

Test de rentrée : Exercices du chapitre Equations différentielles et primitives :

Exercice 1 :

Dans chaque cas, dire si F est une primitive de f .

a) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ et $f(x) = x$.

b) $F(x) = xe^x$ et $f(x) = e^x(x+1)$.

c) $F(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ et $f(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Solution 1 :

a) $F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$

Donc F est une primitive de f .

b) $F'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = e^x(x+1) = f(x)$

Donc F est une primitive de f .

c) $F'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \neq f(x)$

Donc F n'est pas une primitive de f .

Exercice 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$.

a) Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f .

b) Déterminer la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$.

Correction 2

a) $F'(x) = \frac{2e^{2x}x - e^{2x}}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2} = f(x)$.

Donc $F' = f$ et donc la fonction F est une primitive de f .

b) On cherche la primitive G de la fonction f qui s'annule en $x = 1$, soit : $G(1) = 0$.

Si G est une primitive de f alors : $G(x) = F(x) + C$, où C est un nombre réel.

Donc : $G(1) = F(1) + C$

Et donc : $F(1) + C = 0$

Soit : $\frac{e^{2 \times 1}}{1} + C = 0$

$e^2 + C = 0$

$C = -e^2$

La primitive de la fonction f qui s'annule en $x = 1$ est G telle que :

$G(x) = F(x) - e^2 = \frac{e^{2x}}{x} - e^2$

Exercice 3 : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f .

a) $f(x) = x^3 - 2$

b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

d) $f(x) = \frac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$

e) $f(x) = -\sin(x)$

f) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

Correction 3

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x$

b) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = 3x^2 - 3 \times \frac{1}{x^2}$ donc $F(x) = x^3 - 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{3}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5}$

$F(x) = \frac{1}{-4}x^{-4} = -\frac{1}{4x^4}$

d) $f(x) = \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$

$F(x) = 3 \ln(x)$

e) $F(x) = \cos(x)$ car $(\cos(x))' = -\sin(x)$

f) $F(x) = 4\sqrt{x}$ car $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 4 : Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f .

a) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $f(x) = x^2 e^{x^3}$

d) $f(x) = \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1)$

Correction 4

a) $f(x) = (2x - 5)(x^2 - 5x + 4)^2$ du type $u'u^n$, avec $n = 2$.

En effet : $u(x) = x^2 - 5x + 4 \rightarrow u'(x) = 2x - 5$

Une primitive de $u'u^2$ est de la forme $\frac{1}{3}u^3$

Soit : $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 4)^3$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ du type $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.

En effet : $u(x) = x^2 + 1 \rightarrow u'(x) = 2x$

Une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ est de la forme $2\sqrt{u}$.

Soit : $F(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = x^2 e^{x^3} = \frac{1}{3} \times 3x^2 e^{x^3}$ du type $u'e^u$.

En effet : $u(x) = x^3 \rightarrow u'(x) = 3x^2$.

Une primitive de $u'e^u$ est de la forme e^u .

Soit : $F(x) = \frac{1}{3} \times e^{x^3}$

d) $f(x) = \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1) = \frac{1}{5} \times 5 \cos(5x) - 3 \sin(3x - 1)$

Donc $F(x) = \frac{1}{5} \times \sin(5x) + \cos(3x - 1)$

Remarque : Pour se vérifier on pourra dériver la primitive trouvée.

Exercice 5 : Fonction polynomiale

Développer et réduire l'expression : $(x + 3)(x^2 + 3)$

Déterminer les primitives de la fonction définie par $f(x) = ((x + 3)(x^2 + 3))^3 (x + 1)^2$

Indication : savoir reconnaître $u'u^n$.

Solution 5 :

$(x + 3)(x^2 + 3) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9$

La fonction f est une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$ et y admet donc des primitives.

