

CHAPITRE 1 Suites et récurrence

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Dans ce chapitre, nous verrons le raisonnement par récurrence, et nous consoliderons et enrichirons les connaissances sur les suites vues en classe de Première.

Dans un premier temps, nous présenterons le raisonnement par récurrence.

Puis dans un deuxième temps, nous étudierons la notion de limite d'une suite. Nous verrons une définition plus formelle que celle vue en classe de Première, puis nous verrons différentes méthodes pour déterminer la limite d'une suite : opérations sur les limites, théorème de comparaison, théorème des gendarmes...

Enfin dans un dernier temps nous étudierons quelques cas particuliers de suites : les suites géométriques et les suites monotones.

Objectifs

- Démontrer une propriété par récurrence.
- Comprendre et utiliser la définition de limite d'une suite.
- Déterminer la limite d'une suite en utilisant les opérations sur les limites ou en levant une forme indéterminée.
- Déterminer la limite d'une suite en utilisant le théorème de comparaison ou le théorème des gendarmes.
- Déterminer la limite d'une suite géométrique.
- Étudier la convergence d'une suite monotone.
- Étudier la convergence d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 13

1. Calculer les termes d'une suite définie par une forme explicite

$$u_0 = 3^0 - 1 = 0$$

$$u^5 = 3^5 - 1 = 242$$

2. Calculer les termes d'une suite définie par une relation de récurrence

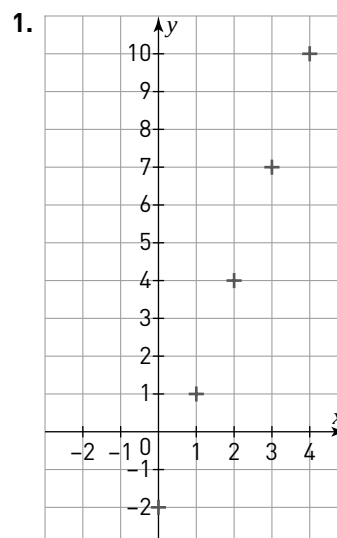
$$v_0 = 3$$

$$v_1 = 2v_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$v_2 = 2v_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

$$v_3 = 2v_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$$

3. Représenter graphiquement une suite



2. $v_0 = 3$; $v_1 = -2$; $v_2 = 1$; $v_3 = 5$; $v_4 = -2$

4. Étudier les variations d'une suite

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= (n+1)^2 - 8 - (n^2 - 8) \\
 &= n^2 + 2n + 1 - 8 - n^2 + 8 \\
 &= 2n + 1
 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{3^n}}{\frac{2^n}{3^{n-1}}} = \frac{2^{n+1}}{3^n} \times \frac{3^{n-1}}{2^n} = \frac{2}{3} < 1$$

Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

5. Modéliser avec une suite

$$1. 1500 \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) + 500 = 1550$$

Donc il y aura 1 550 élèves inscrits le 1^{er} septembre 2021.

2. Soit u_n le nombre d'élèves inscrits le 1^{er} septembre 2020 + n .

$u_0 = 1\,500$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{30}{100}\right)u_n + 500 = 0,7u_n + 500$$

6. Utiliser les suites arithmétiques et géométriques

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + (-3)$.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -3$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r$

$$\text{Donc } u_n = 5 - 3n$$

$$\text{b) } u_{10} = 5 - 3 \times 10 = -25$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2 \times v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

$$\text{Donc } v_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$\text{b) } v_{10} = 3 \times 2^{10-1} = 1\,536$$

Activités

p. 14-15

1 Introduire le raisonnement par récurrence

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Introduire le raisonnement par récurrence à l'aide d'un exemple concret.

$$1. 2\,000 \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 200 = 2\,000$$

Donc en 2021, il y aura 2 000 films sur la plateforme.

$$2\,000 \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 200 = 2\,000$$

Donc en 2022, il y aura 2 000 films sur la plateforme.

2. D'après la question 1., on peut croire cette publicité, et penser qu'il y aura toujours 2 000 films sur la plateforme.

3. a) $u_0 = 2\,000$; $u_1 = 2\,000$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 200 = 0,9u_n + 200$$

c) On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\,000$

4. a) P_0 : « $u_0 = 2\,000$ ». Donc P_0 est vraie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = 2\,000$.

$$\text{Or } u_{n+1} = 0,9 \times u_n + 200$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = 0,9 \times 2\,000 + 200 = 2\,000$$

Donc P_{n+1} est vraie.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2\,000$.

Donc en 2050, il y aura 2 000 films à la disposition des clients.

2 Introduire la définition de limite d'une suite

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Introduire la définition de limite d'une suite (suite ayant pour limite un nombre réel, suite ayant pour limite l'infini).

A. Étude de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2$

$$1. u_0 = 0 ; u_{10} = 10^2 = 100$$

$$u_{100} = 100^2 = 10\,000$$

On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2. a) $n^2 > 100 \Leftrightarrow n > 10$ car $n \geq 0$.

Il faut donc choisir $N = 11$.

b) $n^2 > 1\,000 \Leftrightarrow n > \sqrt{1\,000}$ car $n \geq 0$.

Il faut donc choisir $N = 32$.

c) $n^2 > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ car $n \geq 0$.

Il faut donc choisir le plus petit entier naturel N tel que $N > \sqrt{A}$.

B. Étude de la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

par $v_n = 1 + \frac{1}{n}$

$$1. v_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2; v_{10} = 1 + \frac{1}{10} = 1,1$$

$$v_{100} = 1 + \frac{1}{100} = 1,01$$

2. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

3. a) $v_n \in]0,9; 1,1[\Leftrightarrow 0,9 < 1 + \frac{1}{n} < 1,1$

$$\Leftrightarrow -0,1 < \frac{1}{n} < 0,1$$

$\Leftrightarrow n > 10$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $\frac{1}{n} > 0$. Il faut donc choisir $N = 11$.

b) $v_n \in]0,99; 1,01[\Leftrightarrow 0,99 < 1 + \frac{1}{n} < 1,01$

$$\Leftrightarrow -0,01 < \frac{1}{n} < 0,01$$

$\Leftrightarrow n > 100$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $\frac{1}{n} > 0$. Il faut donc choisir $N = 101$.

c) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur : $v_n \in [1 - 10^{-k}; 1 + 10^{-k}]$. Les éditions suivantes sont corrigées et utilisent

$v_n \in [1 - 10^{-k}; 1 + 10^{-k}]$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $v_n \in]1 - 10^{-k}; 1 + 10^{-k}[$

$$\Leftrightarrow 1 - 10^{-k} < 1 + \frac{1}{n} < 1 + 10^{-k} \Leftrightarrow -10^{-k} < \frac{1}{n} < 10^{-k}$$

$\Leftrightarrow n > 10^k$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $\frac{1}{n} > 0$.

Il faut donc choisir $N = 10^k + 1$.

3 Découvrir les propriétés des limites

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Découvrir des propriétés sur les limites (théorème de comparaison et théorème des gendarmes) à l'aide d'une approche graphique.

A. Théorème de comparaison

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

2. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

B. Théorème des gendarmes

$$1. w_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1; w_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}; w_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3};$$

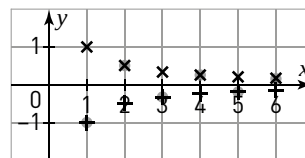
$$w_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}; w_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

Donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ car $n > 0$. Donc $-\frac{1}{n} \leq w_n \leq \frac{1}{n}$.

3. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est représentée par des $\times$, la suite

$\left(-\frac{1}{n}\right)$ par des $+$, et la suite (w_n) par des $\bullet$.



$$4. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

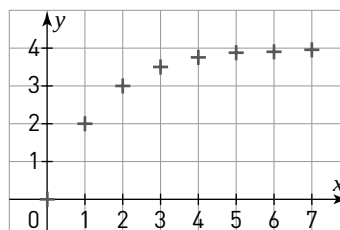
5. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

4 Étudier des suites monotones

• **Durée estimée :** 25 min

• **Objectif :** Étudier des suites monotones, et conjecturer ou déterminer leur convergence.

1. Julie a tort : il suffit de construire une suite comme celle représentée ci-dessous, qui est strictement croissante et converge vers 4.



2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = 4 - \frac{1}{n+1} - \left(4 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$.

Donc $4 - \frac{1}{n} < 4$. Donc $u_n < 4$.

c) $u_1 = 4 - \frac{1}{1} = 3$; $u_{10} = 4 - \frac{1}{10} = 3,9$

$$u_{100} = 4 - \frac{1}{100} = 3,99$$

On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - n^2$$

$$= n^2 + 2n + 1 - n^2$$

$$= 2n + 1$$

Donc $v_{n+1} - v_n > 0$.

Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

b) $v_n > A \Leftrightarrow n^2 > A$
 $\Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ car $n \geq 0$.

Donc n_0 est le plus petit entier naturel strictement supérieur à $\sqrt{A}$.

Donc $n_0 = E(\sqrt{A}) + 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

c) D'après la question **b)**, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_{n+1} - w_n = -1 + 0,5^{n+1} - (-1 + 0,5^n)$$

$$= 0,5^n \times (0,5 - 1)$$

$$= -0,5 \times 0,5^n$$

Donc $w_{n+1} - w_n < 0$.

Donc la suite (w_n) est strictement décroissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,5^n > 0$.

Donc $-1 + 0,5^n > -1$. Donc $w_n > -1$

c) $w_0 = -1 + 0,5^0 = 0$

$$w_{10} = -1 + 0,5^{10} \approx 0,999$$

$$w_{100} = -1 + 0,5^{100} \approx -1$$

On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -1$.

À vous de jouer

p. 17-27

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété

$$P(n) : \ll S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \gg.$$

Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = 1^2 = 1$ et

$$\frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6} = 1.$$

$$\text{Donc } S_1 = \frac{1 \times (1+1) \times (2 \times 1 + 1)}{6}.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1) [n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$\text{Or } \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$\text{donc } S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété

$$P(n) : \ll S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \gg.$$

Initialisation : pour $n = 1$, $S_1 = 1^3 = 1$ et $\frac{1^2 \times (1+1)^2}{4} = 1$

$$\text{Donc } S_1 = \frac{1^2 \times (1+1)^2}{4}.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} \\
 &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\
 &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}
 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n < u_{n+1}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = -3$ et

$$u_1 = 2u_0 + 7 = 2 \times (-3) + 7 = 1.$$

Donc $u_0 < u_1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_n < u_{n+1}$.

Donc $2u_n < 2u_{n+1}$.

Donc $2u_n + 7 < 2u_{n+1} + 7$.

Donc $u_{n+1} < u_{n+2}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $0 < u_{n+1} < u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 10$ et

$$u_1 = \sqrt{3u_0 + 7} = \sqrt{37}. \text{ Donc } 0 < u_1 < u_0.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $0 < u_{n+1} < u_n$.

Donc $0 < 3u_{n+1} < 3u_n$.

Donc $7 < 3u_{n+1} + 7 < 3u_n + 7$.

Donc $\sqrt{3u_{n+1} + 7} < \sqrt{3u_n + 7}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $u_{n+2} < u_{n+1}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

5. a) $u_n > A \Leftrightarrow n^2 - 4 > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A+4}$

Posons $n_0 = E(\sqrt{A+4}) + 1$.

Pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > A$.

b) Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6. 1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

```

2. n = 0
    u = -1
    while u >= -10000 :
        u = 3*u+1
        n = n+1
    print(n)

```

3. À l'aide de la calculatrice, on trouve que cet entier est 10.

7. 1. Pour tous réels positifs a et b .

$$5 - a < v_n < 5 + b \Leftrightarrow 5 - a < 5 + \frac{1}{n} < 5 + b$$

$\Leftrightarrow -a < \frac{1}{n} < b \Leftrightarrow n > \frac{1}{b}$ (si $b \neq 0$) car $\frac{1}{n} > 0$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur

$]0 ; +\infty[$. Donc $n_0 = E\left(\frac{1}{b}\right) + 1$.

2. On en déduit donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 5$.

8. 1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

```

2. n = 0
    v = -1
    while v <= 10000 :
        v = 2*v+7
        n = n+1
    print(n)

```

3. À l'aide de la calculatrice, on trouve que cet entier est 11.

9. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (par somme).

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (par produit et somme).

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 5 = +\infty$ (par produit et somme).

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n - 5} = 0$ (par quotient).

