

Test de rentrée : Harmonisation – 1^{er} chapitre : Les vecteurs

Calculatrice non autorisée pour ce test - Répondez aux questions dans le temps imparti (environ 30 minutes), passez votre test à votre voisin ou votre voisine qui va le corriger, après la correction, faites le point sur les notions que vous devez revoir.

Question 1 : Vecteurs, équation du premier degré, calculer avec des fractions :

On donne deux points du plan $A(x; \frac{3}{2})$ et $B(\frac{1}{4}; y)$, déterminer x et y tels que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$

Les résultats sont attendus sous forme de fractions irréductibles.

Solution 1 : On utilise $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

L'énoncé nous donne $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$, on sait aussi que $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - x \\ y - \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, il vient $\begin{cases} \frac{1}{10} = \frac{1}{4} - x \\ -\frac{1}{10} = y - \frac{3}{2} \end{cases}$ d'où :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{5}{20} - \frac{2}{20} = \frac{3}{20} \\ y = -\frac{1}{10} + \frac{3}{2} = -\frac{1}{10} + \frac{15}{10} = \frac{14}{10} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

Réponse : $x = \frac{3}{20}$ et $y = \frac{7}{5}$ (0.5 points par bonne réponse)

Question 2 : Milieu, résoudre un système d'équations :

On donne $A(a + b; -1)$ et $B(2; ab)$ déterminer a et b tels que O soit le milieu du segment $[AB]$

Solution 2 : On utilise les coordonnées du milieu $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$, du segment $[AB]$.

L'énoncé nous donne $O(0; 0)$ milieu du segment $[AB]$, on sait aussi que :

$$O \left(\frac{1}{2}(a + b + 2); \frac{1}{2}(-1 + ab) \right), \text{ il vient } \begin{cases} 0 = \frac{1}{2}(a + b + 2) \\ 0 = \frac{1}{2}(-1 + ab) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} a + b = -2 \\ ab = 1 \end{cases} \begin{cases} a = -2 - b \\ (-2 - b)b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2 - b \\ -2b - b^2 - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} a = -2 + 1 \text{ d'où } a = -1 \\ -(b + 1)^2 = 0 \text{ d'où } b = -1 \end{cases}$$

Réponse : $a = -1$ et $b = -1$ (0.5 points par bonne réponse)

Question 3 : Norme d'un vecteur :

On donne $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

Solution 3 : On utilise $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_{\overrightarrow{AB}})^2 + (y_{\overrightarrow{AB}})^2}$ il vient $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Réponse : $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$ (1 point pour la bonne réponse)

Question 4 : Produit scalaire :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 3$

Déterminer $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$

Solution 4 :

On développe l'expression donnée : $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} - 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v} \cdot \vec{v}$

Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, il vient

$$(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} - 4\vec{u} \cdot \vec{v} + 3\vec{v} \cdot \vec{u} - 6\vec{v} \cdot \vec{v} = 2\|\vec{u}\|^2 - 6\|\vec{v}\|^2 = 2 \times 2^2 - 6 \times 3^2 = -46$$

Réponse : $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v}) = -46$ (1 point pour la bonne réponse)

Question 5 : Colinéarité

On donne les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 4,2 \\ -6,3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 5 \\ 7,4 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$?

Solution 5 :

Méthode 1 :

Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$: On sait que deux vecteurs sont colinéaires s'il existe un nombre réel non nul k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ il vient :

$$\begin{cases} -2 = 4,2k \text{ d'où } k = -\frac{2}{4,2} = -\frac{1}{2,1} = -\frac{10}{21} \\ 3 = -6,3k \text{ d'où } k = -\frac{3}{6,3} = -\frac{1}{2,1} = -\frac{10}{21} \end{cases} \text{ On conclut que les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

Pour $\vec{u}$ et $\vec{w}$: $\begin{cases} -2 = 5k \text{ d'où } k = -\frac{2}{5} \\ 3 = 7,4k \text{ d'où } k = \frac{3}{7,4} = \frac{15}{37} \end{cases}$ on conclut que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

Méthode 2 : On utilise le calcul des déterminants, on sait que les vecteurs sont colinéaires si le déterminant est nul.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 4,2 \\ 3 & -6,3 \end{vmatrix} = (-2) \times (-6,3) - 3 \times 4,2 = 12,6 - 12,6 = 0 \text{ on conclut que les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\det(\vec{u}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 7,4 \end{vmatrix} = (-2) \times 7,4 - 3 \times 5 = -14,8 - 15 = -29,8 \neq 0 \text{ on conclut que les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ ne sont pas colinéaires.}$$

Réponse : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires (0.5 points par bonne réponse)

Question 6 : Orthogonalité

On donne deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

Solution 6 :

On sait que $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} + z_{\vec{u}}z_{\vec{v}}$ et que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire est nul, on calcule $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 3 + 1 = 0$ on conclut que les vecteurs sont orthogonaux.

(1 point si la réponse est justifiée)

Question 7 : Déterminant

On donne les points $A(1 ; 3)$, $B(3 ; 4)$ et $C(4 ; 5)$.

Quel est le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

Solution 7 : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

Réponse : 1 (1 point pour la bonne réponse)

Question 8 : Gradient : On rappelle que $\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

On rappelle aussi que pour calculer une dérivée partielle par rapport à une variable on considère que toutes les autres sont des constantes et on dérive alors par rapport à la variable qui nous intéresse comme on a l'habitude.

On donne la fonction $f(x, y, z)$ définie par $f(x, y, z) = 2x^2(y - z^3)$

Calculer le gradient de la fonction f .

Solution 8 : On applique la formule rappelée, il vient :

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 4x(y - z^3)$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = 2x^2$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = -3z^2 \times 2x^2 = -6x^2z^2$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x(y - z^3) \\ 2x^2 \\ -6x^2 z^2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = 4x(y - z^3)\vec{i} + 2x^2\vec{j} - 6x^2 z^2\vec{k}$$

(1 point pour la bonne réponse)

Question 9 : Divergence

On rappelle que : $\text{div}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ avec $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$

On rappelle aussi que pour calculer une dérivée partielle par rapport à une variable on considère que toutes les autres sont des constantes et on dérive alors par rapport à la variable qui nous intéresse comme on a l'habitude.

On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 3x - 2z \\ 8x^2 - 9\sqrt{y} + 3yz \\ 7x - 2y^3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{div}(\vec{u})$.

Solution 9 :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 3; \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{9}{2\sqrt{y}} + 3z \text{ et } \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{Il vient } \text{div}(\vec{u}) = 3 - \frac{9}{2\sqrt{y}} + 3z.$$

(1 point pour la bonne réponse)

Question 10 : Rotationnel

On rappelle que

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{u}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

On rappelle aussi que pour calculer une dérivée partielle par rapport à une variable on considère que toutes les autres sont des constantes et on dérive alors par rapport à la variable qui nous intéresse comme on a l'habitude.

On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 3xy - 5z \\ xz^2 - 2y^3 \\ x + 3e^z \end{pmatrix}$.

Déterminer $\overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{u})$.

Solution 10 :

On applique la formule rappelée, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} &= 0 - 2xz \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} &= -5 - 1 = -6 \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} &= z^2 - 3x \\ \overrightarrow{\text{Rot}}(\vec{u}) &= \begin{pmatrix} -2xz \\ -6 \\ z^2 - 3x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1 point pour la bonne réponse)