

Calculs numériques et algébriques les exercices du chapitre :

Développer :

$$(x + 3)(y - 4) =$$

$$2x(1 - x) - (x - 3)(3x + 2) =$$

Réponse :

$$(x + 3)(y - 4) = xy - 4x + 3y - 12$$

$$2x(1 - x) - (x - 3)(3x + 2) = -5x^2 + 9x + 6$$

Développer ou factoriser en utilisant les identités remarquables :

$$(3x - 5)^2 =$$

$$(2x - 1)(2x + 1) =$$

$$25x^2 + 20x + 4 =$$

Réponse :

$$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

$$(2x - 1)(2x + 1) = 4x^2 - 1$$

$$25x^2 + 20x + 4 = (5x + 2)^2$$

Factoriser :

$A = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$ on voit que $(2 + 3x)$ est le facteur commun.

$$A =$$

$$A =$$

$B = (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(x + 1)$ on voit que $(2 - 5x)$ est le facteur commun.

$$B =$$

$$B =$$

Réponse :

$A = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$ on voit que $(2 + 3x)$ est le facteur commun.

$$A = (2 + 3x)[3 - (5 + 2x)]$$

$$A = (2 + 3x)(-2 - 2x)$$

$B = (2 - 5x)^2 - (2 - 5x)(x + 1)$ on voit que $(2 - 5x)$ est le facteur commun.

$$B = (2 - 5x)[(2 - 5x) - (x + 1)]$$

$$B = (2 - 5x)(2 - 5x - x - 1)$$

$$B = (2 - 5x)(-6x + 1)$$

Calculer avec des fractions :

$$A = \frac{5x}{x-2} - \frac{5}{3-x}$$

$$A =$$

$$A =$$

$$A =$$

$$B = 4 + \frac{5x}{2x+1}$$

$$B =$$

$$B =$$

Réponse :

$$A = \frac{5x}{x-2} - \frac{5}{3-x}$$

$$A = \frac{5x(3-x)}{(x-2)(3-x)} - \frac{5(x-2)}{(3-x)(x-2)}$$

$$A = \frac{15x - 5x^2 - (5x - 10)}{(x-2)(x-3)}$$

$$A = \frac{-5x^2 + 10x + 10}{(x-2)(x-3)}$$

$$B = 4 + \frac{5x}{2x+1}$$

$$B = \frac{4(2x+1)}{(2x+1)} + \frac{5x}{(2x+1)}$$

$$B = \frac{8x + 4 + 5x}{(2x+1)}$$

$$B = \frac{13x + 4}{2x+1}$$

Simplifier :

$$A = \frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)^2(x+5)}$$

$$A =$$

$$A =$$

$$B = \frac{2x+2}{2x}$$

$$B =$$

$$B =$$

$$C = \frac{2x(x+1)}{2x}$$

$$C =$$

Réponse :

$$A = \frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)^2(x+5)}$$

$$A = \frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)(x-1)(x+5)}$$

$$A = \frac{1}{x-1}$$

$$B = \frac{2x}{2x+2}$$

$$B = \frac{2x}{2(x+1)}$$

$$B = \frac{x}{x+1}$$

$$C = \frac{2x(x+1)}{2x}$$

$$C = x+1$$

Calculer : $\frac{2}{3} + \frac{5}{12} - 2 =$

Résoudre : $\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

Réponse :

Calculer : $\frac{2}{3} + \frac{5}{12} - 2 = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{5}{12} - \frac{2 \times 12}{12} = \frac{8+5-2}{12} = -\frac{11}{12}$

Résoudre : $\frac{3}{2}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$$\frac{3}{2}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{1 \times 3 - 1 \times 2}{2 \times 3}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{3-2}{6}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{1}{\frac{6}{3} \times \frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{18} \text{ on simplifie par 2}$$

$$x = \frac{1}{9}$$

Calculer avec des puissances :

$$\text{Calculer } A = \frac{3^{10} \times 2^{10}}{6^{10} \times 6^{-1}} =$$

$$\text{Soit } D = \frac{(a^5 b^{-4})^{-2} \times c^{15} \times b^2}{a^{-8} \times b^5 \times (b^{-3} \times c^{12})^{-1}}$$

1) Simplifier D

2) Calculer D pour $a = 2$; $b = 100$ et $c = -1$

Réponse :

$$\text{Calculer } A = \frac{3^{10} \times 2^{10}}{6^{10} \times 6^{-1}} = \frac{6^{10}}{6^9} = 6$$

$$\text{Soit } D = \frac{(a^5 b^{-4})^{-2} \times c^{15} \times b^2}{a^{-8} \times b^5 \times (b^{-3} \times c^{12})^{-1}}$$

