

Les vecteurs :

1^{ière} Partie : Vecteurs du plan

Rappels de géométrie plane

Notions de vecteur

Vecteurs et coordonnées

Vecteurs égaux

Addition de vecteurs

Multiplication par un scalaire

Vecteurs colinéaires

Décomposition d'un vecteur

Produit scalaire

Orthogonalité

Projection orthogonale

2^{nde} Partie : Vecteurs de l'espace

Définitions et propriétés

Combinaison linéaire de vecteurs

Plan de l'espace

Droites de l'espace

Colinéarité de deux vecteurs dans une base donnée de l'espace

Produit scalaire et orthogonalité

3^{ème} Partie : Analyse vectorielle

Gradient

Divergence

Rotationnel

Laplaciens scalaire et vectoriel

Formules d'analyse vectorielle

I. VECTEURS DU PLAN

1) Quelques rappels de géométrie plane :

1.1 Repères et coordonnées :

Définition : Définir un repère du plan, c'est choisir trois points non alignés dans un ordre précis O, I, J.

On note (O ; I ; J) ce repère. Le point O est l'origine du repère, la droite (OI) est l'axe des abscisses et le point I donne l'unité sur cet axe. La droite (OJ) est l'axe des ordonnées et le point J donne l'unité sur cet axe.

Exemple : Faites un schéma

Remarques :

- Si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère (O ; I ; J) est orthogonal. (Faites le schéma)
- Si le triangle OIJ est isocèle en O, le repère est normé. (Faites le schéma)
- Si le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O, le repère (O, i, j) est orthonormé. (Faites le schéma)

Définition : On considère un repère (O ; I ; J) et un point quelconque M. En traçant la parallèle à la droite (OJ) passant par M, on obtient sur l'axe (OI) l'abscisse x_M du point M. En traçant la parallèle à (OI) passant par M, on obtient sur l'axe (OJ) l'ordonnée y_M du point M. Le couple des réels $(x_M; y_M)$ est le couple de coordonnées du point M dans le repère (O ; I ; J).

Exemple : Faites un schéma

1.2 Milieux et distances dans un repère du plan :

Propriété : On considère dans le plan muni d'un repère (O ; I ; J) les points A ($x_A; y_A$) et B ($x_B; y_B$). Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$

Démonstration :

1^{er} cas : $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$

Faites un schéma

Considérons dans cette démonstration par exemple que $y_A = y_B$ et que $x_B > x_A$.

I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si I appartient à $[AB]$ et $IA = IB$

C'est-à-dire $x_I - x_A = x_B - x_I$ soit $2x_I = x_A + x_B$ donc $x_I = \frac{x_A+x_B}{2}$

Et $y_I - y_A = y_B - y_I$ soit $2y_I = y_A + y_B$, comme $y_A = y_B$ il vient $y_I = y_A = y_B$

2nd cas : $x_A \neq x_B$ et $y_A \neq y_B$

Faites un schéma

Notons C le point tel que $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$

Le triangle ABC est rectangle en C. Notons K le milieu de $[AC]$, d'après le théorème de la droite des milieux, $(IK) \parallel (BC)$ d'où

$$x_I = x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Notons L le milieu de $[BC]$, d'après le théorème de la droite des milieux, $(IL) \parallel (AC)$ d'où

$$y_I = y_L = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Rappel : Théorème de la droite des milieux :

Premier théorème des milieux : Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.

Deuxième théorème des milieux : Dans un triangle, la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est égale à la moitié de celle du troisième côté.

Propriété : On considère dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. La distance entre les points A et B est :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Démonstration :

On suppose que $x_B > x_A$ et $y_B > y_A$. Faites un schéma.

Notons C le point tel que $x_C = x_B$ et $y_C = y_A$

Dans le triangle ABC rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\text{C'est-à-dire } AB^2 = (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2$$

$$\text{Il vient : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Rappel du théorème de Pythagore : Le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés. (Dans un triangle rectangle l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit).

2) Notions de vecteurs

Définition :

Un vecteur non nul est défini par la donnée de sa direction, de son sens et de la longueur.

A et B étant deux points de l'espace, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $\overrightarrow{AB}$. Le point A est son origine et le point B est son extrémité.

Si $A = B$, $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul noté $\vec{0}$. Il a une longueur nulle, mais n'a ni direction, ni sens.

Définition : Soient A et B deux points distincts du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- Sa direction : celle de la droite (AB)
- Son sens : celui de A vers B
- Sa norme : la distance AB notée $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

Remarque : Lorsque A et B sont confondus, on note $\overrightarrow{AA}$, c'est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

Définition :

Soient A et B deux points donnés du plan.

- La **translation qui transforme A en B**, associe à tout point M l'unique point N tel que les segments $[AN]$ et $[BM]$ ont le même milieu, c'est-à-dire que ABNM est un parallélogramme (éventuellement aplati si C appartient à (AB)). Faites le schéma
- A cette translation, on associe le **vecteur $\overrightarrow{AB}$** qui symbolise le déplacement de A vers B ou de M vers N. On le représente par une flèche allant de A jusqu'à B. Faites le schéma

Définitions :

- Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur noté $-\overrightarrow{AB}$ associé à la translation qui transforme B en A.
- La translation qui transforme A en A est la translation de vecteur nul, on note $\vec{0}$.

Conséquence :

- Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$. Donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.

Exemple : Faites un schéma.

Caractérisation du milieu :

Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

3) Vecteurs et coordonnées

(O ; I ; J) est un repère du plan et $\vec{u}$ est un vecteur donné. La translation de vecteur $\vec{u}$ associe au point O un unique point M. On sait que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. (On peut désigner un vecteur par une seule lettre)

Définition : On appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point M dans le repère (O ; I ; J). On note $M(x; y)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Notation : On note respectivement $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$. Le repère (O ; I ; J) se note aussi (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Propriété : Soit A et B deux points du plan.

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Démonstration :

Il existe un unique point $M(x_M; y_M)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les coordonnées du point M.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, donc les segments $[AM]$ et $[OB]$ ont le même milieu.

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_M}{2} = \frac{0 + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_M}{2} = \frac{0 + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_M \\ y_B - y_A = y_M \end{cases} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Exemple : Prendre les coordonnées d'un point A et d'un point B et déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriétés :

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a :

- $\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$
- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$
- Pour tout k réel, $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Propriété :

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on a :

- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$
- Si le repère est orthonormé alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exemple : Prendre deux points A et B de coordonnées quelconque et déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées du milieu du segment $[AB]$, ainsi que la distance AB.

4) Vecteurs égaux

Définition : Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont **égaux** signifie que la translation qui transforme A en B, associe au point M le point N. On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

Propriété : Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont égaux, si et seulement si, le quadrilatère ABNM est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Exemple : Faites un schéma.

Représentants d'un vecteur : Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, alors on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur que l'on peut noter $\vec{u}$.

Exemple : Faites un schéma.

