

2024 Corrigé détaillé du QCM Harmonisation 1A :

Vecteurs : On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ 25 \end{pmatrix}$ pour les questions 1 et 2.

Question 1 : Pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, le nombre x doit être égal à :

$$\square x = -\frac{8}{125} \quad \square x = \frac{8}{125} \quad \square x = -\frac{125}{8} \quad \square x = \frac{125}{8}$$

Les vecteurs sont colinéaires si et seulement si le déterminant est nul, il vient :

$$\begin{vmatrix} 5 & x \\ -8 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

$$125 + 8x = 0 \text{ d'où } x = -\frac{125}{8}$$

Autre méthode on cherche x tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, il vient $k = -\frac{8}{25}$ et $x = \frac{5}{k} = -\frac{125}{8}$

Question 2 : Pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux, le nombre x doit être égal à :

$$\square x = -40 \quad \square x = 40 \quad \square x = 200 \quad \square x = -200$$

Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire est nul, soit : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ d'où $5x - 8 \times 25 = 0$ d'où $x = 40$

Vecteurs : On donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ 5 \end{pmatrix}$ pour les questions 1 et 2.

Question 1 bis : Pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, le nombre x doit être égal à :

$$\square x = -\frac{8}{5} \quad \square x = \frac{8}{5} \quad \square x = -\frac{5}{8} \quad \square x = \frac{5}{8}$$

Les vecteurs sont colinéaires si et seulement si le déterminant est nul, il vient :

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$5 + 8x = 0 \text{ d'où } x = -\frac{5}{8}$$

Autre méthode on cherche x tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, il vient $k = -\frac{8}{5}$ et $x = \frac{1}{k} = -\frac{5}{8}$

Question 2 bis : Pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux, le nombre x doit être égal à :

$$\square x = -40 \quad \square x = 40 \quad \square x = 200 \quad \square x = -200$$

Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire est nul, soit : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ d'où $x - 8 \times 5 = 0$ d'où $x = 40$

Calculs numériques et algébriques :

Question 3 : Quelles égalités sont vraies ?

$$\square \frac{4}{16} + \frac{4}{20} = \frac{9}{16} \quad \square \frac{14}{12} + \frac{12}{14} = \frac{85}{42} \quad \square \frac{36}{5} - 3 = \frac{21}{5} \quad \square \frac{\frac{14}{15}}{\frac{21}{35}} = \frac{14}{9}$$

$$\frac{4}{16} + \frac{4}{20} = \frac{4}{4 \times 4} + \frac{4}{4 \times 5} = \frac{5+4}{20} = \frac{9}{20} \text{ Faux}$$

$$\frac{14}{12} + \frac{12}{14} = \frac{7 \times 2}{3 \times 2 \times 2} + \frac{3 \times 2 \times 2}{7 \times 2} = \frac{7 \times 7 + 6 \times 6}{42} = \frac{49+36}{42} = \frac{85}{42} \text{ Vraie}$$

$$\frac{36}{5} - 3 = \frac{36-3 \times 5}{5} = \frac{21}{5} \text{ Vraie}$$

$$\frac{\frac{14}{15}}{\frac{21}{35}} = \frac{14}{15} \times \frac{35}{21} = \frac{7 \times 2 \times 7 \times 5}{3 \times 5 \times 3 \times 7} = \frac{14}{9} \text{ Vraie}$$

Question 3 bis : Quelles égalités sont vraies ?

$$\square \frac{5}{14} + \frac{4}{21} = \frac{9}{35} \quad \square \frac{3}{4} - \frac{5}{22} = \frac{23}{44} \quad \square 1 - \frac{2}{9} - \frac{4}{15} = \frac{23}{45} \quad \square \frac{-55}{21} \times \frac{42}{-77} = \frac{10}{7}$$

$$\frac{5}{14} + \frac{4}{21} = \frac{5}{7 \times 2} + \frac{2 \times 2}{7 \times 3} = \frac{5 \times 3 + 2 \times 2 \times 2}{7 \times 2 \times 3} = \frac{15+8}{42} = \frac{23}{42} \text{ Faux}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{22} = \frac{3}{2 \times 2} - \frac{5}{11 \times 2} = \frac{3 \times 11 - 5 \times 2}{44} = \frac{23}{44} \text{ Vraie}$$

$$1 - \frac{2}{9} - \frac{4}{15} = \frac{45}{45} - \frac{2 \times 5}{45} - \frac{4 \times 3}{45} = \frac{23}{45} \text{ Vraie}$$

$$\frac{-5}{21} \times \frac{42}{-77} = \frac{5 \times 11 \times 7 \times 3 \times 2}{3 \times 7 \times 7 \times 11} = \frac{10}{7} \text{ Vraie}$$