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ (par produit).

10. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -10 = -10$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 10 \right) = -10$ (par somme).

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n} \right) = 0$ (par produit).

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ (par somme).

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{1 + \frac{1}{n}} \right) = 3$ (par quotient).

11. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $-\infty + \infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 (-n + 2)$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n + 2 = -\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ (par produit).

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (par produit).

12. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n \times \left(3 + \frac{1}{n} \right)}{n \times \left(5 - \frac{2}{n} \right)} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{5 - \frac{2}{n}}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{5}$.

b) Pour tout entier $n \geq 2$,

$v_n = \frac{n \times (2)}{n^2 \times \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right)} = \frac{2}{n \times \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right)}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = -1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) = -\infty$.

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

13. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

Donc $n^2 - 5 \leq u_n \leq n^2 + 5$.

Donc $u_n \geq n^2 - 5$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5 = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

14. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(2n) \leq 1$.

Donc $-\sqrt{n} - 1 \leq v_n \leq -\sqrt{n} + 1$.

Donc $v_n \leq -\sqrt{n} + 1$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} + 1 = -\infty$

D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$.

Donc $-5 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq -5 + \frac{1}{n}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} -5 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -5 + \frac{1}{n} = -5$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -5$.

16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

Donc $42 - \frac{5}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq 42 + \frac{5}{\sqrt{n}}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 42 - \frac{5}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 42 + \frac{5}{\sqrt{n}} = 42.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 42$.

17. a) $4 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) $7 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 7^n = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

18. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 5^n$,
 $5 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 7 \times 0,2^n$ et
 $-1 < 0,2 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^n = 0$.
 Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{19. 1.} \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n - 2 &= \frac{2n-2}{n+4} - 2 \\ &= \frac{2n-2-2(n+4)}{n+4} \\ &= \frac{-10}{n+4} \end{aligned}$$

Donc $u_n - 2 < 0$. Donc $u_n < 2$.
 Donc (u_n) est majorée par 2.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)-2}{n+1+4} - \frac{2n-2}{n+4} = \frac{2n}{n+5} - \frac{2n-2}{n+4} \\ &= \frac{2n \times (n+4) - (2n-2)(n+5)}{(n+5)(n+4)} \\ &= \frac{10}{(n+5)(n+4)} \end{aligned}$$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

3. La suite (u_n) est croissante majorée. Donc elle converge.

20. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq 0$.

Donc $n^2 + 4 \geq 4$. Donc $v_n \geq 4$.

Donc (v_n) est minorée par 4.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 4 - (n^2 + 4) = 2n + 1$$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$. Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

3. La suite (v_n) est croissante et minorée.

On ne peut pas appliquer le théorème de convergence des suites monotones. Il faudrait avoir une suite croissante majorée, ou décroissante minorée.

21. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 5 > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n \geq n + 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 4$, donc $u_0 \geq 0 + 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

Donc $u_{n+1} \geq n + 1 + 2n + 5$

donc $u_{n+1} \geq n + 2$ car $2n + 4 > 0$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n + 1$.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. $u_0 = 4$

$$u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 5 = 9$$

$$u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 5 = 16$$

On conjecture que $u_n = (n+2)^2$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = (n+2)^2$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 4$, donc $u_0 = (0+2)^2$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 5$.

Donc $u_{n+1} = (n+2)^2 + 2n + 5$.

Donc $u_{n+1} = n^2 + 6n + 9$.

Donc $u_{n+1} = (n+3)^2 = (n+1+2)^2$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+2)^2$.

22. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n \geq \sqrt{n}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$, donc $u_0 \geq \sqrt{0}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_n \geq \sqrt{n}$. Donc $u_n^2 \geq n$.

Donc $u_n^2 + 1 \geq n + 1$.

Donc $\sqrt{u_n^2 + 1} \geq \sqrt{n+1}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $u_{n+1} \geq \sqrt{n+1}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{n}$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. $u_0 = 0$

$$u_1 = \sqrt{0^2 + 1} = 1$$

$$u_2 = \sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}$$

$$u_3 = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$$

On conjecture que $u_n = \sqrt{n}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_n = \sqrt{n}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$, donc $u_0 = \sqrt{0}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$. Donc $u_{n+1} = \sqrt{(\sqrt{n})^2 + 1}$.

Donc $u_{n+1} = \sqrt{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$.

23. 1. $u_0 = 500$

$$u_1 = 500 \times 0,8 + 200 = 600$$

2. On prévoit que chaque année, 80 % des abonnés renouvelleront leur abonnement et 200 nouvelles personnes s'abonneront.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,8u_n + 200$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_n \leq u_{n+1} \leq 1\,000$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 500$ et $u_1 = 600$. Donc $u_0 \leq u_1 \leq 1\,000$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_n \leq u_{n+1} \leq 1\,000$

$$0,8u_n + 200 \leq 0,8u_{n+1} + 200 \leq 0,8 \times 1\,000 + 200$$

donc $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1\,000$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 1\,000$.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

Soit ℓ sa limite.

$$\ell = 0,8\ell + 200 \Leftrightarrow 0,2\ell = 200 \Leftrightarrow \ell = 1\,000$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1\,000$.

$$\mathbf{24. 1.} \quad u_1 = (1000 - 10) \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1\,009,8$$

2. Chaque année, la banque lui prélève 10 € en juin mais en décembre elle lui verse 2 % de la somme disponible sur le compte.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n - 10) \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) \\ &= (u_n - 10) \times 1,02 \\ &= 1,02u_n - 10,2 \end{aligned}$$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 510 \\ &= 1,02u_n - 10,2 - 510 \\ &= 1,02u_n - 520,2 \\ &= 1,02 \left(u_n - \frac{520,2}{1,02}\right) \\ &= 1,02(u_n - 510) \\ &= 1,02v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme $v_0 = u_0 - 510 = 490$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 490 \times 1,02^n$

or $v_n = u_n - 510$. Donc $u_n = v_n + 510$.

Donc $u_n = 490 \times 1,02^n + 510$.

c) $1,02 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,02^n = +\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercices apprendre à démontrer

p. 28

Pour s'entraîner

Soit $A > 0$. La suite (u_n) n'est pas minorée.

Donc pour tout réel m , il existe un entier p tel que $u_p < m$.

Donc il existe un entier naturel p tel que $u_p < -A$.

Or la suite (u_n) est décroissante.

Donc pour tout entier $n \geq p$, $u_n \leq u_p$.

Donc pour tout entier $n \geq p$, $u_n \leq u_p < -A$.

Donc $u_n < -A$, soit $u_n \in]-\infty; -A[$.

Donc par définition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exercices calculs et automatismes

p. 29

25. Calculer les termes d'une suite

1. a) $u_0 = 3 \times 0 - 5 = -5$

b) $u_{10} = 3 \times 10 - 5 = 25$

2. $v_0 = 3$

$v_1 = 2 \times v_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

$v_2 = 2 \times v_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$

26. Calculer les termes d'une suite géométrique

a) $u_1 = u_0 \times 2 = 3 \times 2 = 6$

b) $u_4 = u_0 \times 2^4 = 3 \times 2^4 = 48$

27. Calculer les termes d'une suite arithmétique

a) $u_2 = u_1 + (-5) = 4 - 5 = -1$

b) $u_{11} = u_1 + (11 - 1) \times (-5) = 4 - 10 \times 5 = -46$

28. Déterminer la raison d'une suite géométrique

$u_6 = u_4 \times q^{6-4}$

Donc $48 = 3 \times q^2$,

$q^2 = \frac{48}{3} = 16$ et $q > 0$, donc $q = 4$.

29. Déterminer la raison d'une suite arithmétique

$u_7 = u_4 + r \times (7 - 4)$

Donc $18 = 3 + 3r$. Donc $3r = 15$. Donc $r = 5$.

30. Donner des exemples de suites

a) $u_n = n$

b) $u_n = -2 + \frac{1}{n}$

c) $u_n = -n^2$

d) $u_n = (-1)^n$

31. Limites de suites

1. a)

2. c)

3. b)

32. Limite de suites géométriques

a) **Faux** $10 > 1$ et $-1 < 0$, donc elle a pour limite $-\infty$.

b) **Vrai** car $2 > 1$ et $1 > 0$.

c) **Faux** $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc elle a pour limite 0.

d) **Vrai** $0 < 0,25 < 1$.

33. Lecture graphique (1)

a) $u_0 = 3$; $u_1 = -1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$

b) On peut dire que la suite (u_n) n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

34. Lecture graphique (2)

1. c)

2. b)

35. Méthode pour déterminer l'expression d'une suite

Il faut d'abord déterminer si (u_n) est une suite arithmétique ou une suite géométrique.

Ici (u_n) est une suite géométrique car $u_{n+1} = q \times u_n$ avec $q = \frac{1}{4}$.

Il faut donc appliquer la formule du cours pour une suite géométrique : $u_0 \times q^n$ si on nous donne u_0 , ou $u_p \times q^{n-p}$ si on nous donne un autre terme.

Ici on nous donne u_0 , donc pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

36. Méthode pour démontrer une propriété par récurrence

Pour démontrer par récurrence une propriété $P(n)$ pour tout entier naturel $n \geq n_0$, il faut procéder en trois étapes.

Initialisation : on montre que $P(n_0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $n \geq n_0$.
On suppose que $P(n)$ est vraie, et on montre que $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

Exercices d'application

p. 30-32

Démontrer par récurrence

37. Soit x un réel quelconque.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $|x^n| = |x|^n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $|x^0| = |1| = 1$ et $|x|^0 = 1$.
Donc $|x^0| = |x|^0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a } |x^{n+1}| &= |x^n \times x| \\ &= |x^n| \times |x| \\ &= |x|^n \times |x| \\ &= |x|^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x^n| = |x|^n$.

38. 1. Si $n = 1$, alors $n^2 < 2n$.

Donc Jason a tort.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie.
Donc $n^2 > 2n$.

$$\text{On a } (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$\text{Donc } (n+1)^2 > 2n + 2n + 1.$$

$$\text{Or } n \geq 1, \text{ donc } 2n \geq 2.$$

$$\text{Donc } (n+1)^2 > 2 + 2n + 1.$$

$$\text{Donc } (n+1)^2 > 2(n+1) + 1$$

$$\text{donc } (n+1)^2 > 2(n+1)$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{b) } 0^2 = 0 \text{ et } 2 \times 0 = 0. \text{ Donc } 0^2 = 2 \times 0.$$

Donc $P(0)$ n'est pas vraie.

c) Le plus petit entier n_0 tel que $P(n_0)$ soit vraie est 3. ($3^2 > 2 \times 3$)

d) Il faut donc corriger l'affirmation de Jason :
pour tout entier $n \geq 3$, $n^2 > 2n$.

39. Soit x un réel quelconque.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $f(2^n \times x) = f(x)$ »

Initialisation : pour $n = 0$,

$$f(2^0 \times x) = f(1 \times x) = f(x).$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a } f(2^{n+1} \times x) &= f(2 \times 2^n \times x) \\ &= f(2^n \times x) \\ &= f(x) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(2^n \times x) = f(x)$.

40. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « 4 divise $5^n - 1$ »

Initialisation : pour $n = 0$,

$$5^0 - 1 = 0. \text{ 4 divise 0, donc 4 divise } 5^0 - 1.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$5^{n+1} - 1 = 5 \times 5^n - 1$$

$$\text{or 4 divise } 5^n - 1.$$

$$\text{Donc il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 5^n - 1 = 4k$$

$$\text{donc } 5^n = 1 + 4k$$

$$\text{donc } 5^{n+1} - 1 = 5 \times (1 + 4k) - 1$$

$$= 5 + 5 \times 4k - 1$$

$$= 4 + 5 \times 4k$$

$$= 4 \times (1 + 5k)$$

$$\text{or } 1 + 5k \in \mathbb{Z}. \text{ Donc 4 divise } 5^{n+1} - 1.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4 divise $5^n - 1$.

41. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété
 $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 5 > 0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$u_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc $3u_n > 0$.

Donc $3u_n + 6 > 6$.

Donc $u_{n+1} > 6 > 0$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

42. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $2,5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 10$, et

$$u_1 = \sqrt{10+5} = \sqrt{15} \approx 3,87$$

donc $2,5 \leq u_1 \leq u_0 \leq 10$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $2,5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$.

Donc $7,5 \leq u_{n+1} + 5 \leq u_n + 5 \leq 15$.