Remarque : un vecteur admet une infinité de représentants.

Propriété : Deux vecteurs sont égaux si et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées dans un repère. Autrement dit, dans un repère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Démonstration :

La translation de vecteur $\vec{u}$ associe au point O le point M

La translation de vecteur $\vec{v}$ associe au point O le point M'

Ainsi $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si M et M' sont confondus ($\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$), c'est-à-dire M et M' ont les mêmes coordonnées, ou encore autrement dit si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées.

Définition : Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Conséquence : dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ est équivalent à dire que ABCD est un parallélogramme.

Remarque : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow [AC] \text{ et } [BD] \text{ ont le même milieu.}$

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur $\vec{u}$ et on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$. Les vecteur $\vec{u}$ possède une infinité de représentants.

- Un point O étant fixé, il existe un unique représentant de tout vecteur $\vec{u}$ d'origine O, c'est-à-dire qu'il existe un unique point M de l'espace tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

5) Addition de vecteurs

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$, on note $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Caractérisation du milieu :

I est le milieu du segment $[AB]$, si et seulement si, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Caractérisation du centre de gravité :

G est le centre de gravité du triangle ABC si et seulement si $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Rappel : le centre de gravité G d'un triangle est le point d'intersection des médianes, il se situe au $\frac{2}{3}$ de la médiane en partant du sommet.

Remarque : En physique, le centre de gravité est le point d'application de la résultante des forces de gravité ou de pesanteur. Il est dépendant du champ de gravitation auquel le corps est soumis et ne peut être strictement confondu avec le centre d'inertie qui est le barycentre des masses.

Propriété : Dans un repère, on donne les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

Démonstration :

Il existe un unique point $P(x; y)$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ et il existe un unique point $Q(x'; y')$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$.

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OM}$, où OPMQ est un parallélogramme.

Les segments $[PQ]$ et $[OM]$ ont le même milieu.

$$\begin{cases} \frac{x+x'}{2} = \frac{0+x_M}{2} \\ \frac{y+y'}{2} = \frac{0+y_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x + x' \\ y_M = y + y' \end{cases} \text{ donc } \vec{u} + \vec{v} \left(\begin{smallmatrix} x+x' \\ y+y' \end{smallmatrix} \right).$$

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

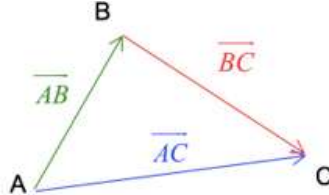
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan dont on connaît deux représentants $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est alors défini par le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Faire un schéma.

Propriété : Relation de Chasles :

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Exemple : Ecrire le plus simplement possible les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} =$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC} =$$

Construction géométrique :

Pour construire géométriquement la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on dispose « bout à bout » le représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ et le représentant $\overrightarrow{BC}$ de $\vec{v}$.

Exemple : Faire un schéma.

Propriété : Règle du parallélogramme :

Soient A, B et C trois points distincts du plan. La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$, où D est le point tel que ABDC soit un parallélogramme.

Construction géométrique :

Pour construire géométriquement la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on choisit des représentants $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ de $\vec{v}$ de même origine. La somme $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ tel que ABDC soit un parallélogramme.

Exemple : Faire un schéma.

6) Vecteurs $k\vec{u}$

Définition : Soit k un réel et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Propriété :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur non nul et k est un nombre réel. Le point C tel que $k\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ est tel que :

- Si $k > 0$, C appartient à $[AB)$ et $AC = kAB$
- Si $k < 0$, C est aligné avec A et B , mais C n'appartient pas à $[AB)$ et $AC = -kAB$

Définition : $k\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{CD}$, on note $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ tel que :

- $(AB) \parallel (CD)$
- Si $k > 0$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens et $CD = kAB$
- Si $k < 0$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires et $CD = -kAB$

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.

Propriétés :

Soient deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et soient deux réels k et k' .

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$$

$$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

$$k\vec{u} = \vec{0} \text{ si et seulement si } k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}$$

Exemple : Si $-2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ alors $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, car $-2 \neq 0$. Donc $A = B$.

7) Vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs sont colinéaires si l'un au moins des vecteurs est nul ou s'ils ont la même direction dans le cas où ils sont tous les deux non nuls.

Définitions :

- Deux vecteurs du plan $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** si et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Autrement dit, dire que deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction.

Caractérisation du milieu :

I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Propriétés :

Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux du plan.

- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **colinéaires**.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **colinéaires**.

On a donc les équivalences suivantes :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ (AB) et (CD) sont parallèles $\Leftrightarrow$ Il existe un nombre k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.

Exemples :

- Obtenir un parallélisme : A, B, C et D sont des points deux à deux distincts du plan tels que $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD} = \vec{0}$
 $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ (AB) et (CD) sont parallèles
- Obtenir un alignement : A, B et C sont des points deux à deux distincts du plan tels que $-4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BC} = \vec{0}$
 $\overrightarrow{AB} = \frac{5}{4}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ Les points A, B et C sont alignés.

Théorème : (Vecteurs colinéaires) Dans un plan, dire que les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à dire que $xy' - yx' = 0$

Autrement dit les vecteurs sont proportionnels.

Démonstration :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (ou $\vec{u} = k'\vec{v}$)

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{x'}{x} \\ y' = \frac{x'}{x}y \end{cases} \Leftrightarrow xy' - yx' = 0$$

Exemple : Montrer que $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Déterminant de deux vecteurs :

Définition : Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$), le nombre $xy' - yx'$ est appelé le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Propriété : Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

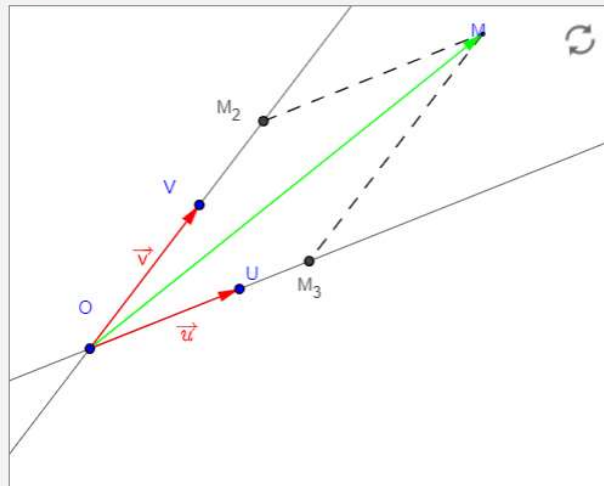
8) Décomposition d'un vecteur

Théorème : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Pour tout vecteur $\vec{w}$ il existe un unique couple de nombres réels $(a; b)$ tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Démonstration :

- Existence de la décomposition :**

On note O un point du plan. U, V et M sont les points tels que $\vec{OM} = \vec{w}$, $\vec{OU} = \vec{u}$, et $\vec{OV} = \vec{v}$.



