhicules est inférieure à 30 lorsque $|x_2 - x_1| < 30$, on pourrait aussi écrire $|x_1 - x_2| < 30$ sans incidence sur le résultat final.

Calcul littéral :

- On écrit la condition sur le temps t :
 - On remplace x_1 et x_2 par leurs expressions en fonction du temps et on obtient : $|20t + 90 - 40t| < 30$
 - On calcule le terme de gauche : $|-20t + 90| < 30$
- On transforme l'inéquation sur une valeur absolue en une double inéquation : $-30 < -20t + 90 < 30$
- On résout l'inéquation
 - On soustrait 90 à tous les termes de l'expression : $-120 < -20t < -60$
 - On multiplie par (-1) toute l'expression, il faut donc changer le sens de l'inégalité : $[-120 < -20t < -60] \times (-1) \Rightarrow 120 > 20t > 60$
 - On isole l'inconnue t en divisant chaque terme par 20 et on obtient : $6 > t > 3$

Les 2 véhicules seront séparés de moins de 30 m entre $t = 3$ s et $t = 6$ s.



Deux véhicules progressent aux vitesses respectives de 40 m/s et 20 m/s dans la même direction. Le second a 90 m d'avance à l'instant initial.

Les équations horaires des 2 véhicules sont : $x_1(t) = 40t$ et $x_2(t) = 20t + 90$ (t mesuré en secondes)

Entre quelles dates, la distance entre les 2 véhicules sera t-elle inférieure à 30 m ?

On sera amené à résoudre l'inéquation $|x_2 - x_1| < 30$

☐

$$3 < t < 6$$

☐

$$-6 < t < -3$$

☐

$$3 > t > 6$$



$$3 < t < 6$$



$$-6 < t < -3$$

Erreur de signe dans le calcul de l'expression de l'inégalité.



$$3 > t > 6$$

Attention au sens de l'inégalité, 6 n'est pas plus petit que 3.

Si on multiplie ou on divise une inéquation par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.



Explication Générale

Raisonnement : On transforme l'inéquation avec une valeur absolue par une double inéquation.

Rappel : Une inéquation du type $|ax + b| < d$ se traduit par l'inégalité $-d < ax + b < d$

Modélisation : La distance entre les deux véhicules est inférieure à 30 lorsque $|x_2 - x_1| < 30$

Calcul littéral :

- On écrit la condition sur le temps t :
 - On remplace x_1 et x_2 par leurs expressions en fonction du temps et on obtient : $|20t + 90 - 40t| < 30$
 - On calcule le terme de gauche : $|-20t + 90| < 30$
- On transforme l'inéquation sur une valeur absolue en une double inéquation : $-30 < -20t + 90 < 30$
- On résout l'inéquation
 - On soustrait 90 à tous les termes de l'expression : $-120 < -20t < -60$
 - On multiplie par (-1) toute l'expression, il faut donc changer le sens de l'inégalité : $[-120 < -20t < -60] \times (-1) \Rightarrow 120 > 20t > 60$
 - On isole l'inconnue t en divisant chaque terme par 20 et on obtient : $6 > t > 3$

Les 2 véhicules seront séparés de moins de 30 m entre $t = 3s$ et $t = 6s$.

X. Résoudre un système d'équations :

Système 2x2 : signifie 2 équations à 2 inconnues

$\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$ est un **système de deux équations** du premier degré à **deux inconnues** désignées par les lettres x et y .

Un couple de nombres $(x; y)$ est **solution d'un système** s'il vérifie simultanément les deux égalités.

Exemple : Le couple $(2 ; -3)$ est-il solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$?

Pour $x = 2$ et $y = -3$:

$$5x + 2y = 5 \times 2 + 2 \times (-3) = 10 - 6 = 4 \text{ et } -2x + y = -2 \times 2 + (-3) = -7.$$

Les deux égalités sont simultanément vérifiées pour $x = 2$ et $y = -3$ donc le couple $(2 ; -3)$ est

solution du système $\begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ -2x + y = -7 \end{cases}$.

Résoudre un système de deux équations à deux inconnues revient à déterminer tous les couples de nombres $(x; y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

Méthode : Résolution par substitution

Exemple : Résous le système $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ par substitution.

$y = 9 + 3x$ $\longrightarrow$ On exprime y en fonction de x à l'aide de la première équation.

$4x - 3(9 + 3x) = -17$ $\longrightarrow$ On remplace (substitue) y par $9 + 3x$ dans la deuxième équation.

$$\begin{aligned} 4x - 27 - 9x &= -17 \\ -5x &= 10 \\ x &= -2 \end{aligned}$$
 $\longrightarrow$ On résout l'équation à une inconnue ainsi obtenue pour trouver la valeur de x .

$y = 9 + 3 \times (-2)$
 $y = 9 - 6$
 $y = 3$ $\longrightarrow$ On remplace x par -2 dans l'équation trouvée à la première étape pour trouver la valeur de y .

Donc, si $\begin{cases} -3x + y = 9 \\ 4x - 3y = -17 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

On vérifie ensuite que le couple $(-2 ; 3)$ est une solution effective de ce système en appliquant ce qui a été vu **partie I**. On en déduit que $(-2 ; 3)$ est la solution de ce système.

Méthode : Résolution par combinaisons

Exemple : Résous le système $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ par combinaisons.

Détermination d'une des inconnues

On cherche à éliminer l'inconnue y pour se ramener à une équation du premier degré à une inconnue.

$$\begin{cases} 5 \times (5x - 4y) = 5 \times 8 \\ 4 \times (2x + 5y) = 4 \times 1 \end{cases}$$

→ On multiplie les deux membres de la première équation par **5** et ceux de la seconde par **4**.

$$\begin{cases} 25x - 20y = 40 \\ 8x + 20y = 4 \end{cases}$$

→ On obtient ainsi des coefficients opposés devant y dans les deux équations.

$$25x + 8x = 40 + 4$$

→ On ajoute membre à membre les deux équations du système ainsi obtenu pour éliminer y .

$$33x = 44$$

$$x = \frac{44}{33} = \frac{4 \times 11}{3 \times 11} = \frac{4}{3}$$

→ On résout cette équation à une inconnue pour trouver la valeur de x .