$f(x) = ((x + 3)(x^2 + 3))^3 (x + 1)^2 = (x^3 + 3x^2 + 3x + 9)^3 (x + 1)^2$

Posons : $u(x) = (x + 3)(x^2 + 3) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9$

On a $u'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2$

$f(x) = ((x + 3)(x^2 + 3))^3 (x + 1)^2 = \frac{1}{3}u(x)^3 u'(x)$

Donc $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{(u(x))^4}{4} + C = \frac{1}{12}[(x + 3)(x^2 + 3)]^4 + C$ avec C une constante

Exercice 6 : Fonctions rationnelles

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}^{*+}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}^{*+}$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3}$

Déterminer les primitives sur $]1; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$

Solution 6 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$, elle admet des primitives sur cet intervalle :

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C \text{ avec } C \text{ une constante}$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3}$ est continue sur cet intervalle, elle y admet des primitives :

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 + 2}{x^3} = x - 1 + \frac{2}{x^3} = x - 1 + 2x^{-3}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{(-2)}x^{-2} + C = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{x^2} + C \text{ avec } C \text{ une constante}$$

La fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ est continue sur cet intervalle, elle y admet des primitives :

$$\text{Posons } u(x) = x - 1 ; u'(x) = 1, \text{ on a } f(x) = \frac{1}{u^3} = \frac{u'}{u^3} = u' u^{-3}$$

$$F(x) = \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C \text{ avec } C \text{ une constante}$$

Exercice 7 : Fonction racine carrée

Déterminer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_1(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}$

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}$

Solution 7 :

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme et composée de fonctions qui le sont.

$$g'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$$

La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ et elle y admet des primitives :

$$f_1(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} (x + \sqrt{x^2+1}) \text{ (pour visualiser } g(x))$$

$$f_1(x) = g'(x)g(x) \text{ d'où } F_1(x) = \frac{(g(x))^2}{2} + C \text{ avec } C \text{ une constante.}$$

$$\text{Il vient } F_1(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+1})^2 + C$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\frac{(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} \text{ on a cherché à faire apparaître } g \text{ et } g'$$

$$f_2(x) = \frac{g'(x)}{(g(x))^2} \text{ d'où } F_2(x) = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} + C \text{ avec } C \text{ une constante.}$$

Exercice 8 : Fonctions trigonométriques

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$.

$$f_1(x) = \cos 2x ; f_2(x) = \sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) ; f_3(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{4}\right) ; f_4(x) = (\cos x)^3$$

$$f_5(x) = (\sin x)^3.$$

Déterminer sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, l'ensemble des primitives de la fonction f_6 définie par :

$$f_6(x) = \frac{\sin 3x}{1 + \cos 6x}$$

Solution 8 :

$$\text{Pour } f_1(x) = \cos 2x, F_1(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

Pour $f_2(x) = \sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$, $F_2(x) = -\frac{3}{2} \cos\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + C$

Pour $f_3(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{4}\right)$, $F_3(x) = -\frac{4}{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3x}{4}\right) + C$

Pour $f_4(x) = (\cos x)^3 = (\cos x)^2 \cos x = (1 - (\sin x)^2) \cos x$ car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Avec $u(x) = \sin x$, on a $u'(x) = \cos x$

$f_4(x) = (1 - (u(x))^2) u'(x) = u'(x) - u'(x)(u(x))^2$ il vient :

$$F_4(x) = u(x) - \frac{1}{3} (u(x))^3 + C = \sin x - \frac{(\sin x)^3}{3} + C$$

Pour $f_5(x) = (\sin x)^3 = (1 - \cos^2 x) \sin x$

Avec $u(x) = \cos x$, on a $u'(x) = -\sin x$

$f_5(x) = (\sin x)^3 = (1 - \cos^2 x) \sin x = -u'(x)(1 - (u(x))^2) = -u'(x) + u'(x)(u(x))^2$ il vient :

$$F_5(x) = -u(x) + \frac{(u(x))^3}{3} + C = -\cos x + \frac{1}{3} (\cos x)^3 + C$$

Pour $f_6(x) = \frac{\sin 3x}{1 + \cos 6x}$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, on a $\cos 6x = \cos(2 \times 3x)$

Et $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$, d'où $\cos 6x = \cos(2 \times 3x) = 2(\cos 3x)^2 - 1$, il vient :