Déplacer le point M

La parallèle à (OV) passant par M coupe la droite (OU) en M_1 , et la parallèle à (OU) passant par M coupe la droite (OV) en M_2 .

OM_1MM_2 est un parallélogramme, donc $\vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2}$ (1).

Les vecteurs $\vec{OM_1}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, et $\vec{u} \neq \vec{0}$, donc il existe a tel que $\vec{OM_1} = a\vec{u}$. De même, $\vec{OM_2} = b\vec{v}$.

Finalement, (1) s'écrit $\vec{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, et donc $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

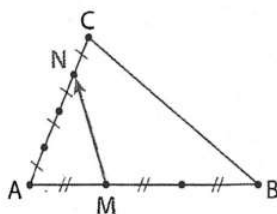
- Unicité de la décomposition :**

Supposons que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$.

Alors $a\vec{u} - a'\vec{u} = b'\vec{v} - b\vec{v}$. Ainsi, $(a - a')\vec{u} = (b - b')\vec{v}$.

Or, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc il est nécessaire que $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$, donc que $a = a'$ et $b = b'$, ce qui prouve l'unicité de la décomposition.

Exemple :



Exprimer $\vec{MN}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ($\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{AB}$)

Corollaire : Soient A, B et C trois points non alignés, alors pour tout point M, il existe un unique couple de nombres réels $(x; y)$ tels que $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, ce couple est le couple de coordonnées du vecteur $\vec{AM}$ dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$.

Exemple : (rappel dans un triangle le centre de gravité est l'intersection des médianes, il se situe au $\frac{2}{3}$ en partant du sommet)

Dans un triangle ABC, on appelle I le milieu de [BC] et G le centre de gravité.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc forment une base. Ainsi, tout vecteur $\vec{u}$ peut s'exprimer en fonction de ces deux vecteurs.

Par exemple :

$$\bullet \quad \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{En effet, } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}.$$

$$\text{Or, I est le milieu de [BC], donc } \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

$$\text{Donc, } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} \text{ et } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{En effet, } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).$$

$$\text{Soit : } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

9) Produit scalaire

Dans cette partie on se place dans un repère orthonormé.

Définition : Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé, on appelle produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le réel $xx' + yy'$. On note $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Cas particulier : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$ (lire carré scalaire)

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Remarque : si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$

Exemple : Prendre trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ et déterminer $\vec{u}^2, \vec{u} \cdot \vec{v}, \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

Propriétés : Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs, on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie)
- $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (linéarité)
- Pour $k \in \mathbb{R}, (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

Démonstrations : C'est facile on prend les coordonnées des vecteurs et on calcule séparément les deux membres des égalités.

Remarque : les identités remarquables sont applicables au produit scalaire.

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Pour le montrer c'est facile on développe. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \dots$

Seconde expression du produit scalaire :

Définition : Si $\vec{u}$ a pour représentant $\overrightarrow{AB}$, on définit la norme de $\vec{u}$ par $\|\vec{u}\| = AB$ (longueur du segment [AB]).

Propriétés : Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dans un repère orthonormé, on a alors :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, en particulier $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$, en particulier $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$

Propriété : Seconde expression du produit scalaire : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\text{Ou } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Démonstration :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\text{d'où } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\text{d'où } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Expression générale du produit scalaire :

Définition : Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) \text{ où } (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est l'angle orienté entre les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v}.$$

Cercle :

Propriété : Le cercle défini par son diamètre : Soit A et B deux points distincts : M appartient au cercle de diamètre le segment [AB] $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Démonstration : ($\Rightarrow$) Si M appartient au cercle de diamètre le segment [AB], le triangle AMB est rectangle en M donc (MA) et (MB) sont perpendiculaires, donc les vecteurs sont orthogonaux, donc le produit scalaire est nul.

Réciproquement : ($\Leftarrow$) Si le produit scalaire est nul, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, donc le triangle AMB est rectangle en M, donc le point M appartient au cercle de diamètre le segment [AB]. (cercle circonscrit au triangle AMB).

Rappels : Si un triangle est rectangle, alors il peut être inscrit dans un cercle ayant pour diamètre son hypoténuse et réciproquement : si le cercle circonscrit à un triangle AMB a pour diamètre le côté [AB], alors le triangle AMB est rectangle en M.

Propriété : cercle défini par son centre et son rayon : Soit le point $\Omega(\alpha; \beta)$ dans un repère orthonormal et $R > 0$.

Le cercle de centre Ω et de rayon R admet pour équation $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$

Réciproquement : L'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ est le cercle de centre $\Omega(\alpha; \beta)$ et de rayon R .

Démonstration : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A}) \cdot (\overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega B})$

$$= \overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{M\Omega} \cdot \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B}$$

$$M\Omega^2 + \overrightarrow{M\Omega} \cdot (\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B}) + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B} \text{ Or } \Omega \text{ est le milieu du segment } [AB] \text{ donc } \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\Omega A} = -\overrightarrow{\Omega B} \text{ d'où } \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B} = -\overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega A} = -\Omega A^2$$

$$M\Omega^2 + \overrightarrow{M\Omega} \cdot (\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B}) + \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega B} = M\Omega^2 + \overrightarrow{M\Omega} \cdot \vec{0} - \Omega A^2$$

$$\text{Il vient } M\Omega^2 - \Omega A^2 = 0$$

$$\text{Soit } (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 - R^2 = 0$$

$$\text{Ou encore } (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

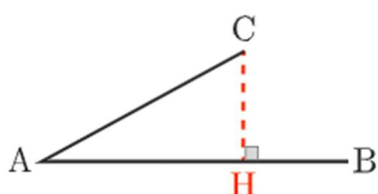
Exemple : Déterminer l'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 12 = 0$

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 + 12 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - 1 = 0 \text{ d'où cercle de centre } \Omega(-2; 3) \text{ et de rayon } 1.$$

Formule du projeté orthogonal :

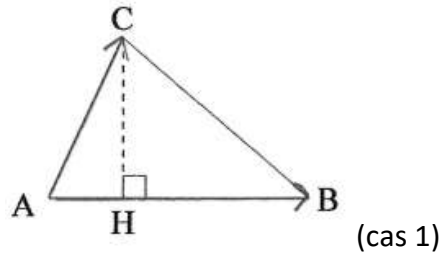
Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan, et H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$



Démonstration : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$ or $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

Cas particulier : Cette propriété permet de souligner deux configurations particulières quand $H \in (AB)$.