Détermination de l'autre inconnue

$$5 \times \frac{4}{3} - 4y = 8$$

→ On remplace x par $\frac{4}{3}$ dans l'une des deux équations pour trouver y (ici la première).

$$\frac{20}{3} - 4y = 8$$

$$-4y = \frac{4}{3}$$

→ On trouve $y = -\frac{1}{3}$.

Donc, si $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

On vérifie ensuite que le couple $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ est une solution effective de ce système.

On en déduit que le couple $\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ est la solution de ce système.

Remarque : Pour trouver la valeur de y , on pouvait aussi éliminer l'inconnue x .

Système 3x3 : 3 équations à 3 inconnues :

Résoudre le système :

$$\begin{cases} 5x + 2y + 7z = 2 \\ 2x + y - 3z = 7 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système il existe plusieurs méthodes dont l'une consiste à utiliser les matrices, voir chapitre matrices.

Comment résoudre ce système si on ne connaît pas les matrices.

Par combinaison :

$$(L1) - 2(L2) \Rightarrow 5x - 4x + 2y - 2y + 7z + 6z = 2 - 14 \text{ soit } x + 13z = -12$$

$$(L1) - 5(L3) \Rightarrow 5x - 5y + 2y - 10y + 7z - 5z = 2 - 20 \text{ soit } -8y + 2z = -18$$

$$(L2) - 2(L3) \Rightarrow 2x - 2x + y - 4y - 3z - 2z = 7 - 8 \text{ soit } -3y - 5z = -1$$

Soit un nouveau système :

$$\begin{cases} x + 13z = -12 \\ 4y - z = 9 \\ 3y + 5z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 13z = -12 \\ z = 4y - 9 \\ 3y + 5(4y - 9) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 13z = -12 \\ z = 4y - 9 \\ 3y + 20y - 45 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 13z = -12 \\ z = 4y - 9 \\ y = \frac{46}{23} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -12 - 13 \times (-1) = 1 \\ z = 4 \times 2 - 9 = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

En utilisant les matrices : (voir le chapitre les matrices)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice correspond au système donné dans l'énoncé « il s'agit des coefficients positionnés devant les inconnues ».

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vérifier qu'on retrouve bien le système initial en faisant le produit des matrices AX .

Si A est inversible en multipliant à gauche par A^{-1} il vient $A^{-1}AX = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Soit $X = A^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ car $A^{-1}A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par définition.

Pour utiliser cette méthode, il faut **savoir multiplier deux matrices** et **savoir inverser une matrice** quand c'est possible pour résoudre facilement le système donné. Voir chapitre sur les matrices et les calculs matriciels.

1. A la calculatrice, on trouve que la matrice A est inversible et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/46 & 6/23 & -13/46 \\ -5/46 & -1/23 & 29/46 \\ 3/46 & -4/23 & 1/46 \end{pmatrix}$$

2. Si l'on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, le système proposé est équivalent à :

$$A \times X = B$$

Les solutions sont obtenues en calculant $X = A^{-1} \times B$ (voir théorème) :

$$X = A^{-1} \times B = \begin{pmatrix} 7/46 & 6/23 & -13/46 \\ -5/46 & -1/23 & 29/46 \\ 3/46 & -4/23 & 1/46 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'unique solution du système est donc le triplet $(x; y; z) = (1; 2; -1)$

Quizz niveau 1 :



On considère le système : $\begin{cases} 2x = 3 \sin \alpha \\ 2y = 3 \cos \alpha \end{cases}$

Déterminer l'expression de x en fonction de y et de α ?

☐

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$$

☐

$$x = y \tan(\alpha)$$

☐

$$x = y \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

☐

$$x = y + \frac{3}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)$$

☒

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$$

La réponse juste mais n'est pas donnée en fonction de α

☒

$$x = y \tan(\alpha)$$

☒

$$x = y \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

correct sans la simplification d'écriture avec la tangente

☒

$$x = y + \frac{3}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha)$$

correct mais moins simple qu'avec la tangente



Explication Générale

Raisonnement :

On pourrait substituer la valeur de α donnée par la deuxième équation et la remplacer dans la première mais l'expression utiliserait plusieurs fonctions trigonométriques. D'où l'idée de simplifier les deux fonctions trigonométriques cosinus et sinus en une seule en faisant le quotient des deux équations, ce qui donne : $\frac{x}{y} = \tan \alpha \iff x = y \tan \alpha$



On considère le système :

$$\begin{cases} 3 + 4x - 2y = 0 \\ 9 - 2y + 4z = 0 \\ 6 + 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Quelle est la valeur de l'inconnue x ?

☐

$x = 0$

☐

$x = -\frac{3}{4}$

☐

$x = -3$

☒

$x = 0$

cette solution convient avec $y = \frac{3}{2}$ dans la première équation mais pas dans les autres

☒

$x = -\frac{3}{4}$

☐

$x = -3$

cette solution convient avec $y = z = 0$ dans la troisième équation mais pas dans les autres



Explication Générale

Raisonnement :

On va utiliser la méthode par substitution :

- On exprime y en fonction de x dans la première équation : $y = \frac{3+4x}{2}$
- On remplace cette valeur de y dans la deuxième équation pour obtenir z en fonction de x :
 $9 - 2\frac{3+4x}{2} + 4z = 0 \iff z = \frac{2x-3}{2}$
- On remplace les valeurs de y et z dans la troisième équation pour obtenir x :
 $6 + 2x + \frac{3+4x}{2} + 2\frac{2x-3}{2} = 0 \iff x = -\frac{3}{4}$

Quizz niveau 2 :



L'application des lois de Kirchhoff à un circuit électrique conduit au système suivant avec I , I_1 et I_2 comme inconnues :

$$(1) E + 4RI - 2RI_1 = 0$$

$$(2) 3E - 2RI_1 + 4RI_2 = 0$$

$$(3) 2E + 2RI + RI_1 + 2RI_2 = 0$$

Quelle est l'expression de I en fonction de E et de R , à partir du système précédent ?

