

## Test de positionnement en mathématiques

Vous allez intégrer l'ENSIL-ENSCI à la rentrée prochaine.

Au cours de vos études, que ce soit dans les modules de tronc commun ou les modules de spécialité, vous allez devoir régulièrement mettre en œuvre des fonctions et des méthodes mathématiques.

Les cours de mécanique du solide et de mécanique des fluides font appel à la manipulation de vecteurs et de produits vectoriels, le cours d'électrotechnique fait appel à la variable complexe, le cours de thermique et d'autres cours encore nécessitent de savoir résoudre des équations différentielles, le cours d'analyse numérique fait appel à du calcul matriciel, sans oublier le cours de mathématiques où le calcul intégral est présent ... Ce ne sont que quelques exemples.

La diversité des parcours entrants à l'ENSIL-ENSCI nous incite à vous proposer 5 séances pour une première harmonisation en mathématiques ; cette démarche est encadrée par des enseignants de l'ENSIL-ENSCI et il s'agit d'une **démarche volontaire** de votre part, le but étant de vous aider à découvrir des méthodes de mise en œuvre de quelques outils mathématiques qui nous paraissent importants.

Le planning et les thèmes abordés sont reportés ci-dessous.

MARDI 10/09 de 9h à 11h	MATRICES - NIVEAU 1	COMPLEXES - NIVEAU 1	VECTEURS	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - NIVEAU 1
LUNDI 16/09 de 8h30 à 10h30	MATRICES - NIVEAU 1	COMPLEXES - NIVEAU 1	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - NIVEAU 1	POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES
LUNDI 16/09 de 14h à 16h	FONCTIONS USUELLES	POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES	VECTEURS	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - NIVEAU 2
MERCREDI 18/09 de 8h30 à 10h30	MATRICES - NIVEAU 2	COMPLEXES - NIVEAU 2	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - NIVEAU 2	INTÉGRALES
MERCREDI 18/09 de 14h à 16h	MATRICES - NIVEAU 2	COMPLEXES - NIVEAU 2	ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - NIVEAU 2	INTÉGRALES

Afin de vous positionner **lors de la rentrée** pour l'une ou l'autre des séances, nous vous proposons une série de petits exercices qui renvoient aux thèmes présentés dans le tableau ci-dessus. A vous de choisir le thème dont vous avez le plus besoin lors de chacune des séances.

Si vous peinez à résoudre ces exercices et si vous ressentez la nécessité de suivre une harmonisation des connaissances en mathématiques, alors nous vous inviterons à vous inscrire **lors de la rentrée** à ces séances d'harmonisation.

## Thème : Fonctions usuelles

### Exercice 01

Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = a^x$$

$$f(x) = \log_a x$$

### Exercice 02

Développer l'expression suivante :

$$\log_{10}(a \times b \times c)^n$$

### Exercice 03

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)$$

## Thème : Matrices (Niveau 1)

### Exercice 01

Mettre sous forme matricielle le système d'équations suivant, puis trouver les solutions :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

### Exercice 02

Calculer, sans machine à calculer, le déterminant de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 03

Effectuer le produit  $A \times B$  et  $B \times A$  des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Même exercice avec les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Thème : Matrices (Niveau 2)****Exercice 01**

Calculer les valeurs propres de la matrice suivante :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier la conservation de la trace et du déterminant.

**Exercice 02**

Calculer les valeurs propres de la matrice suivante :

$$X = \begin{pmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Établir l'expression des vecteurs propres associés aux valeurs propres.

## Thème : Équations différentielles (Niveau 1)

### Exercice 01

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dy}{dx} + y = 1 \quad \text{avec} \quad y(0) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - xy = x^3$$

### Exercice 02

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$x \frac{dy}{dx} - y = x^2 \cos x$$

### Exercice 03

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dx} = xy + x\sqrt{y}$$

## Thème : Équations différentielles (Niveau 2)

### Exercice 01

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \quad \text{avec} \quad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0 \quad \text{avec} \quad y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1$$

### Exercice 02

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 6x^2 \quad \text{avec} \quad y(0) = 1 \quad \text{et} \quad y'(0) = -4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = xe^x$$

## Thème : Polynômes et fractions rationnelles

### Exercice 01

Factoriser le polynôme suivant :

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 7x - 30$$

### Exercice 02

Effectuer la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles suivantes :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

### Exercice 03

Effectuer la décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles suivantes :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x(x^2 + 1)}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$$

## Thème : Intégrales

### Exercice 01

Calculer les intégrales suivantes en utilisant la méthode du changement de variable :

$$I = \int \frac{dx}{ax + b}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$$

$$I = \int xe^{-x^2} dx$$

### Exercice 02

Calculer les intégrales suivantes en utilisant la méthode d'intégration par partie :

$$I = \int \ln|x| dx$$

$$I = \int x^2 \cos x dx$$

$$I = \int xe^x dx$$

### Exercice 03

Calculer l'intégrale suivante en décomposant la fraction rationnelle en éléments simples :

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(x-1)}$$

## Thème : Nombres complexes (Niveau 1)

### Exercice 01

Trouver les racines de l'équation du second degré suivante :

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

### Exercice 02

Soient deux nombres complexes :

$$z_1 = a + ib \quad \text{et} \quad z_2 = c + id \quad \text{avec} \quad i^2 = -1$$

Préciser la partie réelle et la partie imaginaire du produit  $z_1 \times z_2$  et de la somme  $z_1 + z_2$

### Exercice 03

Soient deux nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$ .

Établir l'expression des nombres complexes conjugués suivants :

$$\overline{z_1} \quad ; \quad \overline{z_1 + z_2} \quad ; \quad \overline{z_1 \times z_2} \quad ; \quad \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}$$

### Exercice 04

Soit le nombre complexe :

$$z = 1 - i \quad \text{avec} \quad i^2 = -1$$

Calculer le module et l'argument de ce nombre complexe.

### Exercice 05

Soit  $z$  un nombre complexe.

Résoudre l'équation suivante en cherchant tout d'abord une solution imaginaire pure :

$$z^3 - (16 - i)z^2 + (89 - 16i)z + 89i = 0 \quad \text{avec} \quad i^2 = -1$$

## Thème : Nombres complexes (Niveau 2)

### Exercice 01

Donner (démontrer) deux expressions de la formule de Moivre pour expliciter l'expression :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n \quad \text{avec} \quad i^2 = -1$$

### Exercice 02

Établir les relations suivantes :

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$$

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$$

### Exercice 03

Établir les relations suivantes :

$$\sin^5 \theta = \frac{1}{16} (\sin 5\theta - 5 \sin 3\theta + 10 \sin \theta)$$

$$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} (\cos 3\theta + 3 \cos \theta)$$

## Thème : Vecteurs

### Exercice 01

Soient les deux vecteurs suivants :

$$\vec{u} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{v} = -4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y$$

Calculer le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

### Exercice 02

Soient les deux vecteurs suivants :

$$\vec{u} = \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{v} = -2\vec{e}_y$$

Calculer le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

### Exercice 03

Soient les deux vecteurs suivants :

$$\vec{u} = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{v} = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$$

Calculer le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

### Exercice 04

Soient les deux vecteurs suivants :

$$\vec{u} = -\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 2\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{v} = 2\vec{e}_x + 2\vec{e}_y - \vec{e}_z$$

Calculer le produit scalaire des deux vecteurs  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et le produit vectoriel  $\vec{u} \wedge \vec{v}$