$f_6(x) = \frac{\sin 3x}{1 + \cos 6x} = \frac{\sin 3x}{1 + 2\cos^2 3x - 1} = \frac{\sin 3x}{2(\cos 3x)^2}$ posons $u(x) = \cos 3x$; $u'(x) = -3 \sin 3x$

$f_6(x) = -\frac{u'(x)}{6(u(x))^2} = -\frac{1}{6} u'(x)(u(x))^{-2}$ d'où :

$$F_6(x) = -\frac{1}{6} \times \frac{(u(x))^{-2+1}}{(-2+1)} + C = \frac{1}{6} \times \frac{1}{u(x)} + C = \frac{1}{6 \cos 3x} + C$$

ORDRE 1 :

Exercice 9 : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Prouver que la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

Correction 9 :

$$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$$

Donc, g est solution de l'équation différentielle : $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

Exercice 10 :

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

1) a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.

b) Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.

2) Déterminer l'unique solution f telle que $f(1) = 2$.

Correction 10 :

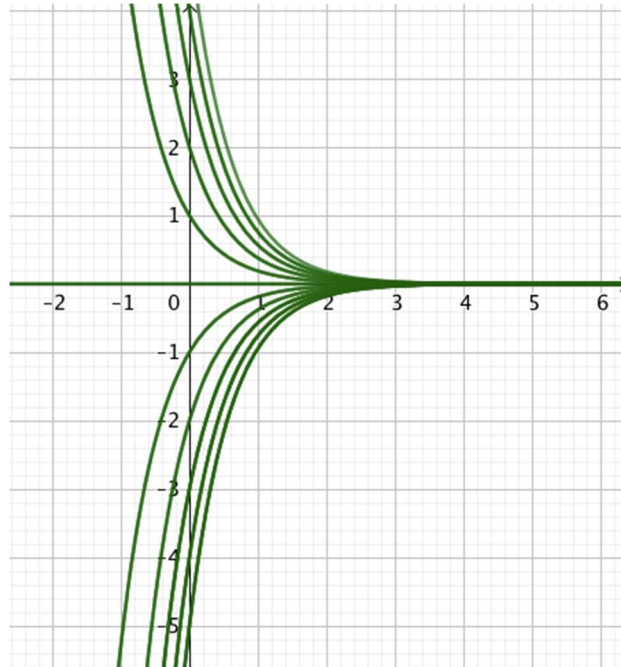
$$1) \text{ a) } 3y' + 5y = 0$$

$$3y' = -5y$$

$$y' = -\frac{5}{3}y$$

Les solutions sont les fonctions de la forme : $x \mapsto C e^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

c) Pour différentes valeurs de C , on obtient :



2) f est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$

Donc $f(1) = Ce^{-\frac{5}{3} \times 1} = Ce^{-\frac{5}{3}}$

Or, $f(1) = 2$.

Donc : $Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$

$$Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$$

$$C = \frac{2}{e^{-\frac{5}{3}}}$$

$$C = 2e^{\frac{5}{3}}$$

Et donc : $f(x) = 2e^{\frac{5}{3}} e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3} - \frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$

Exercice 11 : On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$.

a) Déterminer la forme générale des fonctions solutions de l'équation.

b) Déterminer l'unique solution f telle que $f(0) = -1$.

Correction 11 :

a) $2y' - y = 3$

$$2y' = y + 3$$

$$y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$$

• Une solution particulière constante est la fonction : $x \mapsto -3$.

En effet : $-\frac{b}{a} = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$.

• Les solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$ sont de la forme : $x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

- Les solutions de l'équation différentielle $2y' - y = 3$ sont donc de la forme :

$$x \mapsto Ce^{\frac{1}{2}x} - 3, C \in \mathbb{R}$$

- b) f est solution de l'équation différentielle, donc de la forme : $f(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3, C \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc } f(0) = Ce^{\frac{1}{2} \times 0} - 3 = C - 3$$

$$\text{Or, } f(0) = -1$$

$$\text{Donc : } C - 3 = -1$$

$$C = 3 - 1$$

$$C = 2$$

$$\text{Et donc : } f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$$

Exercice 12 : On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

- a) Démontrer que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.