☐ $I = -\frac{E}{4R}$

☐ $I = \frac{E}{4R}$

☐ $I = -\frac{4E}{R}$

☒ $I = -\frac{E}{4R}$

☐ $I = \frac{E}{4R}$

☐ $I = -\frac{4E}{R}$



Explication Générale

Raisonnement

- On commence par identifier les inconnues. Celle que l'on cherche à exprimer (en rouge), celles qu'on cherche à supprimer en bleu et rose.

$$\begin{cases} (1) E + 4R\textcolor{red}{I} - 2RI_1 = 0 \\ (2) 3E - 2RI_1 + 4R\textcolor{violet}{I}_2 = 0 \\ (3) 2E + 2R\textcolor{red}{I} + RI_1 + 2R\textcolor{violet}{I}_2 = 0 \end{cases}$$

- On observe qu'il n'y a pas I_2 dans la première équation. On va donc pouvoir s'en servir pour exprimer I_1 en fonction de I et substituer dans les deux autres équations : $I_1 = f(I)$
- Il n'y a que I_1 et I_2 dans l'expression (2) : on va donc s'en servir ensuite pour exprimer I_2 en fonction de I_1 et grâce à l'équation (1) en fonction de I
- On remplacera ensuite I_1 et I_2 par leur expression en fonction de I dans la troisième expression.

Calcul :

- On exprime I_1 en fonction de I grâce à (1) :

$$E + 4R\textcolor{red}{I} - 2RI_1 = 0 \Rightarrow 2RI_1 = E + 4R\textcolor{red}{I} \Rightarrow I_1 = \frac{E + 4R\textcolor{red}{I}}{2R}$$

- On exprime I_2 en fonction de I_1 dans (2) :

$$3E - 2RI_1 + 4R\textcolor{violet}{I}_2 = 0 \Rightarrow 4R\textcolor{violet}{I}_2 = 2RI_1 - 3E \Rightarrow \textcolor{violet}{I}_2 = \frac{2RI_1 - 3E}{4R}$$

- On remplace I_1 par son expression en fonction de I :

$$\textcolor{violet}{I}_2 = \frac{2RI_1 - 3E}{4R} = \frac{2R\left(\frac{E + 4R\textcolor{red}{I}}{2R}\right) - 3E}{4R} = \frac{E + 4R\textcolor{red}{I} - 3E}{4R} = \frac{2R\textcolor{red}{I} - E}{2R}$$

- On injecte les expressions précédentes dans (3) pour éliminer I_1 et I_2 :

$$2E + 2R\textcolor{red}{I} + \frac{E + 4R\textcolor{red}{I}}{2} + 2RI - E = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}E + 6R\textcolor{red}{I} = 0 \Rightarrow I = -\frac{E}{4R}$$



Le trajet d'un rayon lumineux dans une fibre optique conduit au système suivant, avec α et i_L inconnues :

$$(1) n_1 \sin(i_L) = n_2$$

$$(2) n_1 \cos(i_L) = \sin(\alpha)$$

avec $n_1 > n_2$

Quelle est l'expression de α en fonction de n_1 et n_2 , à partir du système précédent ?



$$\alpha = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$



$$\alpha = \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$



$$\alpha = \arcsin \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$$



$$\alpha = \arcsin (n_1^2 - n_2^2)$$



$$\alpha = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$



$$\alpha = \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$



$$\alpha = \arcsin \sqrt{n_1^2 + n_2^2}$$



$$\alpha = \arcsin (n_1^2 - n_2^2)$$



Explication Générale

Raisonnement : On cherche à isoler α en fonction de n_1 et n_2 mais pas en fonction de i_L qu'il va donc falloir éliminer.

Calcul :

- On a $\begin{cases} n_1 \sin(i_L) = n_2 \\ n_1 \cos(i_L) = \sin(\alpha) \end{cases}$
- On sait que $\cos^2 + \sin^2 = 1$. On élève donc chaque expression au carré et on a : $\begin{cases} n_1^2 \sin^2(i_L) = n_2^2 \\ n_1^2 \cos^2(i_L) = \sin^2(\alpha) \end{cases}$
- On additionne les deux relations : $n_1^2 \sin^2(i_L) + n_1^2 \cos^2(i_L) = n_2^2 + \sin^2(\alpha)$
- On factorise n_1^2 et on a $n_1^2 (\sin^2(i_L) + \cos^2(i_L)) = n_2^2 + \sin^2(\alpha) \Rightarrow n_1^2 = n_2^2 + \sin^2(\alpha)$
- On isole le terme avec l'inconnue (α) : $\sin^2(\alpha) = n_1^2 - n_2^2$
- On prend la racine carrée de l'expression : $\sin(\alpha) = \pm \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$
- On applique la fonction réciproque du sinus : $\alpha = \arcsin(\pm \sqrt{n_1^2 - n_2^2})$



Le trajet d'un rayon lumineux dans une goutte brillante conduit au système suivant, avec i_L et n_1 inconnues :

$$(1) n \times \sin(i_L) = n_1$$

$$(2) n \times \cos(i_L) = \cos(\alpha)$$

Exprimer n_1 en fonction de n et de α , à partir du système précédent :



$$n_1 = n^2 - \cos^2(\alpha)$$



$$n_1 = \sqrt{n^2 + \cos^2(\alpha)}$$



$$n_1 = \sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}$$



$$n_1 = n^2 - \cos^2(\alpha)$$



$$n_1 = \sqrt{n^2 + \cos^2(\alpha)}$$



$$n_1 = \sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}$$



Explication Générale

Raisonnement :