Question 4 : Pour tout réel x différent de $-\ln(2)$, on donne

$$A(x) = 3 - \frac{2e^{-x}-1}{e^{-x}-2} \text{ est égale à :}$$

$$\square \frac{1-5e^x}{1+2e^x} \quad \square \frac{1+5e^x}{1-2e^x} \quad \square \frac{1-5e^x}{1-2e^x} \quad \square \frac{1-5e^x}{-1+2e^x}$$

$$A(x) = 3 - \frac{2e^{-x} - 1}{e^{-x} - 2} = \frac{3(e^{-x} - 2) - 2e^{-x} + 1}{e^{-x} - 2} = \frac{3e^{-x} - 6 - 2e^{-x} + 1}{e^{-x} - 2}$$

$$A(x) = \frac{e^{-x}-5}{e^{-x}-2} = \frac{e^x(e^{-x}-5)}{e^x(e^{-x}-2)} = \frac{1-5e^x}{1-2e^x} \text{ réponse C}$$

Question 4 bis : Pour tout réel x différent de $-\ln(2)$, on donne

$$A(x) = 3 - \frac{2e^{-x}+1}{e^{-x}-2} \text{ est égale à :}$$

$$\square \frac{1-7e^x}{1+2e^x} \quad \square \frac{1+7e^x}{1-2e^x} \quad \square \frac{1-7e^x}{1-2e^x} \quad \square \frac{1-7e^x}{-1+2e^x}$$

$$A(x) = 3 - \frac{2e^{-x} + 1}{e^{-x} - 2} = \frac{3(e^{-x} - 2) - 2e^{-x} - 1}{e^{-x} - 2} = \frac{3e^{-x} - 6 - 2e^{-x} - 1}{e^{-x} - 2}$$

$$A(x) = \frac{e^{-x}-7}{e^{-x}-2} = \frac{e^x(e^{-x}-7)}{e^x(e^{-x}-2)} = \frac{1-7e^x}{1-2e^x} \quad \text{réponse C}$$

Dérivées et dérivées partielles :

Question 5 : La dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x) = \cos(x^5)$ est :

- ☐ $f'(x) = \sin(x^5)$
- ☐ $f'(x) = -5x^4 \sin(x^5)$
- ☐ $f'(x) = -\sin(x^5)$
- ☐ $f'(x) = 5x^4 \sin(x^5)$

Réponse : $f(x) = \cos(x^5) \quad \left(h(g(x)) \right)' = g'(x)h'(g(x))$

d'où $f'(x) = -5x^4 \sin(x^5)$ réponse B

Question 5 bis : La dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x) = (\cos(x))^5$ est :

- ☐ $f'(x) = -5\sin(x)(\cos(x))^4$
- ☐ $f'(x) = 5\sin(x)(\cos(x))^4$
- ☐ $f'(x) = -(\sin(x))^5$
- ☐ $f'(x) = (\sin(x))^5$

Réponse : $f(x) = (\cos(x))^5 \quad \left((u(x))^n \right)' = nu'(x)(u(x))^{n-1}$

d'où $f'(x) = -5\sin(x)(\cos(x))^4$ réponse A

Question 6 : On donne : $f(x, y) = x^2 e^{xy}$, on a :

- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{xy}$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 e^{xy}$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{xy} + x^2 ye^{xy}$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 ye^{xy}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xe^{xy} + x^2 ye^{xy} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 e^{xy}$$

Question 6 bis : On donne : $f(x, y) = (x^2 + y^2)\cos(xy)$, on a :

- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xysin(xy)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xcos(xy) - y(x^2 + y^2)sin(xy)$

$$\square \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2xysin(xy) \quad \square \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ycos(xy) - x(x^2 + y^2)sin(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xcos(xy) - y(x^2 + y^2)sin(xy) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ycos(xy) - x(x^2 + y^2)sin(xy)$$

Question 7 : Equation différentielle

Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y$?

- ☐ $y(x) = Ce^{3x}$, avec C une constante réelle.
- ☐ $y(x) = Ce^{-3x}$, avec C une constante réelle.
- ☐ $y(x) = \cos(3x) + C$, avec C une constante réelle.
- ☐ $y(x) = e^{3x} + C$, avec C une constante réelle.

Solution : $y' = 3y$ soit $\frac{y'}{y} = 3$, d'où en intégrant $\ln|y| = 3x + k$ d'où en passant à l'exponentielle $y(x) = e^{3x+k} = e^k \times e^{3x} = Ce^{3x}$ avec C une constante réelle.