- b) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Correction 12 :

$$\text{a) } p'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } p'(x) - 2p(x) &= -x - \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \\ &= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2} \\ &= x^2 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } p'(x) - 2p(x) = x^2$$

La fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est donc une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

- b) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$ sont de la forme $x \mapsto Ce^{2x}, C \in \mathbb{R}$. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$ sont les fonctions de la forme :

$$f(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, C \in \mathbb{R}.$$

ORDRE 2 :

Exercice 13:

On considère y la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la variable x , dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle $(E) : 9y''(x) - y(x) = 4$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : 9y''(x) - y(x) = 0$
2. déterminer la solution particulière h de (E) sous la forme d'une constante
3. En déduire les solutions générales de (E) .
4. Déterminer la fonction y solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Solution 13 :

1. $(E_0) : 9y''(x) - y(x) = 0$

C'est l'équation différentielle du 2nd ordre sans second membre associée à (E) . avec $a = 9$; $b = 0$; $c = -1$

Equation caractéristique : $9r^2 - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \times 9 \times (-1) = 36 > 0$

Donc on a deux solutions réelles : $r_1 = \frac{-1}{3}$ et $r_2 = \frac{1}{3}$

Donc les solutions de (E_0) sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(t) = \lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{-\frac{t}{3}}$ avec λ et μ deux **constantes réelles**.

2. Si h est constante alors $h(x) = A$ donc $h'(x) = h''(x) = 0$.

On remplace h dans l'équation (E) car elle est solution particulière de (E).

D'où : $9h''(x) - h(x) = 4 \Rightarrow 9 \times 0 - A = 4 \Rightarrow -A = 4$ donc $A = -4$

Donc la fonction constante solution de l'équation différentielle (E) est **$h(x) = A = -4$**

3. Avec la question 1 et 2, on en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme :

$y(t) = \lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{-\frac{t}{3}} - 4$ avec λ et μ deux **constantes réelles**.

4. D'après la question 3, les solutions de (E) sont de la forme : $y(t) = \lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{-\frac{t}{3}} - 4$

Si $y(0) = 0$ alors $y(0) = \lambda e^{\frac{0}{3}} + \mu e^{-\frac{0}{3}} - 4 = \lambda + \mu - 4 = 0$ car $e^0 = 1$ donc **$\lambda + \mu = 4$**

Si $y'(0) = 0$ alors on a besoin de $y'(t) : y'(t) = \frac{\lambda}{3} e^{\frac{t}{3}} - \frac{\mu}{3} e^{-\frac{t}{3}}$

Donc $y'(0) = \frac{\lambda}{3} e^{\frac{0}{3}} - \frac{\mu}{3} e^{-\frac{0}{3}} = \frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{3} = 0$ car $e^0 = 1$

D'où $\begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \frac{\lambda}{3} - \frac{\mu}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = 4 \Rightarrow \lambda = 2 \\ \mu = 2 \end{cases}$

Donc la solution est : **$y(t) = \lambda e^{\frac{t}{3}} + \mu e^{-\frac{t}{3}} - 4 = 2e^{\frac{t}{3}} + 2e^{-\frac{t}{3}} - 4$**

Exercice 14 :

On considère y la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la variable t , dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle (E) : $y''(t) + 2y'(t) = (4 + 3t)e^t$.

1. Résoudre l'équation différentielle : $y''(t) + 2y'(t) = 0$ (E')

2. Déterminer le réel A tel que $f(t) = Ate^t$ soit une solution particulière de (E)

3. En déduire les solutions générales de (E).

Solution 14 :

1/ Recherche des solutions de $y''(t) + 2y'(t) = 0$

C'est l'équation différentielle sans second membre associée à (E) avec $a = 1$; $b = 2$; $c = 0$.