On va combiner les équations (1) et (2) pour exprimer n_1

Calcul :

- On additionne (1) et (2) : $n \times \sin(i_L) + n \times \cos(i_L) = n_1 + \cos(\alpha)$
- On isole n_1 : $n_1 = n (\sin(i_L) + \cos(i_L)) - \cos(\alpha)$
- Sachant que $\cos^2(i_L) + \sin^2(i_L) = 1$ on élève tout au carré, ce qui donne : $n^2 = n_1^2 + \cos^2(\alpha)$
- D'où $n_1 = \sqrt{n^2 - \cos^2(\alpha)}$ (seule la solution positive convient)



Un fauteuil électrique est alimenté par un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r non nulle. Si on appelle I l'intensité qui circule dans le circuit électrique, la tension U aux bornes de ce générateur est $U = E - rI$ et la puissance qu'il fournit lors du fonctionnement est $P = U \cdot I$.

Quelle sont les expressions possibles de l'intensité I qui circule dans le circuit en fonction de E , P et r ?



$$\frac{E + \sqrt{E^2 - 4rP}}{2r}$$



$$\frac{E - \sqrt{E^2 + 4rP}}{2r}$$



$$\frac{E - \sqrt{E^2 - 4rP}}{2r}$$



$$\frac{-E + \sqrt{E^2 - 4rP}}{2r}$$

✓ $\frac{E + \sqrt{E^2 - 4rP}}{2r}$

■ $\frac{E - \sqrt{E^2 - 4rP}}{2r}$

Attention au calcul du discriminant Δ

✓ $\frac{E - \sqrt{E^2 - 4rP}}{2r}$

■ $\frac{-E + \sqrt{E^2 - 4rP}}{2r}$

Revoir l'expression des solutions d'une équation du second degré



Explication Générale

Raisonnement :

- On dispose de deux équations : $\begin{cases} P = UI \\ U = E - rI \end{cases}$
- Pour trouver l'expression de I en fonction de E , P et R , il faut éliminer la grandeur U . On va résoudre le système par substitution en remplaçant U par son expression dans la relation $P = UI$.
- Ensuite on déterminera l'expression de I .

Calcul littéral :

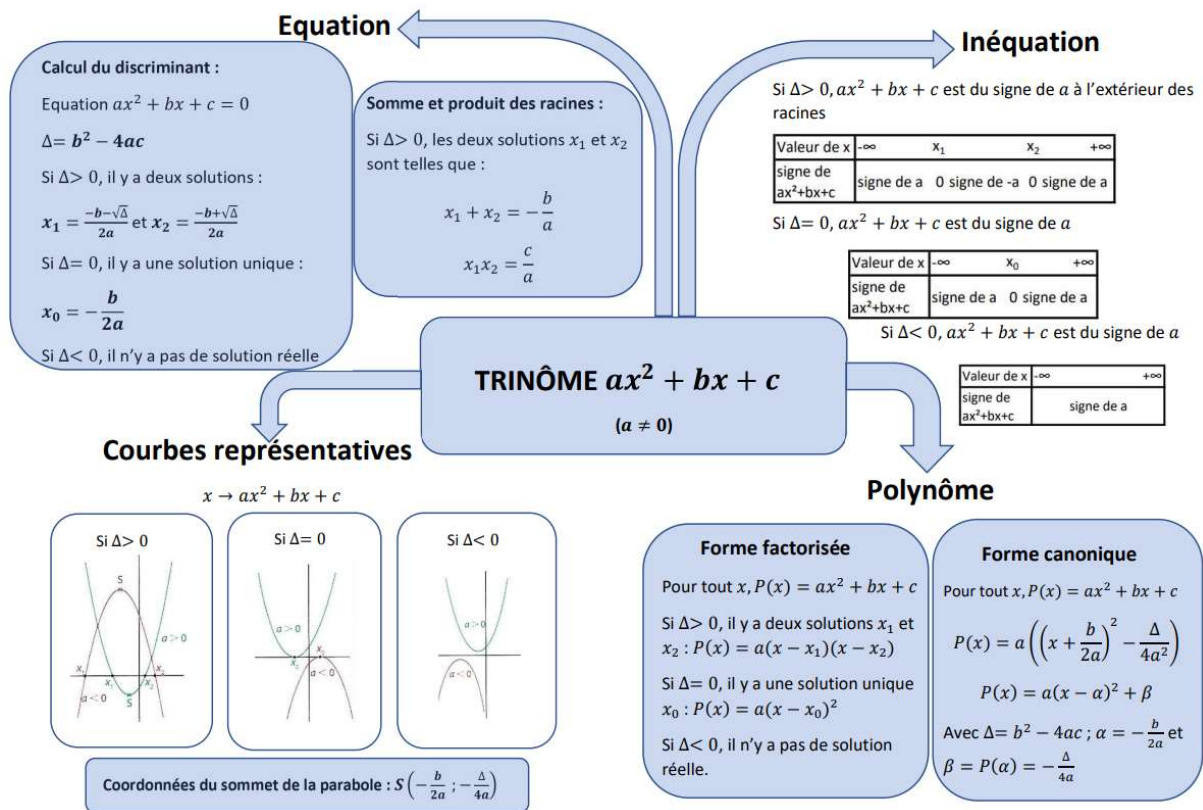
- On substitue U dans la première relation : $P = UI = (E - rI)I$
- On développe et on obtient une équation du second degré dont l'inconnue est I : $P = E \cdot I - r \cdot I^2$
- On se ramène à la forme caractéristique de l'équation du second degré (de la forme $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$) pour calculer facilement le discriminant : $rI^2 - E \cdot I + P = 0$
- On calcule le discriminant : $\Delta = (-E)^2 - 4(r)(P) = E^2 - 4r \cdot P$
- On suppose que $\Delta > 0$, et on a donc 2 valeurs possibles pour I : $\begin{cases} I = \frac{E + \sqrt{E^2 - 4rP}}{2r} \\ I = \frac{E - \sqrt{E^2 - 4rP}}{2r} \end{cases}$

Rappel : Pour un polynôme du second degré : discriminant $\Delta = b^2 - 4a \cdot c$.