3) Simplifier D

4) Calculer D pour $a = 2$; $b = 100$ et $c = -1$

$$D = \frac{a^{-10} b^8 c^{15} b^2}{a^{-8} b^5 b^3 c^{-12}}$$

$$D = a^{-2} b^2 c^{27}$$

$$\text{Pour } a = 2 ; b = 100 \text{ et } c = -1, \text{ on a } D = 2^{-2} \times 100^2 \times (-1)^{27} = -\frac{10000}{4}$$

$$D = -2500$$

Calculer avec des exponentielles :

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} \quad B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} \quad C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} \quad D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}}$$

Réponse :

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$\begin{array}{llll}
A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} & B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} & C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} & D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} \\
A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} & B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} & C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} & D = \frac{(e^{2x})^3}{e^{3x+1} \times e^{-x-1}} \\
= \frac{e^{7-4}}{e^{-5}} & B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} & = \frac{1}{e^{-3 \times 2}} + \frac{e^{4 \times (-1)}}{e^{2-6}} & = \frac{e^{2x \times 3}}{e^{3x+1-x-1}} \\
= \frac{e^3}{e^{-5}} & = e^{5 \times (-6)} \times e^{-3} & = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} & = \frac{e^{6x}}{e^{2x}} \\
= e^{3-(-5)} & = e^{-30} \times e^{-3} & = e^6 + 1 & = e^{6x-2x} \\
= e^8 & = e^{-33} & & = e^{4x}
\end{array}$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

Réponse :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$

$$e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$$

$$\text{Donc } x = \frac{-2-\sqrt{16}}{2 \times 1} = -3 \text{ ou } x = \frac{-2+\sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

Les solutions sont -3 et 1 .

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

$$e^{4x-1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

Calculer avec des logarithmes :

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5}) \quad B = 3 \ln 2 + \ln 5 - 2 \ln 3 \quad C = \ln e^2 - \ln \frac{2}{e}$$

Réponse :

$$\begin{aligned} A &= \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5}) & B &= 3 \ln 2 + \ln 5 - 2 \ln 3 & C &= \ln e^2 - \ln \frac{2}{e} \\ A &= \ln(3 - \sqrt{5}) + \ln(3 + \sqrt{5}) & B &= 3 \ln 2 + \ln 5 - 2 \ln 3 & C &= \ln e^2 - \ln \frac{2}{e} \\ &= \ln(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) & &= \ln 2^3 + \ln 5 - \ln 3^2 & &= 2 \ln e - \ln 2 + \ln e \\ &= \ln(9 - 5) = \ln 4 & &= \ln \frac{2^3 \times 5}{3^2} = \ln \frac{40}{9} & &= 2 - \ln 2 + 1 = 3 - \ln 2 \end{aligned}$$

1) Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :

- a) $\ln x = 2, I =]0; +\infty[$ b) $e^{x+1} = 5, I = \mathbb{R}$
c) $3 \ln x - 4 = 8, I =]0; +\infty[$ d) $\ln(6x - 1) \geq 2, I = \left]\frac{1}{6}; +\infty\right[$
e) $e^x + 5 > 4e^x, I = \mathbb{R}$

- 2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0$
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$

Réponse :

1) Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :

- a) $\ln x = 2, I =]0; +\infty[$ b) $e^{x+1} = 5, I = \mathbb{R}$
c) $3 \ln x - 4 = 8, I =]0; +\infty[$ d) $\ln(6x - 1) \geq 2, I = \left]\frac{1}{6}; +\infty\right[$
e) $e^x + 5 > 4e^x, I = \mathbb{R}$

- 1) a) $\ln x = 2$
 $\ln x = \ln e^2$
 $x = e^2$
b) $e^{x+1} = 5$
 $e^{x+1} = e^{\ln 5}$
 $x + 1 = \ln 5$
 $x = \ln 5 - 1$
c) $3 \ln x - 4 = 8$
 $3 \ln x = 12$
 $\ln x = 4$
 $\ln x = \ln e^4$
 $x = e^4$

$$d) \ln(6x - 1) \geq 2$$

$$\ln(6x - 1) \geq \ln e^2$$

$$6x - 1 \geq e^2$$

$$6x \geq e^2 + 1$$

$$x \geq \frac{e^2 + 1}{6}$$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $\left[\frac{e^2 + 1}{6} ; +\infty \right[$.

$$e) e^x + 5 > 4 e^x$$

$$e^x - 4 e^x > -5$$

$$-3 e^x > -5$$

$$e^x < \frac{5}{3}$$

$$e^x < e^{\ln \frac{5}{3}}$$

$$x < \ln \frac{5}{3}$$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $] -\infty ; \ln \frac{5}{3} [$.

2) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$

2) a) Ensemble de définition :

$$x - 3 > 0 \text{ et } 9 - x > 0$$

$$\text{Soit : } x > 3 \text{ et } x < 9$$

L'équation est définie sur l'intervalle $]3 ; 9[$.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(x - 3) + \ln(9 - x) = 0$$

$$\ln(x - 3)(9 - x) = 0$$

$$\ln(x - 3)(9 - x) = \ln 1$$

$$(x - 3)(9 - x) = 1$$

$$-x^2 + 12x - 27 = 1$$

$$-x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \times (-1) \times (-28) = 32$$

$$x = \frac{-12 + \sqrt{32}}{-2} = 6 - 2\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-12 - \sqrt{32}}{-2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

Les solutions sont donc $6 - 2\sqrt{2}$ et $6 + 2\sqrt{2}$ car elles appartiennent bien à l'ensemble de définition $]3 ; 9[$.

b) Ensemble de définition :

$$3 - x > 0 \text{ et } x + 1 > 0$$

$$\text{Soit : } x < 3 \text{ et } x > -1$$

L'inéquation est définie sur $] -1 ; 3 [$.

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$$\ln(3 - x) - \ln(x + 1) \leq 0$$

$$\ln(3 - x) \leq \ln(x + 1)$$

$$3 - x \leq x + 1$$

$$2 \leq 2x$$

$$1 \leq x$$

L'ensemble solution est donc $] -1 ; 3[\cap [1 ; +\infty[$ soit $[1 ; 3[$.

Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{R}$:

Méthode 1 : on utilise les formules apprises avec le discriminant

$$\text{Résoudre l'équation : } 3x^2 + 3x + \frac{3}{4} = 0$$

$$\Delta = (3)^2 - 4 \times 3 \times \frac{3}{4}$$

$$\Delta = 9 - 9$$

$$\Delta = 0$$

$$\text{Il y a donc une solution unique } x = -\frac{3}{2 \times 3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Résoudre l'équation : } -2x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 1$$

$$\Delta = 1 + 8$$

$$\Delta = 9, \text{ on a } \Delta > 0, \text{ il y a donc deux solutions : } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times (-2)} = 1, \text{ d'où } S = \left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\}$$

Méthode 2 : on utilise la forme canonique

$$\text{Résoudre } x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 1 - 35 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 36 = 0$$

$$(x + 1)^2 - 6^2 = 0$$

$$(x + 1 - 6)(x + 1 + 6) = 0$$

$(x - 5)(x + 7) = 0$ or un produit de facteur est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

$$\text{D'où si } x = 5 \text{ ou si } x = -7 \text{ d'où } S = \{-7; 5\}$$

$$\text{Résoudre } 2x^2 + 4\sqrt{2}x + 4 = 0$$

$$(\sqrt{2}x + 2)^2 = 0$$

$$\sqrt{2}x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ soit } S = \{-\sqrt{2}\}$$

Méthode 3 : on connaît une racine, on utilise la forme factorisée qu'on développe puis on procède par identification des coefficients. On peut aussi utiliser les formules du produit et de la somme des racines.

Résoudre $2x^2 - 3x - 2 = 0$

On voit que 2 est une racine évidente, si on calcule $P(2)$ on a :

$$2 \times 2^2 - 3 \times 2 - 2 = 0 \text{ on a } P(2) = 0$$

Donc 2 est une racine.

On peut alors écrire $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)(x - r) = 0$ on cherche à déterminer la seconde racine qu'on a nommé r .

$$2(x - 2)(x - r) = 2(x^2 - rx - 2x + 2r) = 2x^2 - (2r + 4)x + 4r$$

On identifie les coefficients, car deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux. D'où :

$$\begin{cases} 2r + 4 = 3 \\ 4r = -2 \end{cases} \text{ il vient } r = -\frac{1}{2}$$

Autre méthode en utilisant $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$ et $r_1 r_2 = \frac{c}{a}$ il vient :

$$2 + r = -\frac{3}{2} \text{ et } 2r = -1 \text{ d'où } r = -\frac{1}{2}$$

$$\text{On a } S = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$$

Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$:

Equation du second degré à coefficients réels (voir le chapitre les nombres complexes)

On utilise la forme canonique. (voir exemple 1)

On utilise les formules du cours : (voir exemple 2)

- Si $b^2 - 4ac = 0$, l'équation admet une racine double réelle $r = -\frac{b}{2a}$
- Si $b^2 - 4ac > 0$, l'équation admet deux racines réelles $r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Si $b^2 - 4ac < 0$, l'équation admet deux racines complexes (qui sont conjuguées) $r = \frac{-b \pm i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$

Exemples :

- Exemple 1 : Déterminer les solutions de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$

En utilisant la forme canonique :

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - (i)^2 \frac{3}{4} = 0 \text{ car } i^2 = -1$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

Les racines sont $r_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- Exemple 2 : Déterminer les solutions de l'équation $z^2 + 3z + 4 = 0$

On utilise les formules du cours :

On calcule le discriminant Δ du trinôme : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7$

$\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-3+i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i \quad z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$