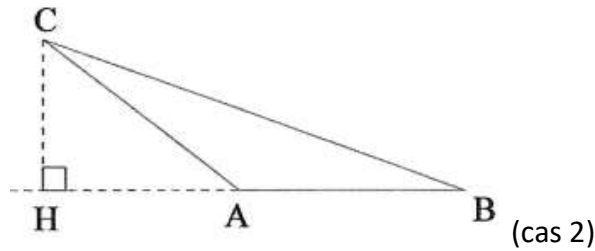
Si $H \in [AB]$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} \text{ or } \overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB} \text{ avec } k > 0, \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (k\overrightarrow{AB}) = k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = kAB^2 = AB \times AH$$

Si $H \notin [AB]$ alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} \text{ or } \overrightarrow{AH} = -k\overrightarrow{AB} \text{ avec } k > 0, \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (-k\overrightarrow{AB}) = -k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -kAB^2 = -AB \times AH$$

Propriété : Soient A, B et C trois points distincts du plan,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Démonstration : Cas 1 : Dans le triangle ACH rectangle en H on a

$$\cos(\hat{A}) = \frac{AH}{AC} \text{ soit } AH = AC \times \cos(\theta) \text{ donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = AB \times AC \times \cos(\theta)$$

Cas 2 : Dans le triangle ACH rectangle en H on a

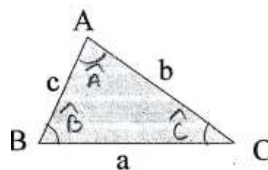
$$\cos(\pi - \theta) = \frac{AH}{AC} \text{ soit } AH = AC \times \cos(\pi - \theta)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -AB \times AC \times \cos(\pi - \theta) = AB \times AC \times \cos(\theta)$$

Relation métrique dans le triangle :

ABC est un triangle. Selon l'usage, on note $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$ et $\hat{A} = \widehat{BAC}$,

$\hat{B} = \widehat{CBA}$ et $\hat{C} = \widehat{ACB}$



Théorème : Relation d'Al Kashi : Avec les notations usuelles on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\hat{A})$$

$$\text{De même on obtient : } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \cos(\hat{B})$$

$$\text{et } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos(\hat{C})$$

Démonstration : On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

On a aussi $CB = a$, $CB^2 = a^2$

$$a^2 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} \text{ et } \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$$

$$(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA})^2 = CA^2 + BA^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} = CA^2 + BA^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Il vient } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\hat{A})$$

Remarque : Parfois, on parle aussi de « théorème de Pythagore généralisé à un triangle quelconque ». En effet si par exemple le triangle est rectangle en A, on a $\hat{A} = 90^\circ$ donc $\cos(\hat{A}) = 0$, il vient $a^2 = b^2 + c^2$

Théorème : Le théorème de la médiane :

$$\text{Soit ABC un triangle et I le milieu du segment [BC], alors : } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\textbf{Démonstration} : \text{ On a } AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2$$

$$= AI^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2 + AI^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} + IC^2$$

$$= 2AI^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 \text{ et comme I est le milieu du segment [BC] on a}$$

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \text{ d'où } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Trigonométrie :

Formules d'addition : Quels que soient les réels a et b , on a :

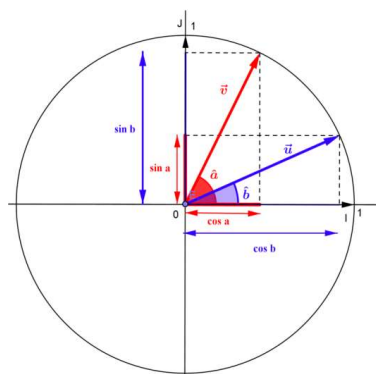
$$\cos(a - b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \times \cos b + \sin b \times \cos a$$

Démonstration :



$$\vec{u}^{(\cos b)}_{(\sin b)} \text{ et } \vec{v}^{(\cos a)}_{(\sin a)}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$

$$\text{On a aussi : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \times 1 \times \cos(a - b)$$

$$\text{D'où } \cos(a - b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$$

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a - (-b)) = \cos a \times \cos(-b) + \sin a \times \sin(-b) = \cos(a + b) \\ &= \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(a - b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \times \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \times \sin b \end{aligned}$$

$$\text{Or } \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \quad \text{et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\text{Il vient : } \sin(a - b) = \sin a \times \cos b - \cos a \times \sin b$$

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \sin(a - (-b)) \\ &= \sin a \times \cos(-b) - \cos a \times \sin(-b) = \sin a \times \cos b + \sin b \times \cos a \end{aligned}$$

Formules de duplication : Quel que soit le réel a , on a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\text{et } \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$$

$$\text{et } \cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\text{et } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

10) Orthogonalité

Définition : On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur direction sont perpendiculaires.

Propriété : Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs, on a :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

Démonstration :

1^{er} cas si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, alors on convient que le vecteur nul est orthogonal à l'autre vecteur.

2nd cas Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Soient M et N les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$

$$\vec{u} \text{ orthogonal à } \vec{v} \Leftrightarrow (OM) \perp (ON) \Leftrightarrow OM^2 + ON^2 = MN^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$$

$$\Leftrightarrow -2xx' - 2yy' = 0$$

$$\Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Exemple : On donne A(1 ;1), B(-4 ;1), C(-1 ;0) et D(-2 ;-3) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ puis montrer que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Définition : On appelle vecteur normal à une droite tout vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.

Propriété : Dans un repère orthonormé, soient a et b deux réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ alors toute droite ayant une équation cartésienne de type $ax + by + c = 0$ admet le

vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Réciproquement, toute droite ayant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$

Démonstration :

Soient a et b deux réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ et soit D la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, cette droite admet pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

Démo vecteur directeur : $ax + by + c = 0$ si $x = 0, y = -\frac{c}{b}$ et si $x = 1, y = -\frac{a+c}{b}$ nommons A et B ces deux points appartenant à la droite D .

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{v} = -b\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de la droite D .

On cherche un vecteur normal, c'est à dire orthogonal, c'est à dire tel que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ d'où $-bx_{\vec{n}} + ay_{\vec{n}} = 0$ d'où $x_{\vec{n}} = a$ et $y_{\vec{n}} = b$, donc $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Donc la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si la droite admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, par définition $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{v}$, c'est à dire tel que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ d'où $ax_{\vec{v}} + by_{\vec{v}} = 0$ d'où $x_{\vec{v}} = -b$ et $y_{\vec{v}} = a$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de la droite D .

Soit $M(x; y)$ appartenant à la droite $D \Leftrightarrow$

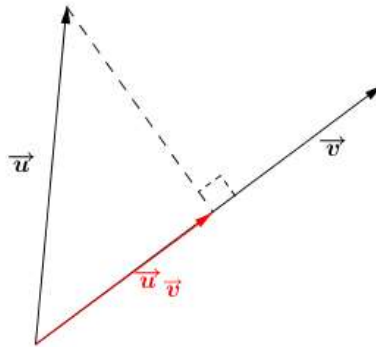
$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, avec la point A appartenant à la droite D .

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ colinéaires $\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ on développe

Donc la droite admet une équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$.