Dans le cas où le discriminant est positif, les deux racines du polynôme sont $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

XI. Résoudre une équation ou une inéquation du second degré dans $\mathbb{R}$:

Carte mentale pour résolution dans $\mathbb{R}$:



On utilise l'une des trois méthodes suivantes :

Méthode 1 : on utilise les formules apprises avec le discriminant

Exemples :

Résoudre l'équation : $3x^2 + 3x + \frac{3}{4} = 0$

$$\Delta = (3)^2 - 4 \times 3 \times \frac{3}{4}$$

$$\Delta = 9 - 9$$

$$\Delta = 0$$

Il y a donc une solution unique $x = -\frac{3}{2 \times 3} = -\frac{1}{2}$

Résoudre l'équation : $-2x^2 + x + 1 = 0$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 1$$

$$\Delta = 1 + 8$$

$\Delta = 9$, on a $\Delta > 0$, il y a donc deux solutions : $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = -\frac{1}{2}$

et $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = 1$, d'où $S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$

Méthode 2 : on utilise la forme canonique

Exemples :

Résoudre $x^2 + 2x - 35 = 0$

$$(x + 1)^2 - 1 - 35 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 36 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 6^2 = 0$$

$$(x + 1 - 6)(x + 1 + 6) = 0$$

$(x - 5)(x + 7) = 0$ or un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

D'où si $x = 5$ ou si $x = -7$ d'où $S = \{-7; 5\}$

Résoudre $2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4 = 0$

$$(\sqrt{2}x + 2)^2 = 0$$

$$\sqrt{2}x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ soit } S = \{-\sqrt{2}\}$$

Méthode 3 : on connaît une racine, on utilise la forme factorisée qu'on développe puis on procède par identification des coefficients. On peut aussi utiliser les formules du produit et de la somme des racines.

Exemple :

Résoudre $2x^2 - 3x - 2 = 0$

On voit que 2 est une racine évidente, si on calcule $P(2)$ on a :

$$2 \times 2^2 - 3 \times 2 - 2 = 0 \text{ on a } P(2) = 0$$

Donc 2 est une racine.

On peut alors écrire $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)(x - r) = 0$ on cherche à déterminer la seconde racine qu'on a nommé r .

$$2(x - 2)(x - r) = 2(x^2 - rx - 2x + 2r) = 2x^2 - (2r + 4)x + 4r$$

On identifie les coefficients, car deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. D'où :

$$\begin{cases} 2r + 4 = 3 \\ 4r = -2 \end{cases} \text{ il vient } r = -\frac{1}{2}$$

Autre méthode en utilisant $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ et $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$ il vient :

$$2 + r = \frac{3}{2} \text{ et } 2r = -1 \text{ d'où } r = -\frac{1}{2}$$

$$\text{On a } S = \{-\frac{1}{2}; 2\}$$

XII. Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$:

Equation du second degré à coefficients réels (voir le chapitre les nombres complexes)

On utilise la forme canonique. (voir exemple 1)

On utilise les formules du cours : (voir exemple 2)

- Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation admet une racine double réelle $r = -\frac{b}{2a}$
- Si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet deux racines réelles $r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation admet deux racines complexes (qui sont conjuguées) $r = \frac{-b \pm i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$

Exemples :

- Exemple 1 : Déterminer les solutions de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$

En utilisant la forme canonique :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (i)^2 \frac{3}{4} = 0 \text{ car } i^2 = -1$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

Les racines sont $r_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Exemple 2 : Déterminer les solutions de l'équation $z^2 + 3z + 4 = 0$

On utilise les formules du cours :

On calcule de discriminant Δ du trinôme : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7$

$\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Application en sciences physiques :

On a souvent besoin de savoir résoudre ce type d'équation en sciences physiques, par exemple système oscillant ayant pour équation différentielle $x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0$ où x est la position fonction du temps et λ et ω sont

deux constantes positives telles que $\lambda < \omega$. Le polynôme caractéristique de cette équation différentielle est $r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$.

On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega^2$ or comme on a $\lambda < \omega$, le discriminant est négatif.

Il vient $r_1 = \frac{-b+i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b-i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}$

$r_1 = \frac{-b+i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a} = -\lambda + i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$ et $r_2 = -\lambda - i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$

[Pour la suite de la résolution du problème, voir le chapitre équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Les solutions sont :

$y = e^{-\lambda x} [\alpha \cos((\sqrt{\omega^2 - \lambda^2})x) + \beta \sin((\sqrt{\omega^2 - \lambda^2})x)]$ ou encore

$y = Ae^{-\lambda x} \cos((\sqrt{\omega^2 - \lambda^2})x + \Phi)$ où A et Φ sont des constantes.]

Quizz niveau 1 :



Quel est le nombre de solution(s) de l'équation $3x^2 + 6 = 0$ dans $\mathbb{R}$?

☐

1

☐

0

☐

2

☒

1

Calculer le discriminant ou factoriser

☒

0

☒

2

Calculer le discriminant ou factoriser



Explication Générale

On sait que :

Pour une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$, si le discriminant $\Delta > 0$, les solutions sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Calcul :

- On **identifie** les paramètres : $a=3$, $b=0$, $c=6$
- On calcule le **discriminant** : $\Delta = 0 - 4 \times 3 \times 6 = -72$
- Comme $\Delta < 0$ l'équation n'admet pas de solutions réelles



Quelle(s) sont (est) les solution(s) de l'équation $2x^2 - 12x + 18 = 0$ dans $\mathbb{R}$?