Donc $\sqrt{7,5} \leq \sqrt{u_{n+1}+5} \leq \sqrt{u_n+5} \leq \sqrt{15}$

car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Donc $2,5 \leq \sqrt{7,5} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{15} \leq 10$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2,5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$.

43. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_{n+1} < u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 9$, et $u_1 = \sqrt{9} = 3$.
Donc $u_1 < u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} < u_n$

donc $\sqrt{u_{n+1}} < \sqrt{u_n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Donc $u_{n+2} < u_{n+1}$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $0 \leq u_n \leq 9$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 9$, donc $0 \leq u_0 \leq 9$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $0 \leq u_n \leq 3$

donc $0 \leq \sqrt{u_n} < \sqrt{9}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 3 \leq 9$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 9$.

44. 1. $u_0 = 0$; $u_1 = u_0 + 0 = 0$

$u_2 = u_1 + 1 = 1$; $u_3 = u_2 + 2 = 3$; $u_4 = u_3 + 3 = 6$;

$u_5 = u_4 + 4 = 10$.

On conjecture que pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Or $u_0 = 0$, donc on conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{(n-1)n}{2}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$$P(n) : \ll u_n = \frac{(n-1)n}{2} \gg.$$

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $\frac{(0-1)0}{2} = 0$, donc $u_0 = \frac{(0-1)0}{2}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = u_n + n$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_{n+1} &= \frac{(n-1)n}{2} + n \\ &= \frac{(n-1)n + 2n}{2} \\ &= \frac{n(n-1+2)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(n-1)n}{2}$.

45. 1. $v_0 = 1$ $v_1 = \frac{v_0}{v_0 + 1} = \frac{1}{2}$

$v_2 = \frac{v_1}{v_1 + 1} = \frac{1}{3}$ $v_3 = \frac{v_2}{v_2 + 1} = \frac{1}{4}$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n) : \ll v_n = \frac{1}{n+1} \gg$.

Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 1$ et $\frac{1}{0+1} = 1$ donc $v_0 = \frac{1}{0+1}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $v_{n+1} = \frac{v_n}{v_n + 1}$.

Donc $v_{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1} + 1} = \frac{1}{1 + (n+1)} = \frac{1}{n+2}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1}$.

Limite d'une suite

46. 1. $u_n < -A \Leftrightarrow -n^2 + 5 < -A$
 $\Leftrightarrow n^2 > A + 5$
 $\Leftrightarrow n > \sqrt{A+5}$

Donc $n_0 = E(\sqrt{A+5}) + 1$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

47. 1. Pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$-\varepsilon < u_n < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \text{ car } \frac{1}{n^2} > 0$
 $\Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \text{ car la fonction inverse est}$

strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

$\Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \text{ donc } n_0 = E\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + 1$.

2. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

48. 1. Pour tous réels a et b strictement positifs, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $20 - a < u_n < 20 + b$.

Donc tout intervalle ouvert contenant 20 contient tous les termes de la suite.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20$.

49. 1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

2. a) $n = 4$

b) $n = 11$

c) $n = 32$

50. 1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. a) $n = 5$

b) $n = 11$

c) $n = 22$

51. 1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,7^n > 0$

donc $2 + 0,7^n > 2$. Donc $u_n > 2$.

3. a) $n = 7$

b) $n = 13$

c) $n = 20$

52. 1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. a)

```
n = 0
u = 2
while u <= 1000 :
    u = 3*u
    n = n+1
print(n)
```

b) Cet entier est 6.

53. 1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

2. a)

```
n = 0
v = 1
while v >= 0.001 :
    n = n+1
    v = 1/(2*n+1)
print(n)
```

b) Cet entier est 500.

Opérations sur les limites

54. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

55. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -3$

56. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \frac{1}{n} \right) = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^4} - 5 \right) = -5$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + n = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

57. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - n^2) = -\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \right) = -2$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

58. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^2 \times \left(1 - \frac{2}{n} \right)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n} \right) = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^3 \times \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3) = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1 \right) = -1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

59. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n = n^3 \times \left(\frac{3}{n^2} - 1 + \frac{2}{n^3} \right)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n^2} - 1 + \frac{2}{n^3} \right) = -1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{n \times \left(1 - \frac{5}{n} \right)}{n \times \left(2 + \frac{4}{n} \right)} = \frac{1 - \frac{5}{n}}{2 + \frac{4}{n}}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{n} \right) = 1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{4}{n} \right) = 2$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}$

60. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^3 \times \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} - 1 \right)$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} - 1 \right) = -1$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$v_n = \frac{n^3 \times \left(1 + \frac{2}{n^3} \right)}{n^2 \times \left(2 - \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{n \times \left(1 + \frac{2}{n^3} \right)}{2 - \frac{1}{n^2}}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n^3} \right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2} \right) = 2$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

61. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n^2 \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{n \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{1 + \frac{1}{n}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{n \times \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n \times \left(2 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}}.$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{2}$$

62. 1. Non, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2) = +\infty$.

On obtient une forme indéterminée de la forme « $0 \times +\infty$ ».

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n - \frac{2}{n}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Limite et comparaison

63. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n + 1 = n + 2n + 1$.

Donc $3n + 1 > n$.

Donc $\sqrt{3n + 1} > \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $u_n > \sqrt{n}$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

64. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$.

Donc $-n - 1 \leq u_n \leq -n + 1$.

Donc $u_n \leq -n + 1$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

65. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

Donc $(n + 1)^2 - n \leq u_n \leq (n + 1)^2 + n$.

Donc $n^2 + n + 1 \leq u_n \leq n^2 + 3n + 1$.

Or $n + 1 > 0$.

Donc $u_n \geq n^2$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

66. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{4}{n+1}\right) = 2$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.

67. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -3$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n^2 + 1}\right) = -3$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -3$.

68. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.

Donc $-5 - \frac{1}{n^2} \leq v_n \leq -5 + \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-5 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-5 + \frac{1}{n^2}\right) = -5$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5$.

69. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

$$\text{Donc } 4 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq w_n \leq 4 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 4$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 4.$$

70. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$.

$$\text{Donc } 42 - \frac{1}{n^5} \leq u_n \leq 42 + \frac{1}{n^5}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(42 - \frac{1}{n^5} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(42 + \frac{1}{n^5} \right) = 42$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 42.$$

Suites géométriques

71. a) $u_n = 2 \times 4^n$

Or $4 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) $v_n = -3 \times 4^n$

Or $4 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

c) (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

$$\text{Donc } w_n = 2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^n.$$

$$\text{Or } -1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0.$$

72. a) $u_n = -2 \times 0,6^{n-1}$.

Or $-1 < 0,6 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^{n-1} = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

b) $3 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

73. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1,5a_n$.

Donc (a_n) est une suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme $a_0 = -1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = -1 \times 1,5^n$.

$$1,5 > 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1,5^n = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty.$$

74. 1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 \times e^n$.

Donc u_n est de la forme $u_0 \times q^n$ avec $u_0 = 1$ et $q = e$.
Donc (u_n) est une suite géométrique de raison e .

b) $e > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{-n}$.

$$\text{Donc } v_n = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e} \right)^n = q^n \text{ en posant } q = \frac{1}{e}.$$

b) $-1 < \frac{1}{e} < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} \right)^n = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

75. 2 > 1 , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$.

$-1 < 0,5 < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

76. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n \left(1 - \frac{2^n}{3^n} \right)$.

$$u_n = 3^n \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$-1 < \frac{2}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n = 1.$$

$3 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

77. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n \left(1 - \frac{5^n}{2^n} \right)$.

$$v_n = 2^n \left(1 - \left(\frac{5}{2} \right)^n \right)$$

$2 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$.

$$\frac{5}{2} > 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{5}{2}\right)^n = -\infty. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

78. 1. $u_0 = 1\,500$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1,02u_n.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,02.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 1\,500 \times 1,02^n.$$

3. $1,02 > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,02^n = +\infty$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Convergence des suites monotones

79. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 1 + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{(n - (n+1))}{n \times (n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{n} > 0.$$

Donc $u_n > 1$. Donc (u_n) est minorée par 1.

3. La suite (u_n) est strictement décroissante et minorée. Donc elle converge.

80. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \end{aligned}$$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$. Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

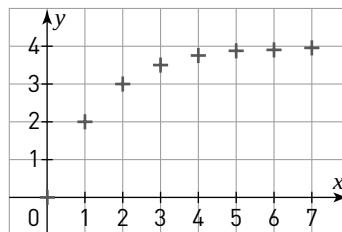
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n - 1 = 1 - \frac{1}{n^2} - 1 = -\frac{1}{n^2} < 0.$$

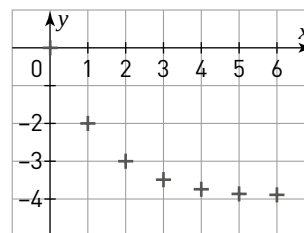
Donc $v_n < 1$. Donc (v_n) est majorée par 1.

3. La suite (v_n) est strictement croissante et majorée. Donc elle est convergente.

81. 1. Faux contre-exemple : une suite comme celle représentée ci-dessous, qui est strictement croissante et converge vers 4.



2. Faux contre-exemple : une suite comme celle représentée ci-dessous, qui est strictement décroissante et converge vers -4.



3. Faux contre-exemple : $u_n = (-1)^n$.

La suite est bornée, mais ne converge pas.

4. Faux contre-exemple : la suite représentée à la question 1.

82. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-2(n+1)+1}{n+1+3} - \frac{-2n+1}{n+3} \\ &= \frac{-2n-1}{n+4} - \frac{-2n+1}{n+3} \\ &= \frac{(-2n-1)(n+3) - (-2n+1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} \\ &= \frac{-2n^2 - 6n - n - 3 - (-2n^2 - 8n + n + 4)}{(n+4)(n+3)} \\ &= \frac{-7}{(n+4)(n+3)} \end{aligned}$$

donc $u_{n+1} - u_n < 0$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

$$\begin{aligned} \text{2. Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n - (-2) &= \frac{-2n+1}{n+3} + 2 \\ &= \frac{-2n+1+2(n+3)}{n+3} \\ &= \frac{7}{n+3} \end{aligned}$$

donc $u_n - (-2) > 0$. Soit $u_n > -2$.

Donc (u_n) est minorée par -2.

3. La suite (u_n) est strictement décroissante et minorée. Donc elle converge.

83. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{6(n+1)+3}{n+1+1} - \frac{6n+3}{n+1} \\ &= \frac{6n+9}{n+2} - \frac{6n+3}{n+1} \\ &= \frac{(6n+9)(n+1) - (6n+3)(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{6n^2 + 6n + 9n + 9 - (6n^2 + 12n + 3n + 6)}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{3}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

donc $v_{n+1} - v_n > 0$. Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

$$\begin{aligned} 2. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n - 6 &= \frac{6n+3}{n+1} - 6 \\ &= \frac{6n+3 - 6(n+1)}{n+1} \\ &= \frac{-3}{n+1} \end{aligned}$$

donc $v_n - 6 < 0$, soit $v_n < 6$.

Donc (v_n) est majorée par 6.

3. La suite (v_n) est strictement croissante et majorée. Donc elle est convergente.

84. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 0,5u_n + 1 - u_n = -0,5u_n + 1$$

or $1 < u_n < 2$.

$$\text{Donc } -0,5 > -0,5u_n > -0,5 \times 2$$

donc $0,5 > -0,5u_n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 2. Donc elle converge.

85. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = 0,75v_n + 1 - v_n = -0,25v_n + 1$$

or $2 < v_n < 4$.

$$\text{Donc } -0,25 \times 2 > -0,25v_n > -0,25 \times 4.$$

Donc $0,5 > -0,25v_n + 1 > 0$. Donc $v_{n+1} - v_n > 0$. Donc la suite (v_n) est strictement croissante.

2. La suite (v_n) est strictement croissante et majorée par 4. Donc elle converge.

Exercices d'entraînement

p. 33-37

Démontrer par récurrence

86. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$: « Soit f la fonction définie par $f(x) = x^n$. Alors pour tout réel x , $f'(x) = n \times x^{n-1}$. »

Initialisation : pour $n = 1$.

Pour tout réel x , $f(x) = x^1 = x$ et $f'(x) = 1$.