11) Projection orthogonale

Définition : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on appelle projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ le vecteur $\vec{u}_{\vec{v}}$, tel que l'origine du vecteur $\vec{u}_{\vec{v}}$ est la même que celle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et l'extrémité du vecteur $\vec{u}_{\vec{v}}$ coïncide avec la perpendiculaire issue de l'extrémité de $\vec{u}$.

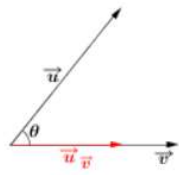
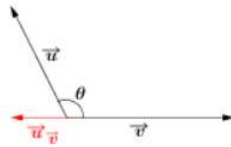
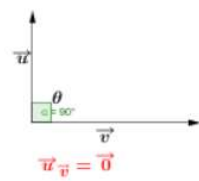


Le mot orthogonal signifie que la projection se fait à 90° .

$\vec{u}_{\vec{v}}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

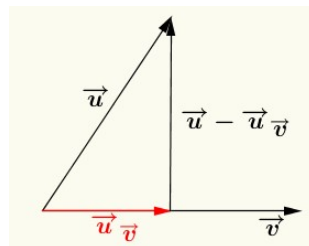
La projection d'un vecteur nul n'est pas possible.

Les cas possibles :

Angle aigu	
Angle obtus	
Angle droit	

Propriété : (La composante de la projection orthogonale d'un vecteur) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a $\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$

Démonstration :



$\vec{u}_{\vec{v}}$ et $\vec{v}$ ont la même direction donc on a $\vec{u}_{\vec{v}} = k\vec{v}$

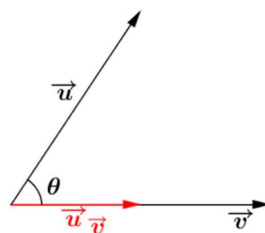
On a aussi $(\vec{u} - \vec{u}_{\vec{v}})$ orthogonal à $\vec{v}$ donc le produit scalaire est nul $(\vec{u} - \vec{u}_{\vec{v}}) \cdot \vec{v} = 0$ on distribue, il vient $\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u}_{\vec{v}} \cdot \vec{v} = 0$, de plus $\vec{u}_{\vec{v}} = k\vec{v}$, il vient $\vec{u} \cdot \vec{v} - k\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$

Donc $k = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$, donc $\vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$.

Propriété : (La norme de la projection orthogonale d'un vecteur)

$$\|\vec{u}_{\vec{v}}\| = \|\vec{u}\| \times \cos(\theta)$$

Où $\vec{u}_{\vec{v}}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ et θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



II. VECTEURS DE L'ESPACE

1) Définitions et propriétés

Définitions :

- Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarque : Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : Relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, ... restent valides.

- Des vecteurs sont dits coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

- On dit qu'un triplet de vecteur $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base des vecteurs de l'espace si les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

- Soient O, A, B et C quatre points de l'espace non coplanaires, le triplet de vecteurs $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ est une base des vecteurs de l'espace.

- Soit O un point de l'espace et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de vecteurs de l'espace, le quadruplet $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est appelé repère de l'espace.

- Soit $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un repère de l'espace et M un point quelconque de l'espace, on appelle coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, les coordonnées du vecteur $\vec{OM}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Propriété :

- Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base des vecteurs de l'espace, tout vecteur de l'espace s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de base.

- Si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base des vecteurs de l'espace, quel que soit le vecteur $\vec{x}$ de l'espace, il existe un unique triplet (α, β, γ) de réels tels que : $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ et le triplet (α, β, γ) est appelé coordonnées du vecteur $\vec{x}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Démonstration :

Existence : Soit $\vec{AB}$ un représentant de $\vec{x}$.

Soit P le plan de repère $(A; \vec{u}; \vec{v})$

Si B appartient à P alors $\vec{AB}$ se décompose suivant les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Supposons que B n'appartient pas à P.

Soit d la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{w}$.

Comme $\vec{w}$ n'est pas colinéaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la droite d coupe le plan P en un point C.

On a $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$.

Avec $\vec{AC}$ qui appartient au plan P donc il existe un couple $(\alpha; \beta)$ tel que $\vec{AC} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

Et $\vec{CB}$ est colinéaire avec $\vec{w}$ donc il existe un réel tel que $\vec{CB} = \gamma\vec{w}$.

Il existe donc un triplet $(\alpha; \beta; \gamma)$ tel que $\vec{AB} = \vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$

Unicité : Supposons que l'on est $\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w}$

Alors $(\alpha - \alpha')\vec{u} + (\beta - \beta')\vec{v} + (\gamma - \gamma')\vec{w} = \vec{0}$

Supposons que l'une des trois différences n'est pas nulle, par exemple $\gamma - \gamma' \neq 0$

On aurait $\vec{w} = \frac{\alpha' - \alpha}{\gamma - \gamma'} \vec{u} + \frac{\beta' - \beta}{\gamma - \gamma'} \vec{v}$ ce qui indiquerait que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ce qui est exclu par hypothèse. Donc les trois différences sont nulles. Donc il existe un unique triplet (α, β, γ) de réels tels que : $\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$

Propriété : Soient A et B deux points distincts de l'espace :

Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Démonstration : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ (relation de Chasles)

Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, et $\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$

Il vient $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ d'où $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

Coordonnées du milieu I de [AB] :

$$I \begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \\ \frac{z_A + z_B}{2} \end{pmatrix}$$

Norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ si le repère est orthonormal :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

2) Combinaison linéaire de vecteurs :

Définition : Combinaison linéaire de vecteurs :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$, n vecteurs de l'espace, on appelle combinaison linéaire de ces vecteurs tout vecteur $\vec{x}$ s'écrivant :

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{u}_i \text{ où } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ sont } n \text{ réels quelconques.}$$

3) Plan de l'espace : il est défini par un point et deux vecteurs

Définition :

Si A, B et C sont trois points de l'espace non alignés, il existe un plan et un seul passant par les points A, B et C, on le note (ABC).

Le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est appelé couple de vecteurs directeur du plan (ABC).

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ sont d'autres couples de vecteurs directeurs du plan (ABC).

Le couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ détermine la direction du plan (ABC).

Tout couple de vecteurs non colinéaires, combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, est aussi un couple de vecteurs directeur du plan (ABC).

Caractérisation d'un plan : (Propriété)

Si A est un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace non colinéaires, il existe un plan et un seul passant par le point A et ayant le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ comme couple de vecteurs directeurs, on le note $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Le plan $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un couple (λ, μ) de réels vérifiant $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Démonstration :

Soient B et C deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan (ABC)

Dans ce repère, tout point M de coordonnées $(\lambda; \mu)$ est tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Réciproquement : Soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.

Soit N un point du plan (ABC) de coordonnées $(\lambda; \mu)$ dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$. On a alors $\overrightarrow{AN} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ et donc $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$. Les points M et N sont confondus donc M appartient au plan (ABC) .

Remarque : Un plan est totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Equations cartésiennes et représentations paramétriques d'un plan de l'espace :

On a vu qu'un plan est totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires, mais il peut être aussi défini par un point et un vecteur qui est normal à ce plan.