☐

$x=3$

☐

$x=-3$

☐

$x=6$

☐

il n'y a pas de solution



$x=3$



$x=-3$

Erreur de signe dans le calcul



$x=6$

le coefficient de x^2 est 2 et non 1



il n'y a pas de solution

vérifier le signe du discriminant



Explication Générale

On sait que :

Pour une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$, si le discriminant $\Delta = 0$, l'équation admet une solution "double" : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

Calcul :

- On **identifie** les paramètres : $a=2$, $b=-12$, $c=18$
- On calcule le **discriminant** : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times (18) = 144 - 144 = 0$
- Comme $\Delta = 0$ l'équation admet **une solution double** :
 - $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- On calcule la solution :
 - $x_0 = \frac{-(-12)}{4} = 3$



Quelle est la forme factorisée du polynôme $2x^2 + 6x - 8$?

☐

$2(x-1)(x+4)$

☐

$(x-1)(x+4)$

☐

$2(x+1)(x-4)$

☒ $2(x-1)(x+4)$

☐ $(x-1)(x+4)$

oubli du coefficient de x^2

☐ $2(x+1)(x-4)$

erreur de signe dans les facteurs



Explication Générale

On sait que :

Pour une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$, si le discriminant $\Delta > 0$, les solutions sont $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Le polynôme $ax^2 + bx + c$ se factorise par $a(x - x_1)(x - x_2)$

Calcul :

- On identifie les paramètres : $a = 2$, $b = 6$, $c = -8$
- On calcule le **discriminant** : $\Delta = 36 - 4 \times 2 \times (-8) = 100$
- Comme $\Delta > 0$ l'équation admet **deux solutions distinctes réelles** :
 - $x_1 = \frac{-6 - \sqrt{100}}{2 \times 2}$
 - $x_2 = \frac{-6 + \sqrt{100}}{2 \times 2}$
- On calcule chacune des solutions en sachant que $\sqrt{100} = 10$:
 - $x_1 = \frac{-6 - 10}{4} = \frac{-16}{4}$
 - $x_2 = \frac{-6 + 10}{4} = \frac{4}{4}$
- On factorise en utilisant $a(x - x_1)(x - x_2)$:
 - On remplace et on obtient : $2x^2 + 6x - 8 = 2(x - 1)(x + 4)$



Quel est le nombre de solution(s) de l'équation $2x^2 + 6x - 8 = 0$ dans $\mathbb{R}$?

☐ 2

☐ 1

☐ 0

☒ 2

☐ 1

Vérifier le signe du discriminant

☐ 0

Vérifier le signe du discriminant



Explication Générale

On sait que : Pour une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$, le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Raisonnement et calcul :

- On **identifie** dans l'équation les paramètres : $a = 2$, $b = 6$, $c = -8$
- On **calcule le discriminant** : $36 - 4 \times 2 \times (-8) = 100$
- **Solution** : Comme $\Delta > 0$, L'équation admet deux solutions distinctes réelles

Niveau 2 :



La position x d'un système masse-ressort se déplaçant autour de sa position d'équilibre est décrit par l'équation différentielle : $x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0$.

x est une fonction du temps t et λ et ω sont deux constantes positives telles que $\lambda = \omega$.

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle s'écrit : $r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$

Quelle(s) est (sont) la (les solution(s)) de l'équation caractéristique?

☐

$-\lambda$

☐

λ

☐

$-\lambda/2$



$-\lambda$



λ

Attention au signe



$-\lambda/2$

Reprendre le calcul



Explication Générale

On sait que :

Pour une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$, le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

S'il est nul, l'équation admet une solution "double": $x_0 = \frac{-b}{2a}$

Raisonnement et calcul :

- On identifie dans l'équation $r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$
 - La grandeur qui joue le rôle de l'inconnue : $x \leftrightarrow r$
 - Les paramètres : $a = 1$, $b = 2\lambda$ et $c = \omega^2$
- On calcule le discriminant :
 - $\Delta = (2\lambda)^2 - 4\omega^2$
 - On développe la parenthèse $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega^2$
 - On factorise le 4 : $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega^2)$
- On détermine le signe du discriminant :
 - Comme $\lambda = \omega$, alors $\lambda^2 = \omega^2$
 - Et donc $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, on a donc : $\Delta = 0$
- Solutions : l'équation admet une solution "double" : $r_0 = \frac{-2\lambda}{2} = -\lambda$



La position x d'un système masse-ressort se déplaçant autour de sa position d'équilibre est décrit par l'équation différentielle : $x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0$.

x est une fonction du temps t et λ et ω sont deux constantes positives telles que $\lambda = \omega$.

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle s'écrit : $r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$

Quel est le nombre de solutions de l'équation caractéristique?

☐

1

☐

0

☐

2



1



0

Calculer le discriminant et utiliser la condition $\lambda = \omega$



2

Calculer le discriminant et utiliser la condition $\lambda = \omega$



Explication Générale

On sait que : Pour une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$, le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

S'il est nul, l'équation admet une solution "double"

Raisonnement et calcul :

- On identifie dans l'équation $r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$
 - La grandeur qui joue le rôle de l'inconnue : $x \leftrightarrow r$
 - Les paramètres : $a = 1$, $b = 2\lambda$ et $c = \omega^2$
- On calcule le discriminant :
 - $\Delta = (2\lambda)^2 - 4\omega^2$
 - On développe la parenthèse $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega^2$
 - On factorise le 4 : $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega^2)$
- On détermine le signe du discriminant :
 - Comme $\lambda = \omega$, alors $\lambda^2 = \omega^2$
 - Et donc $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, on a donc : $\Delta = 0$

et l'équation admet **une solution** "double"



La position x d'un système masse-ressort se déplaçant autour de sa position d'équilibre est décrit par l'équation différentielle : $x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0$.

x est une fonction du temps t et λ et ω sont deux constantes positives telles que $\lambda > \omega$.