Or $1 \times x^{1-1} = 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = x^{n+1} = x^n \times x.$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$f'(x) = n \times x^{n-1} \times x + x^n \times 1$ d'après l'hypothèse de récurrence.

$$f'(x) = (n+1) \times x^n.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc si f est la fonction définie par $f(x) = x^n$, alors pour tout réel x , $f'(x) = n \times x^{n-1}$.

87. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$:

$$\ll (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \gg$$

Initialisation : pour $n = 0$, n est pair et $(-1)^0 = 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$(-1)^{n+1} = (-1)^n \times (-1)$$

si $n+1$ est pair, alors n est impair, et

$$(-1)^{n+1} = (-1) \times (-1) = 1$$

si $n+1$ est impair, alors n est pair, et

$$(-1)^{n+1} = 1 \times (-1) = -1$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$88. u_1 = \frac{1}{3}; u_2 = \frac{u_1 + 1}{4} = \frac{1}{3}; u_3 = \frac{u_2 + 1}{4} = \frac{1}{3}.$$

On conjecture que $u_n = \frac{1}{3}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété

$$P(n) : \ll u_n = \frac{1}{3} \gg.$$

Initialisation : pour $n = 1$, $u_1 = \frac{1}{3}$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+1} &= \frac{u_n + 1}{4} \\ &= \frac{\frac{1}{3} + 1}{4} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{3}.$$

89. Pour tout entier $n \geq 4$, on considère la propriété $P(n) : \ll u_n = 3 \times 2^{n-4} - 1 \gg$.

Initialisation : pour $n = 4$, $u_4 = 2$ et $3 \times 2^{4-4} - 1 = 2$.
Donc $u_4 = 3 \times 2^{4-4} - 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 4$.

Hérédité : on considère un entier $n \geq 4$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+1} &= 2u_n + 1 \\ &= 2 \times (3 \times 2^{n-4} - 1) + 1 \\ &= 3 \times 2^{n+1-4} - 1 \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 4$, $P(n)$ est vraie, soit $u_n = 3 \times 2^{n-4} - 1$.

90. Pour tout entier $n \geq p$, on considère la propriété $P(n) : \ll v_n = v_p \times q^{n-p} \gg$.

Initialisation : pour $n = p$, $v_p \times q^{p-p} = v_p$ donc la propriété est vraie pour $n = p$.

Hérédité : on considère un entier $n \geq p$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a } v_{n+1} &= v_n \times q \\ &= v_p \times q^{n-p} \times q \\ &= v_p \times q^{n+1-p} \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq p$, $P(n)$ est vraie, soit $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

91. Soit a un entier tel que $a \neq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n) : \ll a - 1 \text{ divise } a^n - 1 \gg$.

Initialisation : pour $n = 1$, $a^1 - 1 = a - 1$ donc $a - 1$ divise $a^1 - 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $a^{n+1} - 1 = a \times a^n - 1$. Or $a - 1$ divise $a^n - 1$, donc $a^n - 1 = (a - 1)k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Donc } a^n = (a - 1)k + 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } a^{n+1} - 1 &= a \times [(a - 1)k + 1] - 1 \\ &= a(a - 1)k + (a - 1) \\ &= (a - 1)(ak + 1) \end{aligned}$$

or $ak + 1 \in \mathbb{Z}$.

Donc $a - 1$ divise $a^{n+1} - 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a - 1$ divise $a^n - 1$.

92. Soit q un réel tel que $q \neq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$$P(n) : \ll 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \gg.$$

$$\text{Initialisation : pour } n = 0, \frac{1 - q^{0+1}}{1 - q} = 1$$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a } 1 + q + \dots + q^{n+1} &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

93. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$$P(n) : \ll u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} \gg.$$

Initialisation : pour $n = 0$,

$$(0+1) \times \frac{u_0 + u_0}{2} = u_0.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} u_0 + \dots + u_{n+1} &= (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} + u_{n+1} \\ &= \frac{(n+1)(u_0 + u_0 + nr) + 2u_{n+1}}{2} \\ &= \frac{(n+1)(2u_0 + nr) + 2(u_0 + (n+1)r)}{2} \\ &= \frac{u_0 \cdot 2(n+1) + 2 + r \cdot n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{u_0 \times 2(n+1) + r(n+1)(n+2)}{2} \\ &= (n+2) \frac{u_0 \times 2 + r(n+1)}{2} \\ &= (n+2) \frac{u_0 + u_0 + r(n+1)}{2} \\ &= (n+2) \frac{u_0 + u_{n+1}}{2} \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie,

$$\text{soit } u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

94. 1. $2x^2 - (x+1)^2 = x^2 - 2x - 1$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
$2x^2 - (x+1)^2$	+	0	-	0	+

2. Pour tout entier $n \geq 4$, on considère la propriété $P(n) : \ll 2^n \geq n^2 \gg$.

Initialisation : pour $n = 4$,

$$2^4 = 16 \text{ et } 4^2 = 16, \text{ donc } 2^4 \geq 4^2.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 4$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$2^{n+1} = 2^n \times 2$$

$$\text{donc } 2^{n+1} \geq n^2 \times 2$$

$$\text{or } n \geq 4 > 1 + \sqrt{2}. \text{ Donc } 2n^2 - (n+1)^2 > 0, \text{ soit } 2n^2 > (n+1)^2$$

$$\text{donc } 2^{n+1} \geq (n+1)^2$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 4$, $P(n)$ est vraie, soit $2^n \geq n^2$.

Limite d'une suite

95. 1. $100 \times 1,1 = 110$

Donc en 2020, il y aura 110 habitant-e-s.

$$110 \times 1,1 = 121$$

Donc en 2021, il y aura 121 habitant-e-s.

2. a) $v_0 = 100$; $v_1 = 110$ et $v_2 = 121$.

b) $v_{20} \approx 673$; $v_{30} \approx 1745$; $v_{40} \approx 4526$

c) On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

3. Une telle évolution est impossible. La population sera confrontée à des problèmes de place et de ressources.

96. 1. $30\,000 \times \frac{90}{100} + 10\,000 = 37\,000$

Donc en 2021, il y aura 37 000 abonné-e-s.

$$37\,000 \times \frac{90}{100} + 10\,000 = 43\,300$$

Donc en 2022, il y aura 43 300 abonné-e-s.

2. a) $u_0 = 30$; $u_1 = 37$; $u_2 = 43,3$

b) On a $u_0 = 30$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 10$

$$u_{20} \approx 91,490$$
 ; $u_{30} \approx 97,033$

$$u_{40} \approx 98,965$$
 ; $u_{50} \approx 99,639$.

c) On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 100$.

97. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^3 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3} \right)$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{n^3}{n^2 \times \left(1 - \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{n}{1 - \frac{4}{n^2}}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.

d) Pour tout entier $n > 2$, $n^3 - \frac{1}{n^2 - 4} \leq a_n$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - \frac{1}{n^2 - 4} = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

98. 1. Faux contre-exemple $u_n = \frac{1}{n}$.

$\{u_n\}$ converge vers 0, mais $\{v_n\}$ diverge vers $+\infty$.

2. Faux contre-exemple $u_n = \{-1\}^n$.

$\{u_n\}$ diverge et $\{v_n\}$ diverge également.

99. 1. Faux contre-exemple $u_n = \{-1\}^n$.

2. Vrai $\frac{n^2 - 1}{n^2} \leq v_n \leq \frac{n^2 + n}{n^2}$ car $n^2 > 0$

donc $1 - \frac{1}{n^2} \leq v_n \leq 1 + \frac{1}{n}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

100. 1. Non : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Donc on a une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ».

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

donc $u_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1 > n$

donc $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $v_n > \sqrt{n}$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

4. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

101. 1. Faux contre-exemple $u_n = \frac{1}{n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $v_n = -\frac{2}{u_n} = -2n$,

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

2. Vrai si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$,

alors $\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

Donc $-\frac{2}{u_n} \geq -1$, soit $v_n \geq -1$.

3. Faux contre-exemple $u_n = \frac{1}{n}$.

$\{u_n\}$ est décroissante, et $v_n = -2n$, donc $\{v_n\}$ est décroissante aussi.

4. Faux contre-exemple $u_n = \{-1\}^n$.

$\{u_n\}$ et $\{v_n\}$ sont divergentes.

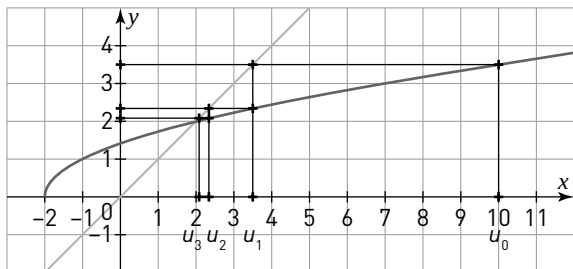
102.

```

s = 0
u = 0
for i in range(0,100):
    u = (-1)**i/(2*i+1)
    s = s+u
print(s)
print(4*s)
    
```

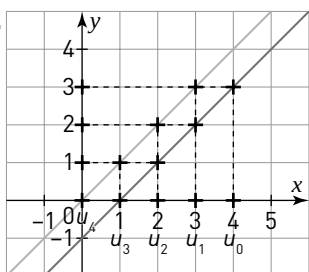
Représentation graphique et limite

103. 1. et 2.



2. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 2.

104. 1.



2. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite $-\infty$.

105. 1. $u_0 = 3$; $u_1 = -1$; $u_2 = 3$; $u_3 = -1$.

2. On conjecture que la suite (u_n) n'est pas monotone, et n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

Études de suites

106. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$.

Donc $1 \leq u_1 \leq u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$

donc $\sqrt{1+1} \leq \sqrt{u_{n+1}+1} \leq \sqrt{u_n+1}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $1 \leq \sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

2. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1. Donc elle converge.

107. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = \frac{2^0}{3^{0+1}} = \frac{1}{3} > 0$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} = \frac{2^n \times 2}{3^{n+1} \times 3} = u_n \times \frac{2}{3}$

or $u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Or $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3} < 1$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

4. $u_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = a \times q^n$ avec $a = \frac{1}{3}$ et $q = \frac{2}{3}$.

5. Or $-1 < q < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

108. 1. f est une fonction polynôme du second degré.

$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1$.

$\beta = f(\alpha) = 1$, donc on a :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f			

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0,5$ et

$u_1 = -0,5^2 + 2 \times 0,5 = 0,75$.

Donc $0 \leq u_0 < u_1 \leq 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.

Or f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$;

donc $f(0) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) \leq f(1)$.

$0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} \leq 1$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit

$0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.

3. $\{u_n\}$ est strictement croissante et majorée par 1, donc elle est convergente.

4. $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = -\ell^2 + 2\ell$

$$\Leftrightarrow \ell^2 - \ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell(\ell - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1$$

Or $u_0 = 0,5$ et la suite $\{u_n\}$ est strictement croissante. Donc $\ell \geq 0,5$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

109. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{6 - u_n}{9 - 3(6 - u_n)} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{6 - u_n}{-9 + 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{6 - u_n - 3}{3(u_n - 3)} \\ &= \frac{3 - u_n}{3(u_n - 3)} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

donc $\{v_n\}$ est une suite arithmétique de raison

$$r = -\frac{1}{3}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n \times r$

$$\text{or } v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = -\frac{1}{6}$$

$$\text{donc } v_n = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n = \frac{-1 - 2n}{6}.$$

$$\text{Or } v_n = \frac{1}{u_n - 3}, \text{ donc } u_n = \frac{1}{v_n} + 3$$

$$\text{donc } u_n = \frac{6}{-1 - 2n} + 3.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1 - 2n) = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{-1 - 2n} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3.$$

$$\mathbf{110. 1.} \quad u_1 = f(u_0) = \frac{2 + 3 \times 3}{4 + 3} = \frac{11}{7}$$

2. f est dérivable sur $[0 ; 4]$ et pour tout réel $x \in [0 ; 4]$,

$$f'(x) = \frac{3(4 + x) - (2 + 3x)1}{(4 + x)^2} = \frac{10}{(4 + x)^2} > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $[0 ; 4]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{11}{7}$.

Donc $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 3$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$

or f est strictement croissante sur $[0 ; 4]$;

donc $f(1) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(3)$.

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{11}{7} \leq 3$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3.$$

3. $\{u_n\}$ est strictement décroissante et minorée par 1, donc elle est convergente.

$$4. \ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

$$\Leftrightarrow \ell(4+\ell) = 2+3\ell$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$$

$$\ell_1 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2 \text{ et } \ell_2 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = 1$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 3$.