Soit $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ un point donné du plan et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan, n'importe quel point M du plan doit vérifier $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, il vient alors :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

$$ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0 \text{ en posant } d = -(ax_A + by_A + cz_A) \text{ il vient :}$$

$ax + by + cz + d = 0$ c'est l'équation cartésienne du plan.

Soit P un plan et A, B et C trois points non alignés donnés de ce plan. Les vecteurs $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ ne sont pas colinéaires, (car les points ne sont pas alignés), n'importe quel point M du plan doit vérifier $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$, il vient alors :

$$\begin{cases} x - x_A = t(x_B - x_A) + t'(x_C - x_A) \\ y - y_A = t(y_B - y_A) + t'(y_C - y_A) \\ z - z_A = t(z_B - z_A) + t'(z_C - z_A) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + tx_u + t'x_v \\ y = y_A + ty_u + t'y_v \\ z = z_A + tz_u + t'z_v \end{cases} \text{ (avec } t, t' \in \mathbb{R}) \text{ est une représentation paramétrique du plan P}$$

de l'espace, avec A un point appartenant au plan P et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui sont deux vecteurs directeur du plan P.

Propriété : Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Démonstration :

Soient deux plans P et P' ayant pour repères respectifs $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $(B; \vec{u}, \vec{v})$

Si P et P' sont confondus, c'est évident.

Si P et P' ne sont pas confondus. Supposons que P et P' possède un point M en commun.

Alors dans P, on a : $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où $(\lambda; \mu)$ sont les coordonnées du point M dans le plan P.

Et dans P', on a : $\overrightarrow{BM} = \lambda'\vec{u} + \mu'\vec{v}$ où $(\lambda'; \mu')$ sont les coordonnées du point M dans le plan P'.

Donc $\overrightarrow{AB} = (\lambda - \lambda')\vec{u} + (\mu - \mu')\vec{v}$ donc B appartient à P. Donc $(B; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de P, et donc P et P' sont confondus, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ. Donc P et P' n'ont aucun point commun, ils sont donc parallèles.

Deux plans sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

4) Droites de l'espace : elle est définie par un point et un vecteur

Définitions :

Si A et B sont deux points distincts de l'espace, il existe une droite et une seule passant par les points A et B, on la note (AB).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé un vecteur directeur de cette droite. Tout autre vecteur non nul, ayant la même direction que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

Caractérisation d'une droite :

Si A est un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace, il existe une droite et une seule passant par A et ayant le vecteur $\vec{u}$ pour vecteur directeur, on la note $(A; \vec{u})$.

La droite $(A; \vec{u})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel t vérifiant $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Equations cartésiennes et représentations paramétriques d'une droite :

Propriété : L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Toute droite de l'espace admet un système d'équation de la forme
$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$
 avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0) \neq (a'; b'; c')$ et tels qu'il n'existe pas de réel k tel que $a = ka'$, $b = kb'$ et $c = kc'$.

Réciproquement : Si $(a; b; c) \neq (0; 0; 0) \neq (a'; b'; c')$ et qu'il n'existe pas de réel k tel que $a = ka', b = kb'$ et $c = kc'$ alors l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y; z)$ vérifiant $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ est une droite.

Ce qui signifie aussi que $n_1 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $n_2 \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ qui sont deux vecteurs normaux à la droite d doivent être non colinéaires.

Démonstration : Soient deux plans de l'espace (P_1) tel que $ax + by + cz = d$ et (P_2) tel que $a'x + b'y + c'z = d'$

S'il existe un réel k tel que $a = ka', b = kb'$ et $c = kc'$ alors les plans sont parallèles.

Si $aa' + bb' + cc' = 0$ alors les plans sont orthogonaux.

Or une droite dans l'espace est l'intersection de deux plans qui ne sont ni parallèles ni confondus donc si la droite d est l'intersection des plans (P_1) et (P_2) elle est définie par :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Propriété : L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit une droite d passant par un point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

On a : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $d \Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$

$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$ avec t décrivant $\mathbb{R}$ est appelé **représentation paramétrique** de la droite d

Démonstration :

$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

- On dit que deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si les parallèles menées par un point de l'espace sont orthogonales dans le plan qu'elles déterminent.

- On dit qu'une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

- On démontre qu'une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
- On dit que deux plans sont orthogonaux si et seulement si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.

Distance d'un point à un plan : Dans un repère orthonormal, la distance du point A au plan P est donné par : $d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

5) Colinéarité de deux vecteurs dans une base donnée de l'espace :

- Une base de l'espace étant donnée, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$xy' - x'y = 0 \text{ et } xz' - x'z = 0 \text{ et } yz' - y'z = 0$$

C'est-à-dire si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0$$

6) Produit scalaire, orthogonalité, norme

Un vecteur $\vec{AB}$ est orthogonal à un vecteur $\vec{AC}$ si au moins l'un de ces vecteurs est nul ou si, dans le cas où aucun des deux vecteurs n'est nul, la droite (AB) est orthogonale à la droite (AC).

Si $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$, alors $\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$, on dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Les droites $(A; \vec{u})$ et $(A; \vec{u}')$ sont orthogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$

La droite $(A; \vec{u})$ est orthogonale au plan $(A'; \vec{u}', \vec{v}')$ si et seulement si : $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}' = 0$

Dans un repère orthonormal, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ c'est la norme du vecteur $\vec{u}$.

Formules de polarisation :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Calcul d'un angle : comme $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ on peut déterminer l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ connaissant les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Recherche d'un plan : Il existe un unique plan passant par un point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et orthogonal au vecteur non nul $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, c'est l'ensemble des point M tels que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Projections orthogonales :

Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan P est l'intersection de P avec la droite passant par A et orthogonale à P.

Le projeté orthogonal d'un point A sur une droite Δ est l'intersection de Δ avec le plan passant par A orthogonal à Δ .

Calcul des coordonnées du projeté orthogonal d'un point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ sur un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$, on écrit les équations paramétriques de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Le point d'intersection de la droite et du plan est le projeté orthogonal de A sur P.