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle s'écrit : $r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$

Quel est le nombre de solutions de l'équation caractéristique?

☐

2

☐

0

☐

1



2



0

Calculer le discriminant et utiliser la condition $\lambda > \omega$



1

Calculer le discriminant et utiliser la condition $\lambda > \omega$



Explication Générale

On sait que : Pour une équation du second degré du type $ax^2 + bx + c = 0$, le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

S'il est positif l'équation admet deux solutions distinctes

Raisonnement et calcul :

- On identifie dans l'équation $r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$
 - La grandeur qui joue le rôle de l'inconnue : $x \leftrightarrow r$
 - Les paramètres : $a = 1$, $b = 2\lambda$ et $c = \omega^2$
- On calcule le discriminant :
 - $\Delta = (2\lambda)^2 - 4\omega^2$
 - On développe la parenthèse $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega^2$
 - On factorise le 4 : $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega^2)$
- On détermine le signe du discriminant :
 - Comme $\lambda > \omega$, alors $\lambda^2 > \omega^2$
 - Et donc $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, on a donc : $\Delta > 0$

et l'équation a **deux** solutions distinctes.



La position x d'un système masse-ressort se déplaçant autour de sa position d'équilibre est décrit par l'équation différentielle : $x'' + 2\lambda x' + \omega^2 x = 0$.

x est une fonction du temps t et λ et ω sont deux constantes positives telles que $\lambda < \omega$.

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle s'écrit : $r^2 + 2\lambda r + \omega^2 = 0$

Quel est le type de solutions de cette équation?

☐

complexes conjuguées

☐

réelles

☐

solution "double" réelle



complexes conjuguées



réelles

Calculer le discriminant et utiliser la condition $\lambda < \omega$



solution "double" réelle

Calculer le discriminant et utiliser la condition $\lambda < \omega$



Explication Générale

Résolution de l'équation du second degré

- L'équation est bien présentée sous la forme $az^2 + bz + c = 0$, on identifie donc : $a = 1, b = 2\lambda, c = \omega^2$
- On calcule maintenant le discriminant $\Delta = (2\lambda)^2 - 4\omega^2 = 4\lambda^2 - 4\omega^2 = 4(\lambda^2 - \omega^2)$
- Comme $\lambda < \omega, \Delta < 0$, et l'équation a deux solutions complexes conjuguées, les coefficients étant ici réels.

XIII. Calculer avec des exponentielles et des logarithmes

• Avec des exponentielles :

Définition : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$, cette fonction s'appelle la fonction exponentielle. On la note $\exp$.

On a $\exp(0) = 1$.

Cette fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$(\exp x)' = \exp x$, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème : Pour tous réels x et y , on a : $\exp(x + y) = \exp x \times \exp y$

Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Corollaires :

Pour tous réels x et y on a :

- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$ ou encore $\exp x \times \exp(-x) = 1$
- $\exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$
- $\exp nx = (\exp x)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Démonstrations :

a) $\exp x \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp 0 = 1$

b) $\exp(x - y) = \exp(x + (-y))$
 $= \exp x \exp(-y) = \exp x \frac{1}{\exp y} = \frac{\exp x}{\exp y}$

- c) Par récurrence : initialisation pour $n = 0$: $\exp 0 \times x = 1$ d'une part et $(\exp x)^0 = 1$ d'autre part donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie au rang n et montrons qu'elle l'est au rang $n + 1$

$\exp((n + 1)x) = \exp(nx + x) = \exp nx \times \exp x$, or l'hypothèse de récurrence est $\exp nx = (\exp x)^n$ d'où :

$\exp((n+1)x) = (\exp x)^n \times \exp x = (\exp x)^{n+1}$ Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

On a montré par récurrence $\exp nx = (\exp x)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e . On utilise la notation suivante :

$$\exp x = \exp(x \times 1) = (\exp 1)^x = e^x$$

Les propriétés précédentes avec la nouvelle notation :

a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

b) $e^x > 0$ et $(e^x)' = e^x$

c) $e^{x+y} = e^x e^y$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $(e^x)^n = e^{nx}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exemples :

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$	$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$	$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$	$D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$
$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$	$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$	$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$	$D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$
$= \frac{e^{7-4}}{e^{-5}}$	$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$	$= \frac{1}{e^{-3 \times 2}} + \frac{e^{4 \times (-1)}}{e^{2-6}}$	$= \frac{e^{2x \times 3}}{e^{3x+1-x-1}}$
$= \frac{e^3}{e^{-5}}$	$= e^{5 \times (-6)} \times e^{-3}$	$= \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}}$	$= \frac{e^{6x}}{e^{2x}}$
$= e^{3-(-5)}$	$= e^{-30-3}$	$= e^6 + 1$	$= e^{6x-2x}$
$= e^8$	$= e^{-33}$		$= e^{4x}$

Propriétés : Pour tous réels a et b , on a :

a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Equation et inéquation avec des exponentielles :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$

$$e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\text{Donc } x = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3 \text{ ou } x = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

Les solutions sont -3 et 1 .

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

$$e^{4x-1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

• Avec des logarithmes :

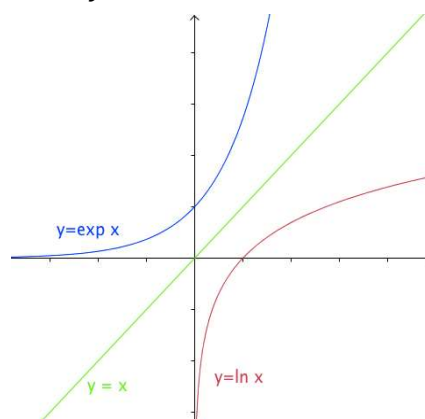
Définition : On appelle logarithme népérien d'un nombre réel strictement positif a , l'unique solution de l'équation $e^x = a$.