Donc $1 \leq \ell \leq 3$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

111. A. Étude de la suite (u_n)

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$, donc $u_0 = 3 \times 2^0 + 0 - 2$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+1} &= 2u_n - n + 3 \\ &= 2(3 \times 2^n + n - 2) - n + 3 \\ &= 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3 \\ &= 3 \times 2^{n+1} + n + 1 - 2 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. $2 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3. a)

```

u = 1
n = 0
while u <= 1000000 :
    n = n+1
    u = 3*2**n+n-2
print(n)
    
```

b) Le rang correspondant est $n = 19$.

B. Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{3 \times 2^n + n - 2}{2^n} = 3 + \frac{n-2}{2^n}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} &= 3 + \frac{n-1}{2^{n+1}} - \left(3 + \frac{n-2}{2^n}\right) \\ &= \frac{n-1}{2^{n+1}} - \frac{n-2}{2^n} \\ &= \frac{n-1-2(n-2)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{-n+3}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

si $n \geq 3$, alors $-n \leq -3$, donc $-n+3 \leq 0$.

$$\text{Donc } \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} \leq 0.$$

Donc la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

$$2. \frac{u_n}{v_n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{2}{2^n}$$

$$\text{Or si } n \geq 4, 0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc d'après le théorème des gen-

darmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

De plus, $2 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2^n} = 0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3.$$

112. 1. $u_0 = -3$; $u_1 = 2u_0 + 4 = -2$;
 $u_2 = 2u_1 + 4 = 0$; $u_3 = 2u_2 + 4 = 4$.

2.

```

u = -3
for i in range(1,21):
    u = 2*u+4
print(u)
    
```

3. $u_{20} = 1\,048\,572$

113. A. Conjecture

1. Il faut rentrer $=B2/(B2+8)$.

2. On conjecture que la suite (u_n) est strictement décroissante et tend vers 0.

```
3. u = 1
   for i in range(1, 31):
       u = u / (u + 8)
   print(u)
```

B. Étude générale

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n > 0$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 > 0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 8}$. Or $u_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $u_n > 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

$$\text{Et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n + 8}.$$

Or $u_n > 0$, donc $u_n + 8 > 8$, donc $\frac{1}{u_n + 8} < \frac{1}{8}$.

Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Donc la suite $\{u_n\}$ est strictement décroissante.

3. La suite $\{u_n\}$ est strictement décroissante, et minorée par 0. Donc elle est convergente.

C. Expression du terme général

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = 1 + \frac{7}{u_{n+1}} = 1 + \frac{7}{\frac{u_n}{u_n + 8}} = 1 + \frac{7(u_n + 8)}{u_n}$$

$$\text{donc } v_{n+1} = \frac{u_n + 7u_n + 56}{u_n} = \frac{8 \times (u_n + 7)}{u_n}$$

$$\text{donc } v_{n+1} = 8 \times \left(1 + \frac{7}{u_n}\right) = 8v_n.$$

Donc $\{v_n\}$ est une suite géométrique de raison 8 et de premier terme $v_0 = 1 + \frac{7}{u_0} = 8$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 8 \times 8^n = 8^{n+1}$.

$$\text{Or } v_n = 1 + \frac{7}{u_n}. \text{ Donc } \frac{7}{u_n} = v_n - 1.$$

$$\text{Soit } u_n = \frac{7}{v_n - 1}. \text{ Donc } u_n = \frac{7}{8^{n+1} - 1}.$$

3. $8 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^n = +\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^{n+1} - 1 = +\infty$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, donc tout intervalle ouvert contenant 0 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Donc il existe un entier n_0 , tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in]-10^{-18}; 10^{-18}[$, donc $u_n < 10^{-18}$.

D'après la calculatrice, $n_0 = 20$.

Suite géométrique et somme

$$\text{114. a) } u_n = 5^n \left(1 - \left(\frac{0,2}{5}\right)^n\right) = 5^n (1 - 0,04^n)$$

$-1 < 0,04 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,04^n = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 0,04^n = 1$.

$5 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$$\text{b) } v_n = 6^n \left(1 - \left(\frac{7}{6}\right)^n\right)$$

$$\frac{7}{6} > 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^n = +\infty$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{7}{6}\right)^n = -\infty$.

$6 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 6^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

$$\text{c) } w_n = 9^n \left(1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n\right)$$

$$-1 < \frac{8}{9} < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n = 1$

$9 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 9^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.

115. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Or $-1 < \frac{1}{4} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. Soit q la raison de la suite (u_n) .

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} \\ &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^{n-1} \\ &= u_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \end{aligned}$$

$$= u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$= 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{20}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n = 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{20}{3}$.

116. 1. Soit q la raison de la suite (u_n) .

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &= u_1 + u_1 \times q + u_1 \times q^2 + \dots + u_1 \times q^{n-1} \\ &= u_1 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \end{aligned}$$

$$= u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$= 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$= 5 \times \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

2. $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 5$.

117. 1. a) $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
 $= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^n$
 $= u_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^n)$

$$= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$= 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{27}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

b) $S_1 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1}$
 $= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^{n+1}$
 $= u_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^{n+1})$

$$= u_0 \times \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}$$

$$= 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{27}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}\right)$$

2. $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 1$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_1 = \frac{27}{2}$.

118. 1. a) $S_{25} = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{24}$
 $= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^{24}$
 $= u_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^{24})$

$$= u_0 \times \frac{1 - q^{25}}{1 - q}$$

$$= -10 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{25}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Donc $S_{25} \approx -20$.

2. a) $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$

$$= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^{n-1}$$

$$= u_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

$$= u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$= -10 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= -20 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

b) $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -20$.

119. 1. $S_n = \frac{1 - 5^{n+1}}{1 - 5} = -\frac{1}{4} \times (1 - 5^{n+1})$

2. $5 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 5^{n+1}) = -\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

120. 1. $A_1 = 3^2 = 9$; $A_2 = 1,5^2 = 2,25$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_{n+1} = \frac{A_n}{4}$.

Donc (A_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = A_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

4. Notons S_n l'aire formée par l'ensemble des n premiers carrés.

$$S_n = A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

$$= 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 + 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \dots + 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$= 9 \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$$

$$= 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= 12 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

5. $-1 < \frac{1}{4} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 12$.

Donc si on continue indéfiniment cette construction, l'aire de la figure formée par l'ensemble des carrés sera 12 cm^2 .

Étudier des phénomènes d'évolution

121. 1. $15\,000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 1\,000 = 14\,500$. Il y aura 14 500 habitant·e-s en 2020.

2. On note u_n le nombre d'habitant·e-s en 2019 + n . En 2019, il y a 15 000 habitant·e-s, donc $u_0 = 15\,000$. Chaque année, la mairie prévoit que 10 % des habitant·e-s quitteront la ville, et 1 000 nouveaux habitant·e-s s'installeront.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 1\,000 = 0,9u_n + 1\,000.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = 5\,000 \times 0,9^n + 10\,000$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 15\,000$ et $5\,000 \times 0,9^0 + 10\,000 = 15\,000$.

Donc $u_0 = 5\,000 \times 0,9^0 + 10\,000$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = 0,9u_n + 1\,000$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,9 \times (5\,000 \times 0,9^n + 10\,000) + 1\,000 \\ &= 5\,000 \times 0,9^{n+1} + 10\,000 \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5\,000 \times 0,9^n + 10\,000$.

4. $-1 < 0,9 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10\,000$.

Le nombre d'habitants de la ville tend vers 10 000.

122. $1. 100 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 5 = 95.$

Donc en 2021, il y aura 95 tigres dans la réserve.

2. $u_0 = 100$. Et chaque année, 10 % de la population de tigres meurt, et 5 nouveaux tigres sont recueillis dans la réserve.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 5 = 0,9u_n + 5.$$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $50 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 100$ et $u_1 = 95$. Donc $50 \leq u_1 \leq u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $50 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

$$0,9 \times 50 + 5 \leq 0,9u_{n+1} + 5 \leq 0,9u_n + 5$$

$$\text{Donc } 50 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $50 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

b) (u_n) est strictement décroissante et minorée par 50, donc elle est convergente.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 50$

$$\begin{aligned} &= 0,9u_n + 5 - 50 \\ &= 0,9u_n - 45 \\ &= 0,9 \left(u_n - \frac{45}{0,9} \right) \\ &= 0,9(u_n - 50) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 50 = 50$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = 50 \times 0,9^n$.

Or $v_n = u_n - 50$, donc $u_n = v_n + 50$.

$$\text{Donc } u_n = 50 \times 0,9^n + 50.$$

c) $-1 < 0,9 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 50$.

d) Le nombre de tigres diminue et tend vers 50.

123 A. 1. $u_1 = 16\,000 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 13\,600$

$$u_2 = 13\,600 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 11\,560$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 0,85u_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,85$.

$$\text{Donc } u_n = u_0 \times q^n = 16\,000 \times 0,85^n.$$

3. $-1 < 0,85 < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4. a)

```

u = 16000
n = 0
while u > 2000 :
    n = n + 1
    u = 0.85 * u
print(n)
    
```

b) La valeur de n à la fin du programme est 13.

B. 1. Le 1^{er} juillet, elle prélève 15 % du capital disponible pour préparer ses vacances. Le 1^{er} décembre, elle rajoute 300 €.

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,85v_n + 300.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $v_n = 14\,000 \times 0,85^n + 2\,000$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 16\,000$ et $14\,000 \times 0,85^0 + 2\,000 = 16\,000$

$$\text{donc } v_0 = 14\,000 \times 0,85^0 + 2\,000$$

donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a } v_{n+1} &= 0,85v_n + 300 \\ &= 0,85(14\,000 \times 0,85^n + 2\,000) + 300 \\ &= 14\,000 \times 0,85^{n+1} + 2\,000 \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $v_n = 14\,000 \times 0,85^n + 2\,000$.

3. $-1 < 0,85 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2\,000$.

124. A. 1. $u_1 = u_0 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 530$

$$u_2 = u_1 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) \approx 562$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 1,06u_n$$

donc $\{u_n\}$ est une suite géométrique de raison $q = 1,06$.

Donc $u_n = u_0 \times q^n = 500 \times 1,06^n$.

3. $1,06 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,06^n = +\infty$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

B. 1.

```
u = 500
n = 0
while u < 1000 :
    n = n + 1
    u = 1.06 * u
print(n)
```

2. La valeur affichée à la fin de l'exécution de ce programme est 12.

Donc le nombre de films aura doublé à partir de 12 mois (ou un an) après l'ouverture.

C. 1. Chaque mois, 10 % des personnes se désabonnent, et il y a 2 500 nouveaux abonnés.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right)v_n + 2\,500 = 0,9v_n + 2\,500.$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = v_{n+1} - 25\,000$

$$\begin{aligned} &= 0,9v_n + 2\,500 - 25\,000 \\ &= 0,9v_n - 22\,500 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 0,9 \left(v_n - \frac{22\,500}{0,9} \right) \\ &= 0,9(v_n - 25\,000) \\ &= 0,9w_n \end{aligned}$$

Donc $\{w_n\}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme

$$w_0 = v_0 - 25\,000 = -10\,000.$$

b) Donc $w_n = w_0 \times q^n = -10\,000 \times 0,9^n$

or $w_n = v_n - 25\,000$, donc $v_n = w_n + 25\,000$.

$$\text{Donc } v_n = -10\,000 \times 0,9^n + 25\,000.$$

3. $-1 < 0,9 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 25\,000$.

On peut donc prévoir une stabilisation du nombre d'abonnés, autour de 25 000.

125. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 1$.

2. Chaque année, Electic perd 5 % de ses clients, mais récupère 15 % des clients de Energo. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{5}{100}\right)a_n + \frac{15}{100}b_n = 0,95a_n + 0,15b_n.$$

3. Donc $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,15(1 - a_n)$

$$= 0,8a_n + 0,15.$$

4. a) 2030 = 2020 + 10. Il faut donc calculer a_{10} .

```
a = 0.55
for i in range(1,11):
    a = 0.8*a + 0.15
print(a)
```

b) $a_{10} \approx 0,729$. Donc en 2030, Electic aura environ 72,9 % des parts de marché.