Réponse A

Question 7 bis : Equa diff

Soit $f(x) = xe^{2x}$, de quelle équation différentielle cette fonction est-elle solution ?

- ☐ $y' - 2y = 0$
- ☐ $y' - 2y = xe^{2x}$
- ☐ $y' - 2y = e^{2x}$
- ☐ $y' - 2y = x$

Solution : on a $f(x) = xe^{2x}$ d'où $f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x + 1)e^{2x}$

$f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$ donc **réponse C**

Question 8 : Intégrales

Quelles sont les égalités qui sont vraies ?

- ☐ $\int_1^4 \left(t + 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{\sqrt{t}} \right) dt = \frac{1}{4}$
- ☐ $\int_1^4 \left(t + 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{\sqrt{t}} \right) dt = \frac{29}{4}$
- ☐ $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx = 2$

$$\square \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln(2)$$

Réponse : On connaît une primitive de $t + 1 + \frac{1}{t^2} - \frac{2}{\sqrt{t}}$:

$$F(t) = \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{t} - 4\sqrt{t} + C ; \text{ il vient :}$$

$$\left[\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{t} - 4\sqrt{t} \right]_1^4 = \frac{16}{2} + 4 - \frac{1}{4} - 8 - \left(\frac{1}{2} + 1 - 1 - 4 \right) = \frac{32+16-1-32-2+16}{4} =$$

29
4 Réponse B

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx, \text{ On reconnaît la forme } \frac{u'}{u} \text{ avec } u(x) = \ln(x)$$

Dont on connaît une primitive $F(u) = \ln(u)$, il vient :

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln(x)} dx = [\ln(\ln(x))]_e^{e^2} = \ln(2) - 0 = \ln(2) \text{ Réponse D}$$

Question 8 bis : Intégrales

Quelles sont les égalités qui sont vraies ?

$$\square \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = -\frac{1}{2}$$

$$\square \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2}$$

$$\square \int_1^3 \frac{2u}{\sqrt{u^2+2}} du = 2(\sqrt{11} - \sqrt{3})$$

$$\square \int_1^3 \frac{2u}{\sqrt{u^2+2}} du = 2(\sqrt{11} + \sqrt{3})$$

Réponse :

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln(x) dx ;$$

On reconnaît la forme $u'u$ avec $u(x) = \ln(x)$ dont on connaît une primitive

$$F(u) = \frac{u^2}{2} ; \text{ il vient } \left[\frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_1^e = \frac{1}{2} \text{ Réponse B}$$

$\int_1^3 \frac{2u}{\sqrt{u^2+2}} du$ on reconnaît la forme $2 \times \frac{v'}{2\sqrt{v}}$ avec $v = u^2 + 2$ et $v' = 2u$ dont on connaît une primitive $2\sqrt{v}$

$$\int_1^3 \frac{2u}{\sqrt{u^2+2}} du = [2\sqrt{u^2+2}]_1^3 = 2\sqrt{11} - 2\sqrt{3} = 2(\sqrt{11} - \sqrt{3}) \text{ D'où réponse C}$$

Question 9 : Matrices

On donne $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Le produit AB n'est pas défini
- ☐ Le produit BA n'est pas défini
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$
- ☐ $BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$

Réponse : $A^{3 \times 3}$ et $B^{2 \times 3}$ le produit AB n'est pas défini **Réponse A**

BA est défini et les calculs donnent $BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ **Réponse D**

Question 9 bis : Matrices

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Le produit AB n'est pas défini
- ☐ Le produit BA n'est pas défini
- ☐ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $BA = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{2 \times 3}$ et $B^{3 \times 3}$ Le produit AB est défini mais pas le produit BA **réponse B**

AB est défini et les calculs donnent $AB = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ **réponse C**

Question 10 : Nombres complexes

On considère le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3}i$

Quelles sont les affirmations qui sont vraies ?

- ☐ Son module vaut 2
- ☐ Son module vaut 4

☐ Son argument vaut $\frac{\pi}{3}$

☐ Son argument vaut $\frac{\pi}{4}$

Réponse : $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ Réponse A

$z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ son argument est $\frac{\pi}{3}$ Réponse C

Question 10 bis : Nombres complexes

On considère le nombre complexe $z = 1 + i$

☐ Son module vaut 2

☐ Son module vaut $\sqrt{2}$

☐ Son argument vaut $\frac{\pi}{3}$

☐ Son argument vaut $\frac{\pi}{4}$

Réponse : $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ Réponse B

$z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ son argument est $\frac{\pi}{4}$ Réponse D