Equation caractéristique : $r^2 + 2r = 0 \Rightarrow r(r + 2) = 0$ donc $r = 0$ ou $r = -2$

Donc les solutions de (E_0) sont définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(t) = \lambda e^{0t} + \mu e^{-2t} = \lambda + \mu e^{-2t}$ avec λ et μ 2 **constantes réelles**.

2/ Si $f(t) = Ate^t$ soit une solution particulière de (E) alors f doit vérifier $f''(t) + 2f'(t) = (4 + 3t)e^t$

On a donc besoin de :

- $f'(t) = Ae^t + Ate^t$ (attention f est mise sous la forme d'un produit ! revoir la dérivée d'un produit !!)
- $f''(t) = Ae^t + Ae^t + Ate^t = 2Ae^t + Ate^t$

Donc $f''(t) + 2f'(t) = 2Ae^t + Ate^t + 2(Ae^t + Ate^t) = 4Ae^t + 3Ate^t = A(4 + 3t)e^t = (4 + 3t)e^t$

Donc par identification $A = 1$

D'où la solution particulière sera : **$f(t) = Ate^t = te^t$**

3/ Donc les solutions générales de (E), avec la question 1 et 2, sont de la forme : **$y(t) = \lambda + \mu e^{-2t} + te^t$**

Exercice 15 :

On considère x la fonction définie sur $\mathbb{R}$, de la variable t , dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant l'équation différentielle (E) : $x''(t) + 4x(t) = -6 \sin(t)$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E0) : $x''(t) + 4x(t) = 0$
2. Déterminer les réels A et B tel que la solution particulière g de (E) s'écrive sous la forme : $g(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$
3. En déduire les solutions générales de (E).
4. Déterminer la fonction x, solution de (E), vérifiant $x(0) = -1$ et $x'(0) = 0$

Solution 15 :

1. (E₀) : $x''(t) + 4x(t) = 0$.

C'est l'équation différentielle sans second membre associée à (E) avec **a = 1 ; b = 0 ; c = 4**

Equation caractéristique : $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times 4 = -16 < 0$

Donc on a deux solutions complexes conjuguées : **$r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$**

Pour r_1 : la partie réelle est : $\alpha = 0$ et la partie imaginaire est : $\beta = 2$

Donc les solutions de (E') sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$x(t) = e^{0t} (\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$ avec λ et μ deux **constantes réelles**.

2. Si $g(t) = A \cos t + B \sin t$ est solution de (E) alors g vérifie l'équation différentielle : $g''(t) + 4g(t) = -6 \sin(t)$

On a alors besoin de calculer :

- $g'(t) = -A \sin t + B \cos t$
- $g''(t) = -A \cos t - B \sin t$

Donc $g''(t) + 4g(t) = -A \cos t - B \sin t + 4(A \cos t + B \sin t) = -6 \sin(t) \Leftrightarrow 3A \cos t + 3B \sin t = -6 \sin t$

$\Rightarrow$ Par identification : $\begin{cases} 3A = 0 \\ 3B = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \end{cases}$ donc $g(t) = A \cos t + B \sin t = -2 \sin(t)$

3. Avec la question 1 et 2, on en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme : **$x(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) - 2 \sin(t)$** où λ et μ sont des **constantes réelles quelconques**.

4. On cherche la solution de (E) donc d'après la question 3 : **$x(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) - 2 \sin(t)$**

Or $x(0) = -1 \Rightarrow x(0) = \lambda \cos(0) + \mu \sin(0) - 2 \sin(0) = -1 \Rightarrow \lambda = -1$ car $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$

Pour $x'(0) = 1$, on a besoin de calculer $x'(t)$:

$x'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t) - 2 \cos(t) \Rightarrow x'(0) = -2\lambda \sin(0) + 2\mu \cos(0) - 2 \cos(0) = 0 \Rightarrow 2\mu - 2 = 0 \Rightarrow \mu = 1$

Donc la solution particulière de l'équation différentielle (E) est :

$$x(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t) - 2 \sin(t) = -\cos(2t) + \sin(2t) - 2 \sin(t)$$

$\cos(2t) + \sin(2t) - 2 \sin(t)$