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $a_n \leq a_{n+1} \leq 0,75$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $a_0 = 0,55$ et

$$a_1 = 0,8a_0 + 0,15 = 0,59.$$

$$\text{Donc } a_0 \leq a_1 \leq 0,75.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{On a } a_n \leq a_{n+1} \leq 0,75.$$

$$0,8a_n + 0,15 \leq 0,8a_{n+1} + 0,15 \leq 0,8 \times 0,75 + 0,15$$

$$\text{Donc } a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq 0,75.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $a_n \leq a_{n+1} \leq 0,75$.

b) $\{a_n\}$ est strictement croissante et majorée par 0,75, donc elle est convergente.

$$\ell = 0,8\ell + 0,15 \Leftrightarrow 0,2\ell = 0,15 \Leftrightarrow \ell = 0,75$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,75.$$

c) Le pourcentage des parts de marchés de Electic augmentera et tendra vers 75 %.

126. 1. En 2010, le magazine n'est proposé que sous forme papier, donc $a_0 = 100\% = 1$

et $b_0 = 0\% = 0$. Chaque année,

– 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique ;

– 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier ;

– le nombre global d'abonnés reste constant.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left(1 - \frac{10}{100}\right)a_n + \frac{6}{100}b_n \\ &= 0,9a_n + 0,06b_n. \end{aligned}$$

2. Or $a_n + b_n = 1$.

$$\text{Donc } a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06(1 - a_n)$$

$$\text{Donc } a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3. a)} \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, c_{n+1} &= a_{n+1} - 0,375 \\ &= 0,84a_n + 0,06 - 0,375 \\ &= 0,84a_n - 0,315 \\ &= 0,84\left(a_n - \frac{0,315}{0,84}\right) \\ &= 0,84(a_n - 0,375) \\ &= 0,84c_n \end{aligned}$$

donc $\{c_n\}$ est une suite géométrique de raison 0,84 et de premier terme $c_0 = a_0 - 0,375 = 0,625$.

b) Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = 0,625 \times 0,84^n$.

c) Or $v_n = a_n - 0,375$, donc $a_n = v_n + 0,375$.

$$\text{Donc } a_n = 0,625 \times 0,84^n + 0,375.$$

$$\text{Et } b_n = 1 - a_n = 0,625 - 0,625 \times 0,84^n.$$

d) $-1 < 0,84 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,84^n = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,375.$$

4. On cherche le plus petit entier n tel que $a_n < b_n$, soit $a_n < 0,5$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $n = 10$. Donc en 2020, la proportion d'abonné.e.s à la version papier devient inférieure à la proportion d'abonné.e.s à la version numérique.

127. Travail de l'élève.

128. Travail de l'élève.

129. Travail de l'élève.

Exercices bilan

p. 38

130. Démontrer par récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$:

$$\ll 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2 \gg.$$

Initialisation : pour $n = 0$, $1 = (0 + 1)^2$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2n + 1) + (2n + 3) \\ &= (n + 1)^2 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 \\ &= (n + 2)^2 \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

$$\text{Donc } 1 + 3 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

131. Déterminer la limite d'une suite

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{8}{n^2}\right)}{n^3 \left(2 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{8}{n^2}}{n \left(2 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^3}\right)}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{n} - \frac{8}{n^2} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^3}\right) = 2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

$$\text{Donc } \sqrt{n} - 1 \leq v_n \leq \sqrt{n} + 1.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} - 1 = +\infty$. Donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$.

Donc $25 - \frac{1}{n} \leq w_n \leq 25 + \frac{1}{n}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 25 + \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 25 - \frac{1}{n} = 25$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 25$.

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

Et $2 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 3^n \left(1 - \left(\frac{4}{3} \right)^n \right)$.

Or $\frac{4}{3} > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n = +\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{4}{3} \right)^n = -\infty$.

Et $3 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$.

132. Étudier la convergence d'une suite

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0,5$.

Donc $0 < u_0 < 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n=0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $0 < u_n < 1$ et $0 < 1 - u_n < 1$.

Donc $0 < u_n(1 - u_n) < 1$, soit $0 < u_{n+1} < 1$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $0 < u_n < 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Donc $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 < 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Donc elle est convergente.

133. Étude de l'évolution de la population de singes

A. Premier modèle

1. $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,04 \times 1 = 1,04$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,04u_n$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,04$.

Donc $u_n = u_0 q^n = 1 \times 1,04^n = 1,04^n$.

3. $1,04 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. Ce modèle n'est pas réaliste. Les singes seront confrontés à un problème de place et de ressources.

B. Second modèle

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = -\frac{1}{20}x + 1,1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1,1}{\frac{1}{20}} \Leftrightarrow x = 22$.

x	$-\infty$	22	$+\infty$
f'	+	0	-
f			

Donc f est strictement croissante sur $[0 ; 10]$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $0 \leq v_n \leq 4$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $v_0 = 1$ donc $0 \leq v_0 \leq 4$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $0 \leq v_n \leq 4$.

Donc $f(0) \leq f(v_n) \leq f(4)$ car la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 10]$.

Donc $0 \leq v_{n+1} \leq 4$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $0 \leq v_n \leq 4$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= -\frac{1}{40}v_n^2 + 1,1v_n - v_n \\ &= -\frac{1}{40}v_n^2 + 0,1v_n \\ &= v_n \times \left(-\frac{1}{40}v_n + 0,1 \right) \end{aligned}$$

or $0 \leq v_n \leq 4$

$$\text{donc } 0 \geq -\frac{1}{40}v_n \geq -0,1$$

$$0 + 0,1 \geq -\frac{1}{40}v_n + 0,1 \geq 0$$

donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$. Donc la suite (v_n) est croissante.

c) (v_n) est croissante et majorée par 4, donc elle est convergente.

$$\text{d) } \ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = -\frac{1}{40}\ell^2 + 1,1\ell$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{40}\ell^2 + 0,1\ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell - \frac{1}{40}\ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } -\frac{1}{40}\ell + 0,1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 4$$

Or la suite (v_n) est croissante, et $v_0 = 1$.

Donc $\ell = 4$.

```
3.
n = 0
v = 1
while v <= 3 :
    v = -1/40*v**2 + 1.1*v
    n = n+1
print(n)
```

134. Évolution du nombre d'arbres dans une forêt

1. $u_0 = 2\,500$

$$u_1 = 2\,500 \times \left(1 - \frac{10}{100} \right) + 100 = 2\,350$$

2. Chaque année, 10 % des arbres sont coupés, et 100 arbres sont replantés.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100} \right) + 100 = 0,9u_n + 100.$$

3. a) $2\,050 = 2\,020 + 30$.

On cherche donc à calculer u_{30} .

```
u = 2500
for i in range(1, 31) :
    u = 0.9*u + 100
print(u)
```

b) En 2050, il y aura environ 1 064 arbres dans la forêt.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $1\,000 \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 2\,500$ et $u_1 = 2\,350$ donc $1\,000 \leq u_1 \leq u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $1\,000 \leq u_{n+1} \leq u_n$

$$0,9 \times 1\,000 + 100 \leq 0,9u_{n+1} + 100 \leq 0,9u_n + 100$$

donc $1\,000 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $1\,000 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

b) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 000. Donc elle est convergente.

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1\,000 \\ &= 0,9u_n + 100 - 1\,000 \\ &= 0,9u_n - 900 \\ &= 0,9(u_n - 1\,000) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1\,000 = 1\,500$

b) Donc $v_n = v_0 \times q^n = 1\,500 \times 0,9^n$

or $v_n = u_n - 1\,000$ donc $u_n = v_n + 1\,000$.

Donc $u_n = 1\,500 \times 0,9^n + 1\,000$.

c) $-1 < 0,9 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1\,000$.

Le nombre d'arbres dans la forêt diminue et tend vers 1 000.

Préparer le BAC
Je me teste

p. 40

135. C et D

136. A

137. C

138. A

139. B

140. B

141. C

142. A et C

Préparer le BAC
Je révise

p. 41

143. Récurrence

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « 2 divise $3^n - 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $3^0 - 1 = 0$, donc 2 divise $3^0 - 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $3^{n+1} - 1 = 3 \times 3^n - 1$

or 2 divise $3^n - 1$, donc $3^n - 1 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $3^n = 1 + 2k$.

Donc $3^{n+1} = 3 \times (1 + 2k) - 1$

$$= 3 \times 2k + 2$$

$$= 2 \times (3k + 1)$$

donc 2 divise 3^{n+1} .

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, 2 divise $3^n - 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_n = 3 \times 2^n + 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 4$ et $3 \times 2^0 + 1 = 4$.

Donc $u_0 = 3 \times 2^0 + 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_{n+1} = 2u_n - 1$

$$\begin{aligned} \text{donc } u_{n+1} &= 2 \times (3 \times 2^n + 1) - 1 \\ &= 3 \times 2^{n+1} + 1 \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times 2^n + 1$.

144. Limite d'une suite

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty. \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{2}.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty. \quad \text{d) } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3.$$

$$\text{e) } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0. \quad \text{f) } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\infty.$$

145 Compte en banque

1. $u_1 = 5\,750$ et $u_2 = 6\,312,5$

2. Chaque mois, elle dépense le quart de ce qu'elle a sur son compte. De plus elle dépose 2 000 € le dernier jour de chaque mois.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) + 2\,000 = 0,75u_n + 2\,000$$

3. a)

```
u = 5000
for i in range(1,13):
    u = 0.75*u + 2000
print(u)
```

b) Elle a 7 904,97 € sur son compte le 1^{er} janvier 2020.

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_n \leq u_{n+1} \leq 8\,000$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 5\,750$ et $u_1 = 6\,312,5$.

Donc $u_0 \leq u_1 \leq 8\,000$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $u_n \leq u_{n+1} \leq 8\,000$

$$0,75u_n + 2\,000 \leq 0,75u_{n+1} + 2\,000 \leq 0,75 \times 8\,000 + 2\,000$$

donc $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 8\,000$.

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 8\,000$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée, donc elle est convergente.

5. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 8\,000 \\ &= 0,75u_n + 2\,000 - 8\,000 \\ &= 0,75(u_n - 8\,000) \\ &= 0,75v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75, de premier terme $v_0 = u_0 - 8\,000 = -3\,000$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3\,000 \times 0,75^n$.

$$v_n = u_n - 8\,000, \text{ donc } u_n = v_n + 8\,000$$

$$\text{Donc } u_n = 8\,000 - 3\,000 \times 0,75^n.$$

$$6. -1 < 0,75 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 8\,000.$$

La somme sur le compte tendra vers 8 000 €.

146. Évolution d'une population de tortues

$$A. 1. u_1 = 0,9 \times 0,3 \times (1 - 0,3) = 0,189;$$

$$u_2 \approx 0,138.$$

Il y a 189 tortues en 2001 et environ 138 en 2002.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq 1 - u_n \leq 1$.

$$\text{Donc } 0 \leq 0,9u_n(1 - u_n) \leq 0,9u_n \text{ car } u_n \geq 0.$$

$$\text{Donc } 0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$$P(n) : « 0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n »$$

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$.

$$\text{Donc } 0 \leq u_0 \leq 0,3.$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\text{On a } 0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n.$$

$$\text{Donc } 0 \leq u_{n+1} \leq 0,9 \times 0,3 \times 0,9^n$$

$$\text{donc } 0 \leq u_{n+1} \leq 0,3 \times 0,9^{n+1}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$$

$$c) -1 < 0,9 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Cette population de tortues est donc en voie d'extinction.

```
3. u = 0.3
   n = 0
   while u >= 30 :
       u = 0.9*u*(1 - u)
       n = n+1
   print(2000 + n-1)
```

$$B. 1. v_{11} = 1,06 \times 0,032 \times (1 - 0,032) \approx 0,033$$

$$v_{12} \approx 0,034$$

Il y a environ 33 tortues en 2011 et environ 34 en 2012.

$$2. \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1,06v_n(1 - v_n)$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \ell.$$

$$\text{Donc } \ell = 1,06 \times \ell \times (1 - \ell).$$

3. La suite (v_n) est croissante.

$$\text{Donc pour tout } n \geq 10, v_n \geq v_{10}.$$

$$\text{Donc } v_n \geq 0,032.$$

Donc la population de tortues n'est plus en voie d'extinction.

Exercices vers le supérieur

p. 42-43

147. Somme par récurrence

Voir exercice résolu 1 page 17.

