

Les coordonnées cartésiennes et polaires :

Le passage des coordonnées polaires aux Cartésiennes

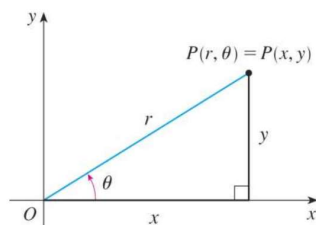
s'obtient facilement du fait que :

- Le pôle correspond à l'origine.
- L'axe polaire coïncide avec l'axe des abscisses positives.

Si le point P a pour coordonnées polaires (r, θ) , ses coordonnées Cartésiennes (x, y) sont :

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$



Pour trouver r et θ quand x et y sont connus, on utilise les équations :

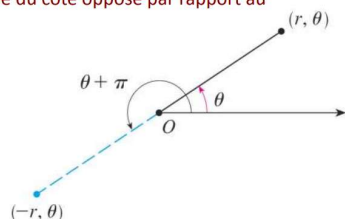
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

On étend la définition des coordonnées polaires (r, θ) au cas où r est négatif—comme suit.

On convient que les points $(-r, \theta)$ et (r, θ) sont sur la même droite (radiale) passant par O et à la même distance $|r|$ de O , mais sur les côtés opposés par rapport à O .

Si $r > 0$, le point (r, θ) se trouve dans le même quadrant que θ .

Si $r < 0$, il se trouve dans le quadrant situé du côté opposé par rapport au pôle.



Notons que $(-r, \theta)$ représente le même point que $(r, \theta + \pi)$.

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = 2 \arctan \left(\frac{y}{x+y} \right) \end{cases}$$

Une autre formule possible (qui revient à séparer des cas, et qui pose encore des problèmes pour les cas limites)

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \left(\frac{y}{x} \right) + \pi \cdot u_0(-x) \cdot \text{sgn}(y) \end{cases}$$

où u_0 est la fonction de Heaviside qui vaut 0 si x est strictement négatif et 1 si x est positif (ou nul), et $\text{sgn}(y)$ est le signe de y (-1 si y est négatif, +1 si y est positif).

Autrement dit : $\theta = \arctan \frac{y}{x}$ si $x > 0$ et $\theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi$ si $x < 0$

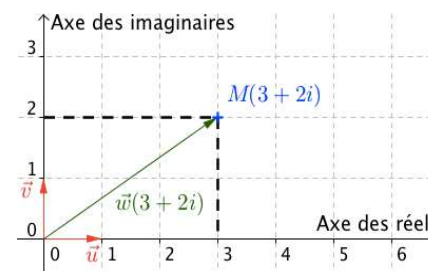
Liens avec les nombres complexes :

Jusqu'à présent on travaillait sur la droite des nombres réels, avec les nombres complexes, on va travailler dans le plan complexe.

Dans le nouvel ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ construit tel que

$i^2 = -1$, on dira que l'affixe du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le nombre complexe $z = x + iy$ on dira que cette forme, c'est la forme algébrique du nombre complexe. On dira que x est la partie réelle et y la partie imaginaire.

L'ensemble des nombres complexes contient l'ensemble des nombres réels.



Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ aura pour affixe $z_B - z_A$.

Le milieu I du segment $[AB]$ aura pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

$|r| = \sqrt{x^2 + y^2}$ sera appelé le module du nombre complexe.

θ sera appelé l'argument du nombre complexe noté $\arg(z)$ ou θ , il correspond à la mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$.

$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta = \arg(z)$ sera appelé la forme trigonométrique du nombre complexe.

On posera $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$, avec cette notation le nombre complexe non nul z s'écrira $z = |z|e^{i\theta}$, on appellera cette écriture la forme exponentielle.

Liens avec les sciences physiques :

Formulaire physique

$$v = (\dot{r}, r\dot{\theta})$$

$$a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2, 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

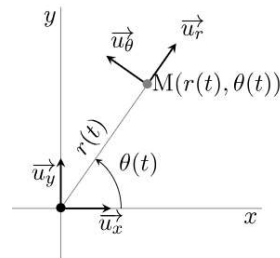


Fig. 4- Système polaire.

Démonstration pour v :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{d(r(t)\vec{u}_r(t))}{dt} = \frac{d(r(t))}{dt}\vec{u}_r(t) + r(t)\frac{d(\vec{u}_r(t))}{dt}$$

$$\vec{u}_r(t) = \cos\theta(t)\vec{u}_x + \sin\theta(t)\vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin\theta(t)\vec{u}_x + \cos\theta(t)\vec{u}_y$$

$$\frac{d(\vec{u}_r(t))}{dt} = -\frac{d\theta(t)}{dt}\sin\theta(t)\vec{u}_x + \frac{d\theta(t)}{dt}\cos\theta(t)\vec{u}_y = \frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d(r(t))}{dt}\vec{u}_r(t) + r(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta(t)$$

$$v = (\dot{r}; r\dot{\theta})$$

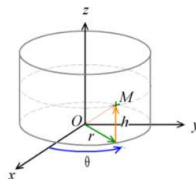
Pour a , on dérive une nouvelle fois par rapport au temps.

Les coordonnées dans l'espace – Coordonnées cylindriques :

Dans l'espace à trois dimensions, un point M est repéré par

- la distance r de l'origine à sa projection sur Oxy ;
- l'angle θ que fait la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur le plan Oxy par rapport à Ox ;
- la hauteur h du point par rapport au plan Oxy.

Relations avec les coordonnées cartésiennes



Le passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) se fait par :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z = h \end{cases}$$

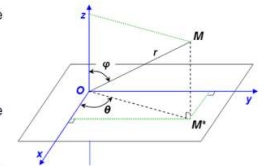
Dans l'autre sens :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi \cdot u_0(-x) \cdot \text{sgny} \\ h = z \end{cases}$$

Les coordonnées sphériques :

Les **coordonnées sphériques** d'un point M de l'espace euclidien R^3 sont la donnée conjointe de :

- la distance $r = OM$ à l'origine du repère ;
- deux angles, θ et φ , permettant de repérer le point M sur la sphère de centre O et de rayon r .



Il existe plusieurs façons de définir ces angles. La définition développée ci après prend θ *azimutal* (ou *longitudinal*) et φ *colatitudinal*. Pour des applications en physique, il est plutôt d'usage de prendre φ *azimutal*, et θ *colatitudinal*. Ainsi :

- l'angle θ est celui que fait la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur le plan Oxy par rapport à Ox ;
- l'angle φ est celui que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à Oz.

Remarque: On peut également prendre pour définition de l'angle φ celui que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ par rapport à Ox. Ce qui changerait toutes les relations qui vont suivre.

Relations avec les coordonnées cartésiennes

Le passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) se fait par :

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta \\ z = r \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

Dans l'autre sens :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi \cdot u_0(-x) \cdot \text{sgn}(y) \\ \varphi = \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$