

Exercices Trigonométrie et fonctions trigonométriques :

Exercice 1 :

Résoudre

$$\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$.

Solution 1 :

On écrit l'équation sous la forme

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\text{ssi } \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\text{ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$$

$$\text{ou } 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$$

$$\text{ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\text{ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\text{ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi.$$

Les solutions dans $[0, 2\pi[$ sont

$$\left\{\frac{\pi}{36}; \frac{7\pi}{12}; \frac{25\pi}{36}; \frac{49\pi}{36}\right\}$$

On fait les calculs pour $k = 0$; $k = 1$ et $k = 2$ et on garde les solutions dans $[0; 2\pi]$

Exercice 2 :

$$\text{Résoudre } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin(x)$$

dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi, \pi]$.

Solution 2 :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin(x)$$

$$\text{ssi } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin(x + \pi)$$

$$\text{ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x - \frac{\pi}{3} = -x + 2k\pi$$

$$\text{ou } 2x - \frac{\pi}{3} = \pi + x + 2k\pi$$

$$\text{ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que}$$

$$3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que}$$

$$x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$

Les solutions dans $]-\pi, \pi]$ sont $\mathcal{S} = \left\{ \frac{\pi}{9}, \frac{-5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{-2\pi}{3} \right\}$.

Exercice 3 :

Résoudre dans $[0, 2\pi[$,

$$2 \sin^2(x) + 3 \sin(x) - 2 \geq 0$$

Solution 3 :

On considère d'abord l'équation

$$2t^2 + 3t - 2 = 0 \text{ de discriminant } \Delta = 25 \text{ et de racines } -2 \text{ et } 1/2.$$

$$\text{Donc } 2t^2 + 3t - 2 = (2t - 1)(t + 2).$$

$$\text{On doit donc résoudre } (2 \sin(x) - 1)(\sin(x) + 2) \geq 0$$

avec $\sin(x) + 2 > 0$, on obtient l'inéquation équivalente

$$2 \sin x - 1 \geq 0$$

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \quad \text{soit } \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \text{ sur l'intervalle } [0; 2\pi[$$

$$\text{On obtient } \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$$

Exercice 4 :

Résoudre dans $[0, 2\pi[$

$$2 \cos^2(x) + 9 \cos(x) + 42 < 0.$$

Solution 4 :

On considère d'abord l'équation

$2t^2 + 9t + 4 = 0$ de discriminant $\Delta = 49$ et de racines -4 et $-1/2$
donc $2t^2 + 9t + 4 = (2t + 1)(t + 4)$.

On doit donc résoudre $(2 \cos(x) + 1)(\cos(x) + 4) < 0$

avec $\cos(x) + 4 > 0$, on obtient l'inéquation équivalente

$$2 \cos(x) + 1 < 0 \text{ssi} \cos(x) < \frac{-1}{2}$$

$$\text{ssi} \cos(x) < \cos(2\pi/3)$$

$$\text{ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < 2\pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Comme on cherche les valeurs dans $[0, 2\pi[$, on obtient $\left] \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right[$.

Exercice 5 :

On note $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\cos(x) + x \sin(x)}{\cos(x) - \sin(x)}$$

Question 1

Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f ?

Question 2

Calculer $f'(x)$ lorsque $x \in \mathcal{D}$.

Question 3

Si $x \in [-\pi, \pi]$, on note $N(x) = x + \sin(x) \cos(x) + \cos^2(x)$

Étudier les variations de N et en déduire que N s'annule en un unique point $a \in]-\pi/2, 0[$.

On donne $a \approx -0,437$.

Question 4

En déduire les variations de f sur $\mathcal{D}$.

On donne $f(a) \approx 0,821$.

Question 5

Donner le tableau de variation de f et son graphe

Solution 5 :

Question 1

$$\cos(x) = \sin(x) \text{ssi} \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\text{ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \text{ ou } x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Comme $x \in [-\pi, \pi]$, les solutions à retenir sont $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{-3\pi}{4}$.

Dans la suite, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble $\left[-\pi, \frac{-3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.

Question 2

• Calcul de la dérivée

En notant $u(x) = \cos(x) + x \sin(x)$ et $v(x) = \cos(x) - \sin(x)$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$u'(x) = -\sin(x) + \sin(x) + x \cos(x) u'(x) = x \cos(x)$$

$$N(x) = u'(x)v(x) - u(x)v'(x)$$

$$N(x) = x \cos(x) (\cos(x) - \sin(x)) + (\cos(x) + x \sin(x)) (\sin(x) + \cos(x))$$

$$N(x) = x \cos^2(x) - x \cos(x) \sin(x) + \sin(x) \cos(x) + x \sin^2(x) + \cos^2(x) + x \cos(x) \sin(x)$$

$$N(x) = x + \sin(x) \cos(x) + \cos^2(x)$$

$$\text{et } f'(x) = \frac{x + \sin(x) \cos(x) + \cos^2(x)}{(\cos(x) - \sin(x))^2} \text{ est du signe de } N(x).$$

Question 3

$$\text{Pour } x \in [0, \pi], N(x) = x + \sin(x) \cos(x) + \cos^2(x)$$

$$= 2\cos(x)(\cos(x) - \sin(x))$$

$$N'(x) = 1 + \cos^2(x) - \sin^2(x) - 2 \sin(x) \cos(x) N'(x) = 2 \cos^2(x) - 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$N' \text{ est positive sur } \left[-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right], \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right] \text{ et } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \text{ et } N' \text{ est négative sur } \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$N \text{ est strictement croissante sur } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$N\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } N\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} + 1 \text{ On a donc } N\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 0 \text{ et } N\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0 \text{ et } N \text{ strictement croissante, il existe une solution unique } N(a) = 0 \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{De plus } a < 0, \text{ car } N(0) = 1$$

$$\text{Donc } N \text{ s'annule en un unique point } a \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$$

Question 4

f' et N sont de même signe et N est négative sur $[-\pi; a]$ et positive sur $[a; \pi]$.

Il vient f décroissante jusque a et croissante au-delà.

Question 5

x	$-\pi$	$-3\pi/4$	a	$\pi/4$	π
$f'(x)$			-	0	+
			$+\infty$	$+\infty$	
f	1				1
			$-\infty$		
			$f(a)$		
				$-\infty$	