148. Abonnement sportif

Les bonnes réponses sont : a) et b).

$$a) \text{ Vrai } a_1 = 1\,500 \times \left(1 - \frac{40}{100}\right) + 400 = 1\,300$$

b) Vrai chaque année, 40 % des abonnements ne sont pas renouvelés, et il y a 400 nouveaux abonnés. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{40}{100}\right)a_n + 400 = 0,6a_n + 400.$$

$$\begin{aligned} c) \text{ Faux pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= a_{n+1} - 1\,000 \\ &= 0,6a_n + 400 - 1\,000 \\ &= 0,6(a_n - 1\,000) \\ &= 0,6v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,6$.

$$d) \text{ Faux } v_0 = a_0 - 1\,000 = 500$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,6^n$$

or $v_n = a_n - 1\,000$, donc $a_n = v_n + 1\,000$
 $a_n = 500 \times 0,6^n + 1\,000$.

149. Vrai-Faux (1)

Vrai soit (u_n) une suite croissante, admettant une limite finie ℓ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq \ell$.

Donc (u_n) est bornée.

150. Somme télescopique

$$1. \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{donc } u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

$$4. \text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

151. Vrai-Faux (2)

1. **Faux** contre-exemple : $u_n = n + (-1)^n$

$u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = 2$. La suite (u_n) n'est pas monotone, mais a pour limite $+\infty$.

2. **Vrai** démontrons cela par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$:
 « $u_n = 3^n + n - 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $3^0 + 0 - 1 = 0$.
 Donc $u_0 = 3^0 + 0 - 1$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+1} &= 3u_n - 2n + 3 \\ &= 3(3^n + n - 1) - 2n + 3 \\ &= 3^{n+1} + n \\ &= 3^{n+1} + n + 1 - 1 \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit
 $u_n = 3^n + n - 1$.

152. Suites adjacentes

1. La suite (v_n) est décroissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Donc $u_n \leq v_0$.

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 . Donc elle est convergente.

La suite (u_n) est croissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Donc $u_0 \leq v_n$.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 . Donc elle est convergente.

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

2. La suite (u_n) est croissante et a pour limite ℓ .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $p \geq n$, $u_p \geq u_n$.

En faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient $\ell \geq u_n$.

La suite (v_n) est décroissante et a pour limite ℓ . De même on montre que $\ell \leq v_n$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell \leq v_n$.

$$3. a) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n$

$$= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!}$$

$$= \frac{n(n+1) + n - (n+1)(n+1)}{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+1)!}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$

donc $v_{n+1} - v_n < 0$

donc (v_n) est strictement décroissante.

$$\text{Et } v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) Donc (u_n) et (v_n) sont convergentes.

$$\text{c) } u_{10} \leq e \leq v_{10}$$

Donc $e \approx 2,718282$.

153. Suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2

$$\text{A. 1. } u_2 = au_1 + bu_0$$

$$\text{donc } u_2 = 4,5 \times 2 + (-2) \times 1 = 7.$$

$$\text{2. } x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - 4,5x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-4,5)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 12,25$$

$$x_1 = \frac{4,5 - \sqrt{12,25}}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{4,5 + \sqrt{12,25}}{2} = 4$$

$$\text{3. a) Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu \times 4^n.$$

$$u_0 = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \mu \times 4^0, \text{ donc } \lambda + \mu = 1$$

$$u_1 = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \mu \times 4^1, \text{ donc } \frac{1}{2}\lambda + 4\mu = 2$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \frac{1}{2}\lambda + 4\mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \frac{1}{2}\lambda + 4(1 - \lambda) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{3}{7} \\ \lambda = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\text{donc pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{7} \times 4^n.$$

$$\text{b) } -1 < \frac{1}{2} < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$4 > 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 4^n = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$\text{B. 1. } u_2 = au_1 + bu_0$$

$$\text{donc } u_2 = 10 \times 2 - 25 \times 1 = -5.$$

$$\text{2. } x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 25 = 0$$

$$x_0 = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{3. a) Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda \times 5^n + \mu \times n \times 5^n.$$

$$u_0 = \lambda(5)^0 + \mu \times 0 \times 5, \text{ donc } \lambda = 1$$

$$u_1 = \lambda(5)^1 + \mu \times 1 \times 5^1, \text{ donc } 5\lambda + 5\mu = 2$$

$$\text{donc } \mu = -\frac{3}{5}.$$

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = 5^n - \frac{3}{5}n \times 5^n.$$

$$\text{b) } u_n = 5^n \left(1 - \frac{3}{5}n\right).$$

$$5 > 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{5}n\right) = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

154. Clefs oubliées

À l'aide d'un arbre pondéré, on a :

$$c_{n+1} = 0,5c_n + 0,3(1 - c_n) = 0,2c_n + 0,3.$$

$$\text{1. Vrai } c_1 = 0,1 \Leftrightarrow 0,2c_1 + 0,3 = 0,32$$

$$\Leftrightarrow c_2 = 0,32$$

$$\text{2. Faux } c_{n+1} = 0,2c_n + 0,3$$

$$\text{3. Vrai pour tout entier } n \geq 1,$$

$$8c_n = 8v_n + 3. \text{ Donc } v_n = c_n - 0,375$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } v_{n+1} &= c_{n+1} - 0,375 \\ &= 0,2c_n + 0,3 - 0,375 \\ &= 0,2c_n - \frac{0,075}{0,2} \\ &= 0,2(c_n - 0,375) \\ &= 0,2v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

$$\text{4. Vrai pour tout entier } n \geq 1,$$

$$v_n = v_1 \times 0,2^{n-1}.$$

$$\text{Or } v_n = c_n - 0,375, \text{ donc } c_n = v_n + 0,375$$

$$\text{soit } c_n = v_1 \times 0,2^{n-1} + 0,375.$$

$$\text{Or } -1 < 0,2 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,2^{n-1} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0,375.$$

155. Limites de deux suites

a) $\{u_n\}$ converge vers ℓ_1 et $\{v_n\}$ converge vers ℓ_2 .

$$\text{Donc } \ell_1 = \frac{3\ell_1 + \ell_2}{4} \text{ et } \ell_2 = \frac{\ell_1 + 5\ell_2}{6}$$

$$\frac{\ell_1}{4} = \frac{\ell_2}{4} \text{ et } \frac{\ell_2}{6} = \frac{\ell_1}{6}. \text{ Donc } \ell_1 = \ell_2.$$

156. Vrai-Faux (3)

1. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur dans l'expression de u_n . Les éditions suivantes et la correction ci-dessous utilisent $u_n = 2 + (2 + 2^2 + \dots + 2^n)$.

Vrai pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u_n &= 2 \times (1 + 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) \\ &= 2 \times \left(1 + \frac{1 - 2^n}{1 - 2}\right) \\ &= 2 \times (1 - (1 - 2^n)) \\ &= 2^{n+1} \end{aligned}$$

Donc u_n est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 4$.

$$v_1 = u_1 - 1 = 3; v_2 = u_2 - 1 = 7; v_3 = u_3 - 1 = 15.$$

$$\text{Or } \frac{v_3}{v_2} \neq \frac{v_2}{v_1}.$$

Donc $\{v_n\}$ n'est pas une suite géométrique.

2. **Vrai** $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = \ell$.

Donc tout intervalle contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, c'est-à-dire, pour tous réels a et b strictement positifs, il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$,

$$\ell - a < nu_n < \ell + b$$

$$\frac{\ell - a}{n} < u_n < \frac{\ell + b}{n}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell - a}{n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell + b}{n} = 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

3. **Vrai** démontrons cela par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = n + 1$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 1 = 0 + 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+1} &= 10u_n - 9n - 8 \\ &= 10(n + 1) - 9n - 8 \\ &= n + 2 \end{aligned}$$

donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, soit $u_n = n + 1$.

157. Vrai-Faux (4)

$$1. \text{ Faux } \frac{u_1}{u_0} = e^{-u_0} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = e^{-u_1}$$

or $u_0 \neq 0$, d'où $e^{-u_0} \neq 1$, donc $u_0 \neq u_1$

$$\text{donc } e^{-u_0} \neq e^{-u_1} \text{ et } \frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}.$$

La suite $\{u_n\}$ n'est pas géométrique.

2. **Faux** on démontre par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

$$\text{Et } \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} \leq e^{-0}$$

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$. La suite $\{u_n\}$ est décroissante.

3. **Vrai** voir question 2.

4. **Faux** la suite $\{u_n\}$ est décroissante et minorée par 0. Donc elle converge vers un réel ℓ .

$$\begin{aligned} \text{Or } \ell &= \ell e^{-\ell} \Leftrightarrow \ell(1 - e^{-\ell}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } 1 - e^{-\ell} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } e^{-\ell} = e^0 \\ &\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } -\ell = 0 \end{aligned}$$

donc $\ell = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

5. **Vrai** voir question 4.

158. Convergence de la méthode de Héron

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{x^2 - 2}{x^2}.$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2 - 2$	+	0	-	-	0	+
x^2	+		+	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
f						

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$:
« $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 5$ et $u_1 = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{2}{5} \right) = 2,7$.

Donc $\sqrt{2} \leq u_1 \leq u_0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

On a $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$

or f est strictement croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$.

Donc $f(\sqrt{2}) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$

donc $\sqrt{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$.
Donc elle est convergente.

$$4. \ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2\ell = \ell + \frac{2}{\ell}$$

$$\Leftrightarrow 2\ell^2 = \ell^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow \ell = -\sqrt{2} \text{ ou } \ell = \sqrt{2}.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2} \leq u_n$. Donc $\ell = \sqrt{2}$.

5.

```

u=5
for i in range(1,101):
    u=1/2*(u+2/u)
print(u)

```

159. Récurrence forte

$$u_0 = 1 ; u_1 = 3 ; u_2 = 2u_1 - u_0 = 5 ; u_3 = 2u_2 - u_1 = 7 ;$$

$$u_4 = 2u_3 - u_2 = 9.$$

On conjecture que $u_n = 2n + 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété

$P(n)$: « $u_n = 2n + 1$ ».

Initialisation : $u_0 = 1 = 2 \times 0 + 1$ et $u_1 = 3 = 2 \times 1 + 1$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ et $P(n-1)$ sont vraies, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
 \text{On a } u_{n+1} &= 2u_n - u_{n-1} \\
 &= 2(2n+1) - (2(n-1)+1) \\
 &= 4n+2 - 2n+2-1 \\
 &= 2n+3 \\
 &= 2(n+1)+1
 \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + 1$.

160. Rationnalité d'un nombre

Posons pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \dots + \frac{12}{10^{2n}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0,1212121212\dots$$

de plus,

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{12}{10^2} \left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \dots + \frac{1}{10^{2n-2}} \right) \\
 &= \frac{12}{100} \left(1 + \left(\frac{1}{10^2} \right)^1 + \left(\frac{1}{10^2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{10^2} \right)^{n-1} \right) \\
 &= \frac{12}{100} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10^2} \right)^n}{1 - \frac{1}{10^2}} \\
 &= \frac{12}{99} \times \left(1 - \left(\frac{1}{10^2} \right)^n \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{or } -1 < \frac{1}{10^2} < 1. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10^2} \right)^n = 0.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{12}{99}$. Donc $0,121212\dots = \frac{12}{99}$, donc $0,121\ 212\dots$ est un nombre rationnel.

161. Unicité de la limite

Raisonnons par l'absurde, et supposons que (u_n) admette deux limites ℓ et ℓ' distinctes avec $\ell < \ell'$.

Posons $d = \ell' - \ell$:

(u_n) tend vers ℓ donc il existe un rang p tel que pour

$$\text{tout } n \geq p, u_n \in \left[\ell - \frac{d}{3}; \ell + \frac{d}{3} \right].$$

(u_n) tend vers ℓ' donc il existe un rang p' tel que

$$\text{pour tout } n \geq p', u_n \in \left[\ell' - \frac{d}{3}; \ell' + \frac{d}{3} \right].$$

Donc pour tout entier n supérieur à p et à p' , on a

$$u_n = \left[\ell - \frac{d}{3}; \ell + \frac{d}{3} \right] \cap \left[\ell' - \frac{d}{3}; \ell' + \frac{d}{3} \right];$$

ce résultat est absurde car

$$\left[\ell - \frac{d}{3}; \ell + \frac{d}{3} \right] \cap \left[\ell' - \frac{d}{3}; \ell' + \frac{d}{3} \right] = \emptyset.$$

Donc il y a unicité de la limite.