Sphère : La sphère de centre $C \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et de rayon $R \geq 0$ est l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $CM = R$. C'est aussi l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

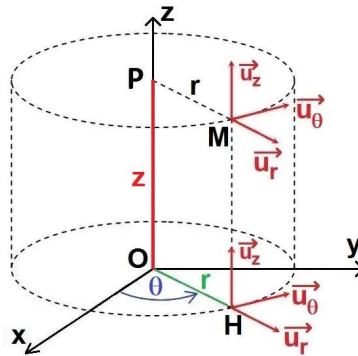
III. ANALYSE VECTORIELLE :

1) Gradient

Rappels : Les coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques :

Les coordonnées cartésiennes : $M(x; y; z)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ [ou $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$]

Les coordonnées cylindriques : $M(r; \theta; z)$, on se place dans un repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

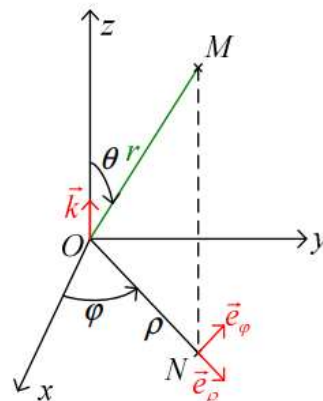
$$\vec{u}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \text{ et } \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$d\vec{u}_r = -\sin \theta d\theta \vec{i} + \cos \theta d\theta \vec{j} \quad \text{d'où} \quad d\vec{u}_r = d\theta \vec{u}_\theta$$

Pour un déplacement élémentaire on aura :

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\vec{u}_r + dz\vec{u}_z = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z (*)$$

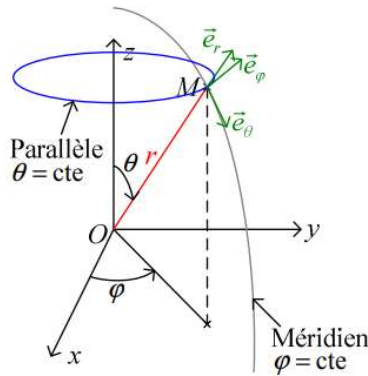
Les coordonnées sphériques : $M(r; \theta; \varphi)$, r est la distance OM , les deux angles θ et φ sont définis selon le schéma suivant :



$$r = OM; \quad \theta = (\vec{k}, \overrightarrow{OM}) \text{ (colatitude)} \quad \text{et} \quad \varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OH}) \text{ (longitude)}$$

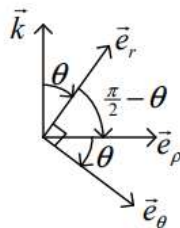
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

(N est la projection orthogonale de M sur xOy)



Base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ avec $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{OM}$; $\vec{e}_\theta$ tangent au méridien (vers le sud) et $\vec{e}_\varphi$ dirigé suivant un parallèle (vers l'est).

Les vecteurs $\vec{k}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\rho$ sont coplanaires.



$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{k} + \sin \theta \vec{e}_\rho \text{ et } \vec{e}_\theta = \cos \theta \vec{e}_\rho - \sin \theta \vec{k}$$

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

Pour un déplacement élémentaire on aura : $d\vec{OM} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\vec{e}_r$

$$d\vec{e}_r = (-\sin \theta d\theta) \vec{k} + \cos \theta d\theta \vec{e}_\rho + \sin \theta d\vec{e}_\rho$$

$$d\vec{e}_r = (-\sin \theta \vec{k} + \cos \theta \vec{e}_\rho) d\theta + \sin \theta d\vec{e}_\rho$$

$$d\vec{e}_r = d\theta \vec{e}_\theta + \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\text{Il vient } d\vec{OM} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\vec{e}_r = dr \cdot \vec{e}_r + r(d\theta \vec{e}_\theta + \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi)$$

$$d\vec{OM} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi (**)$$

Rappels : Changement de repère : $x = r \sin \theta \cos \varphi$; $y = r \sin \theta \sin \varphi$ et $z = r \cos \theta$

$$\text{On a aussi : } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ; \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \text{ et } \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Gradient :

Le gradient est un vecteur dont les coordonnées sont les dérivées partielles. Il est très important en physique et il a de nombreuses applications géométriques, car il indique la direction perpendiculaire aux courbes et surfaces.

Remarque : En espace de dimension n , dans les notations on ne met pas toujours la flèche sur le vecteur.

Définition : Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction admettant des dérivées partielles. Le gradient en $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ noté $\overrightarrow{\text{grad}} f(x)$ est le vecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Les physiciens utilisent la notation $\nabla f(x)$ se lit « nabra ».

Pour une fonction à deux variables $f(x, y)$ au point (x_0, y_0) on aura :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

En coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \quad \text{d'après (*)}$$

En coordonnées sphériques, on a :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad \text{d'après (**)}$$

Interprétation géométrique du gradient :

- Si l'on est en dimension 2, l'ensemble des points (x, y) vérifiant $f(x, y) = 0$ est une courbe (C). En un point P de cette courbe qui est régulier (au sens où le vecteur gradient ne s'annule pas), la courbe (C) admet une tangente en P, et le vecteur gradient est orthogonal à cette tangente.
- Si l'on est en dimension 3, l'ensemble des points (x, y, z) vérifiant $f(x, y, z) = 0$ est une surface (S). En un point P de cette surface qui est régulier, le vecteur gradient est orthogonal au plan tangent en P.
- Le gradient désigne aussi la direction où la pente est la plus grande. Précisément, en un point p où $\nabla f(p) \neq 0$, alors, pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|u\| = \|\nabla f(p)\|$, il existe $\delta > 0$ vérifiant $\forall t \in]0, \delta[, f(x + tu) \leq f(x + t\nabla f(p))$.

Lien avec la différentielle : le gradient est une autre écriture possible de la différentielle. Si f est différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$ et si $h \in \mathbb{R}^n$ alors :

$$df(x)(\vec{h}) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x) | \vec{h} \rangle$$

Dans cette formule $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire

Pour une fonction à deux variables : soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et (x_0, y_0) et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$df(x_0, y_0)(h, k) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) | \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \rangle = h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

La différentielle $df(x)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $gradf(x)$ est la transposée de sa matrice dans la base canonique.
On pourrait écrire $df(x)(h) = gradf(x)^T \cdot h$

Lien avec la dérivée directionnelle : Si f est différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$ et si $v \in \mathbb{R}^n$, alors :
$$D_v f(x) = df(x)(v) = \langle gradf(x) | v \rangle$$

Tangente aux lignes de niveau :

Proposition : Le vecteur gradient $grad f(x_0, y_0)$ est orthogonal à la ligne de niveau de f passant au point (x_0, y_0) .

Proposition : L'équation de la tangente à la ligne de niveau de f en (x_0, y_0) est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

pourvu que le gradient de f en ce point ne soit pas le vecteur nul.

Proposition : Le vecteur gradient $grad f(x_0, y_0)$ indique la direction de plus forte pente à partir du point (x_0, y_0) .

2) Divergence :

La divergence est un scalaire qui prend en argument un vecteur.