La fonction logarithme népérien notée $\ln$ est la fonction :

$$\ln:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln(x)$$

- Les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.
- Les courbes représentatives des fonctions $\exp$ et $\ln$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



- Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log**, et définie par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

Propriétés :

- a) Pour $x > 0$, on a : $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$
- b) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$
- c) $\ln e^x = x$
- d) Pour $x > 0$: $e^{\ln x} = x$

Démonstrations :

- a) Par définition
- b) $e^0 = 1$ donc d'après a. : $\ln 1 = 0$
 $e^1 = e$ donc d'après a. : $\ln e = 1$
 $e^{-1} = \frac{1}{e}$ donc d'après a. : $\ln \frac{1}{e} = -1$
- c) Si on pose $y = e^x$, alors $x = \ln y = \ln e^x$
- d) Si on pose $y = \ln x$, alors $x = e^y = e^{\ln x}$

Théorème : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

$$\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$$

Démonstration :

$$e^{\ln(x \times y)} = x \times y = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$$

$$\text{Donc : } \ln(x \times y) = \ln x + \ln y$$

Corollaires :

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

- a) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
- b) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
- c) $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$
- d) $\ln x^n = n \ln x$, avec n un entier relatif.

Démonstrations :

$$\text{a) } \ln \frac{1}{x} + \ln x = \ln \left(\frac{1}{x} \times x \right) = \ln 1 = 0 \text{ donc } \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\text{b) } \ln \frac{x}{y} = \ln \left(x \times \frac{1}{y} \right) = \ln x + \ln \frac{1}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\text{c) } 2 \ln \sqrt{x} = \ln \sqrt{x} + \ln \sqrt{x} = \ln(\sqrt{x} \times \sqrt{x}) = \ln x \text{ donc } \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

d) On démontre ce résultat par récurrence le cas où n est un entier naturel.
L'initialisation est triviale.

La démonstration de l'hérédité passe par la décomposition :

$$\ln x^{k+1} = \ln(x^k \times x) = \ln x^k + \ln x = k \ln x + \ln x = (k + 1) \ln x$$

Exemples :

Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5}) & B = 3 \ln 2 + \ln 5 - 2 \ln 3 & C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e} \\ A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5}) & B = 3 \ln 2 + \ln 5 - 2 \ln 3 & C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e} \\ = \ln(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) & = \ln 2^3 + \ln 5 - \ln 3^2 & = 2 \ln e - \ln 2 + \ln e \\ = \ln(9 - 5) = \ln 4 & = \ln \frac{2^3 \times 5}{3^2} = \ln \frac{40}{9} & = 2 - \ln 2 + 1 = 3 - \ln 2 \end{array}$$

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

- a) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
- b) $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

Equation et inéquation avec des logarithmes :

1) Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :

- a) $\ln x = 2, I =]0 ; +\infty[$
- b) $e^{x+1} = 5, I = \mathbb{R}$
- c) $3 \ln x - 4 = 8, I =]0 ; +\infty[$
- d) $\ln(6x - 1) \geq 2, I = \left] \frac{1}{6} ; +\infty \right[$
- e) $e^x + 5 > 4 e^x, I = \mathbb{R}$

1) a) $\ln x = 2$

$$\ln x = \ln e^2$$

$$x = e^2$$

b) $e^{x+1} = 5$

$$e^{x+1} = e^{\ln 5}$$

$$x + 1 = \ln 5$$

$$x = \ln 5 - 1$$

c) $3 \ln x - 4 = 8$

$$3 \ln x = 12$$

$$\ln x = 4$$

$$\ln x = \ln e^4$$

$$x = e^4$$

d) $\ln(6x - 1) \geq 2$

$$\ln(6x - 1) \geq \ln e^2$$

$$6x - 1 \geq e^2$$

$$6x \geq e^2 + 1$$

$$x \geq \frac{e^2 + 1}{6}$$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $\left[\frac{e^2+1}{6} ; +\infty\right[$.

e) $e^x + 5 > 4 e^x$

$$e^x - 4 e^x > -5$$

$$-3 e^x > -5$$

$$e^x < \frac{5}{3}$$

$$e^x < e^{\ln \frac{5}{3}}$$

$$x < \ln \frac{5}{3}$$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $] -\infty ; \ln \frac{5}{3} [$.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$

2) a) Ensemble de définition :

$$x-3 > 0 \text{ et } 9-x > 0$$

$$\text{Soit : } x > 3 \text{ et } x < 9$$

L'équation est définie sur l'intervalle $]3 ; 9[$.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(x-3) + \ln(9-x) = 0$$

$$\ln(x-3)(9-x) = 0$$

$$\ln(x-3)(9-x) = \ln 1$$

$$(x-3)(9-x) = 1$$

$$-x^2 + 12x - 27 = 1$$

$$-x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-28) = 32$$

$$x = \frac{-12 + \sqrt{32}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-12 - \sqrt{32}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc $6 - 2\sqrt{2}$ et $6 + 2\sqrt{2}$ car elles appartiennent bien à l'ensemble de définition $]3 ; 9[$.

b) Ensemble de définition :

$$3-x > 0 \text{ et } x+1 > 0$$

$$\text{Soit : } x < 3 \text{ et } x > -1$$

L'inéquation est définie sur $] -1 ; 3 [$.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(3-x) - \ln(x+1) \leq 0$$

$$\ln(3-x) \leq \ln(x+1)$$

$$3-x \leq x+1$$

$$2 \leq 2x$$

$$1 \leq x$$

L'ensemble solution est donc $] -1 ; 3 [\cap [1 ; +\infty [$ soit $[1 ; 3 [$.