Définition : Si f est un champ de vecteurs, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, la divergence de f est défini par : $div \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$ avec $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$

Utilisation en sciences physiques : Autre définition : Soit le champ vectoriel : $\vec{r} \rightarrow \vec{V}(\vec{r})$. La divergence de $\vec{V}(\vec{r})$ est, formellement, le résultat du produit scalaire de $\vec{V}(\vec{r})$ avec l'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ soit : $div \vec{V}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(\vec{r})$

Si on utilise l'interprétation locale de la divergence, (vue avec le théorème de Gauss en électrostatique), on a : $div \vec{V}(\vec{r}) = \frac{d\Phi_{sortant}}{d\tau}$

En coordonnées cartésiennes, on a :

Pour un vecteur $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$

$$div \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

En coordonnées cylindriques, on a :

$$div \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} \text{ (voir exercice pour démonstration)}$$

En coordonnées sphériques :

$$div \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(u_\phi)}{\partial \phi} \text{ (voir exercice pour démonstration)}$$

3) Rotationnel

Soit F un champ de vecteur, c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

$$F: (x, y, z) \mapsto (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

On appelle rotationnel de F en a :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}(F)(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y}(a) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(a) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(a) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

Moyen Mnémotechnique utilisé par les physiciens pour retenir cette formule : $\nabla \wedge F$ (produit vectoriel)

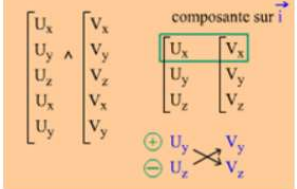
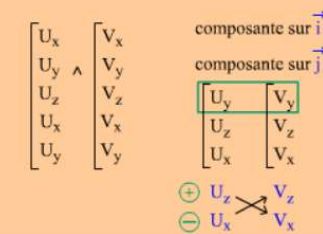
$$\text{Rot}(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_2 & F_3 \end{pmatrix} \vec{i} + (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_3 \end{pmatrix} \vec{j} + (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix} \vec{k}$$

$$\text{Il vient : } \overrightarrow{\text{Rot}}(F)(a) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}(a) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(a) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}(a) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(a) \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(a) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(a) \right) \vec{k}$$

Produit vectoriel : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$

Mode de calcul à partir de coordonnées :

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \end{vmatrix}$ Réécrire les deux => premières coordonnées sous les deux triplets	 composante sur $\vec{i}$ Pour la coordonnées sur x, Prendre les coordonnées « en dessous » Le produit : - « en descendant » affecté de + - « en montant » affecté de - d'où $(\vec{u} \wedge \vec{v})_x = u_y v_z - u_z v_y$	 composante sur $\vec{j}$ Même calcul pour la coordonnée sur y : soit $(\vec{u} \wedge \vec{v})_y = u_z v_x - u_x v_z$... puis la coordonnée sur z : Soit $(\vec{u} \wedge \vec{v})_z = u_x v_y - u_y v_x$
---	---	--

Interprétation :

Pour illustrer ce que représente le vecteur rotationnel d'un champ de vecteurs $V(x, y, z)$ en un point $M(x, y, z)$, on associe à ce point un élément de surface dS infiniment petit, présentant un contour dL .

La circulation dC du vecteur V est $dC = \text{rot}(V)dS$, on en déduit la formule de Stokes :

$\int_C V dL = \iint_S \text{rot}(V) dS$ La circulation d'un champ de vecteurs V , le long du chemin qui entoure une surface fermée orientée S est égal à l'intégrale du rotationnel de ce champ de vecteur sur cette surface. (En prenant C et S dans le sens du trièdre direct).

Rappels : Changement de repère : $x = r \sin \theta \cos \varphi$; $y = r \sin \theta \sin \varphi$ et $z = r \cos \theta$

On a aussi : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

4) Laplaciens scalaire et vectoriel :

Par définition pour un champ scalaire : $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$ soit $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad} f})$

En coordonnées cartésiennes, on a : $\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

En coordonnées polaires :

Si r et θ sont les coordonnées polaires d'un point M de $\mathbf{R}^2$ ($M \neq O$), si f est une fonction de 2 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction g par $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$, on a alors l'expression du laplacien :

$$\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta)$$

En coordonnées cartésiennes, on a : $\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

En coordonnées cylindriques :

Si r, θ, z sont les coordonnées cylindriques d'un point M de $\mathbf{R}^3$ ($M \notin Oz$), si f est une fonction de 3 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction g par $g(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, on a alors l'expression du laplacien :

$$\Delta f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r, \theta, z) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(r, \theta, z)$$

En coordonnées sphériques :

Si ρ, θ, ϕ sont les coordonnées sphériques d'un point M de $\mathbf{R}^3$ ($M \notin Oz$), si f est une fonction de 3 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction g par $g(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \cos \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \phi)$, on a alors l'expression du laplacien :

$$\Delta f(\rho \cos \theta \cos \phi, \rho \sin \theta \cos \phi, \rho \sin \phi) = \frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2}(\rho, \theta, \phi) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta, \phi) + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\rho, \theta, \phi) - \frac{\tan \phi}{\rho^2} \frac{\partial g}{\partial \phi}(\rho, \theta, \phi) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}(\rho, \theta, \phi)$$

Si, au lieu de ϕ , on considère ψ (la co-latitude), on a alors :

Si ρ, θ, ψ sont les coordonnées sphériques d'un point M de $\mathbf{R}^3$ ($M \notin Oz$), si f est une fonction de 3 variables qui admet des dérivées partielles secondes, si on définit la fonction h par $h(\rho, \theta, \psi) = f(\rho \cos \theta \sin \psi, \rho \sin \theta \sin \psi, \rho \cos \psi)$, on a alors l'expression du laplacien :

$$\Delta f(\rho \cos \theta \sin \psi, \rho \sin \theta \sin \psi, \rho \cos \psi) = \frac{\partial^2 h}{\partial \rho^2}(\rho, \theta, \psi) + \frac{2}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho, \theta, \psi) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}(\rho, \theta, \psi) + \frac{\cot \psi}{\rho^2} \frac{\partial h}{\partial \psi}(\rho, \theta, \psi) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \psi^2}(\rho, \theta, \psi)$$

Par définition, le laplacien d'un champ vectoriel est le vecteur $\Delta \vec{A}$ dont les composantes, en coordonnées cartésiennes, sont les laplaciens scalaires des composantes du champ vectoriel : $\Delta \vec{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$ avec $\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$

$$\text{On a : } \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \vec{\nabla}^2 A_x \vec{u}_x + \vec{\nabla}^2 A_y \vec{u}_y + \vec{\nabla}^2 A_z \vec{u}_z$$

On a une définition intrinsèque :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad div}} \vec{A} - \overrightarrow{\text{rot rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})$$

5) Formules d'analyse vectorielle :

Identités :

$$\overrightarrow{\text{rot grad}} f = \vec{0} \quad (\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0})$$

$$\overrightarrow{\text{div rot}} f = 0 \quad (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = 0)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

Produits :

$$\vec{\nabla} f g = g \vec{\nabla} f + f \cdot \vec{\nabla} g$$

$$\vec{\nabla} \cdot f \vec{A} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{A} + f \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \wedge f \vec{A} = f \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} + \vec{\nabla} f \wedge \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

Composition :

$$\vec{\nabla} g(f(\vec{r})) = g'(f) \vec{\nabla} f$$