Travaux Pratiques

p. 44-47

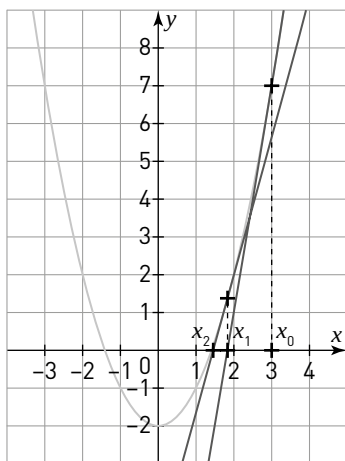
TP 1. Application de la méthode de Newton

• **Durée estimée** : 45 min

• **Objectif** : Découvrir et utiliser la méthode de Newton, afin de trouver des valeurs approchées des solutions d'une équation de la forme $f(x) = 0$.

A. Étude d'un exemple

1. 2. 3. 4. et 5.



B. Calcul des premiers termes

$$1. f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}$$

$$\text{donc } S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$$

$$\begin{aligned} 2. y &= f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) \\ &= 2x_n(x - x_n) + x_n^2 - 2 \\ &= 2x_n x - x_n^2 - 2 \end{aligned}$$

$$3. y = 0 \Leftrightarrow 2x_n x - x_n^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

$$\text{donc } x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

$$4. x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{2}{x_0} \right) = \frac{11}{6}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{2}{x_1} \right) = \frac{193}{132}$$

```

5. x=3
   for i in range(1,11):
       x=1/2*(x+2/x)
   print(x)
  
```

$$6. x_{10} \approx 1,414\,213\,56$$

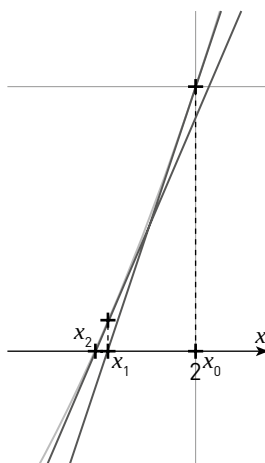
C. Étude d'un deuxième exemple

$$1. \Delta = [-1]^2 - 4 \times 1 \times [-1] = 5$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

2.



$$\begin{aligned} 3. y &= f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) \\ &= (2x_n - 1)(x - x_n) + x_n^2 - x_n - 1 \\ &= (2x_n - 1)x - x_n^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. y = 0 &\Leftrightarrow (2x_n - 1)x - x_n^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n - 1}.$$

$$5. x_1 = \frac{x_0^2 + 1}{2x_0 - 1} = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 1}{2x_1 - 1} = \frac{34}{21}$$

```
6.
x = 2
for i in range(1, 11):
    x = (x**2 + 1) / (2*x - 1)
print(x)
```

TP 2. Paradoxe de Zénon

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Découvrir le paradoxe de Zénon en modélisant des suites à l'aide d'un tableur.

A. Étude à l'aide d'un tableur

1. Question sur ordinateur.
2. Dans la cellule B2, il faut rentrer 0.
Dans la cellule C2, il faut rentrer 900.
3. Dans la cellule D2, il faut rentrer =C2-B2.
4. Lorsque Achille court k mètres, la tortue parcourt $\frac{k}{10}$ mètres.
5. Dans la cellule B3, il faut rentrer =C2
dans la cellule C3, il faut rentrer =C2+(B3-B2)/10.
6. Question sur ordinateur.
7. On conjecture que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 1000 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 1000 . \lim_{n \rightarrow +\infty} (T_n - A_n) = 0$$

B. Étude théorique

1. Entre l'étape n et l'étape $n + 1$, Achille parcourt ce qu'a parcouru la tortue entre l'étape $n - 1$ et l'étape n . Donc $v_n = u_{n-1}$.

De plus, si Achille court k mètres, la tortue parcourt $\frac{k}{10}$ mètres. Donc $u_n = \frac{v_n}{10}$.

$$2. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{10} = \frac{u_n}{10}.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$ et de premier terme $u_0 = \frac{900}{10} = 90$.

$$3. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = 90 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

$$\text{Et } v_n = u_n \times 10 = 900 \times \left(\frac{1}{10}\right)^n.$$

$$\begin{aligned} 4. T_n &= 900 + u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} \\ &= 900 + u_0 + u_0 \left(\frac{1}{10}\right) + \dots + u_0 \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \\ &= 900 + u_0 \left(1 + \left(\frac{1}{10}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 900 + 90 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= 900 + 100 \times \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right) \end{aligned}$$

$$= 1000 - 100 \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$\begin{aligned} A_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} \\ &= v_0 + v_0 \left(\frac{1}{10}\right) + \dots + v_0 \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \\ &= v_0 \left(1 + \left(\frac{1}{10}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}\right) \end{aligned}$$

$$= 900 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= 1000 \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$$

$$= 1000 - 1000 \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
 5. T_n - A_n &= 1000 - 100 \left(\frac{1}{10} \right)^n - \left(1000 - 1000 \left(\frac{1}{10} \right)^n \right) \\
 &= 1000 \left(\frac{1}{10} \right)^n - 100 \left(\frac{1}{10} \right)^n \\
 &= 900 \left(\frac{1}{10} \right)^n
 \end{aligned}$$

$$6. -1 < \frac{1}{10} < 1. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 1000.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 1000$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n - A_n = 0$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n - A_n > 0$.

Donc $T_n > A_n$.

Donc Achille ne dépassera pas la tortue.

C. Deuxième modélisation

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = 10n$

et $T_n = 900 + n$.

or $A_n > T_n \Leftrightarrow 10n > 900 + n$

$$\Leftrightarrow n > 100.$$

donc Achille dépassera la tortue au bout de 100 secondes.

TP 3. Modèle de Malthus

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Étudier le modèle de Malthus, qui est une modélisation d'un phénomène d'évolution de population et de ressources.

A. Cas général

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = (1+r)P_n$.

2. P_n est une suite géométrique de raison $1+r$.

Donc $P_n = P_0(1+r)^n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + s \times n$.

4. Si $r > 0$, alors $1+r > 1$, donc (P_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$.

Si $r < 0$, alors $1+r < 1$, donc (P_n) est strictement décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$.

5. Si $s > 0$, alors (a_n) est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Si $s < 0$, alors (a_n) est strictement décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

B. Étude de cas

1. et 2. a) questions sur l'ordinateur.

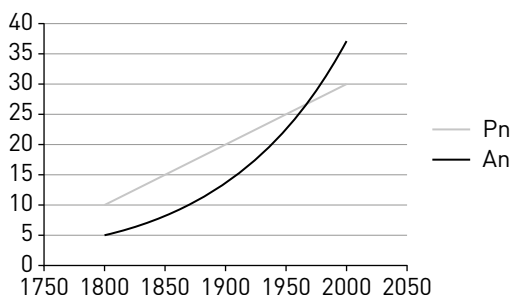
2. b) Dans la cellule B2, il faut rentrer 5, dans la cellule C2, il faut rentrer 10.

c) Dans la cellule B3, il faut rentrer =B2*1,01.

d) Dans la cellule C3, il faut rentrer =C2+0,1.

e) Question sur l'ordinateur.

3.



4. La population aura doublé en 1870, soit au bout de 70 ans.

5. La situation devient critique quand $P_n > a_n$, donc en 1970.

```

6. n = 1800
p = 5
a = 10
while p <= a :
    p = p * 1.01
    a = a + 0.1
    n = n + 1
print(n)
    
```

7. Ce modèle a ses limites, car à très long terme la population continuera toujours d'augmenter alors qu'il n'y aura pas assez de subsistances. De plus, à très long terme, la population sera confrontée à un problème de place.

TP 4. Modèle de Malthus

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Étudier le modèle de Verhulst, qui est une modélisation d'un phénomène d'évolution de population.

A. Comprendre l'équation logistique

1. $r - bP_n = r \left(1 - \frac{b}{r}P_n\right) = r \left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$

2. $\lim_{P_n \rightarrow 0} (r - bP_n) = r$

3. $\lim_{P_n \rightarrow K} (r - bP_n) = r \left(1 - \frac{K}{K}\right)$

Donc $\lim_{P_n \rightarrow K} (r - bP_n) = 0$.

4. $P_{n+1} = P_n \times (1 + (r - bP_n))$

$P_{n+1} = P_n + (r - bP_n)P_n$

Donc $P_{n+1} - P_n = (r - bP_n)P_n = rP_n \left(1 - \frac{P_n}{K}\right)$.

B. Exemple de suites

1. a) Question sur l'ordinateur.

b) Dans la cellule D2, il faut rentrer =B3.

c) Dans la cellule D3,
=D2+\$B\$2*D2*(1-D2/\$B\$1)

e) Question sur l'ordinateur.

2. a) La suite (P_n) est strictement décroissante et tend vers 15.

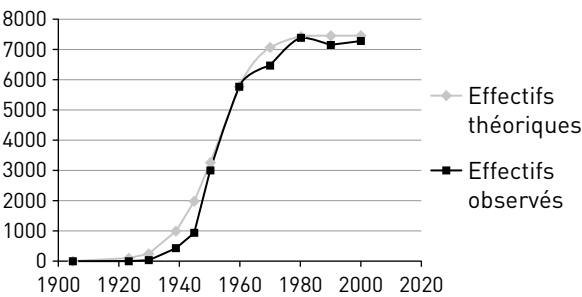
b) La suite (P_n) n'est pas monotone et tend vers 15.

c) La suite (P_n) semble alterner entre une valeur comprise entre 17 et 18, et une valeur comprise entre 9 et 10.

C. Évolution de la population d'éléphants

1. et 2.

Année	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Effectifs théoriques	10	122	317	1021	2037	3277	5859	7095	7416	7483	7497
Effectifs observés	10	13	29	450	980	3010	5800	6500	7400	7200	7310



3. D'après le graphique de la question 2, ce modèle semble cohérent.

CHAPITRE 2 Limites de fonctions

Manuel p. 48-79

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Les opérations sur les limites sont admises. L'utilisation de la composition des limites se fait en contexte.

Objectifs

- Déterminer une limite en l'infini.
- Déterminer une limite en un réel.
- Conjecturer la présence d'asymptotes.
- Déterminer une limite à l'aide des opérations sur les limites.
- Utiliser les théorèmes d'encadrement et de comparaison.
- Déterminer une limite en utilisant la composée de fonctions.
- Lever une indétermination.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 49

1. Calculer des limites

a) 0 b) 0 c) $+\infty$ d) 0 e) $-\infty$ f) $-\infty$

2. Étudier les variations de fonctions

1. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = (x - 1)(3x + 9)$ donc le tableau de variations est :

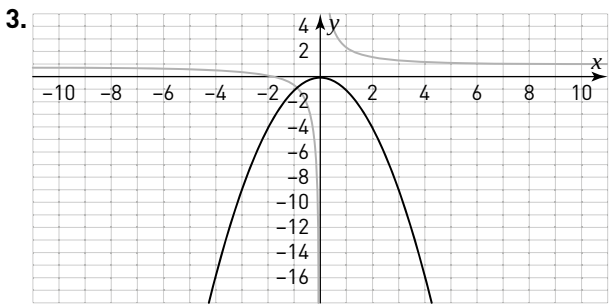
x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

2. $g'(x) = \frac{5}{(4x - 1)^2} > 0$ donc g est croissante sur

$$\left] -\infty ; \frac{1}{4} \right[\cup \left] \frac{1}{4} ; +\infty \right[.$$

$h'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$ donc le tableau est :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$			



3. Manipuler des expressions algébriques

- 1. a) $-6x^3 + 5x^2 - 2$ b) $e^{5x} + e^{x+2} + e^{-x}$
- c) $e^{4x} + 2e^{2x}\sqrt{2x - 1} + 2x - 1$
- 2. a) $2x(4x^2 + 3x - 6)$ b) $e^2x(e^{4x} - 4e^{2x} + e^{7x})$
- c) $(e^x - 7x)(e^x + 7x)$
- 3. a) $\frac{(2-x)(\sqrt{x}+4)}{x-16}$ b) $\frac{\sqrt{x}(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3})}{2x-2}$

4. Encadrer des fonctions

- 1. $f(x) - (2x + 1) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ donc la courbe est en-dessous de la droite sur $[1 ; 3]$ et au dessus partout ailleurs.
- 2. a) x est positif et il n'y a que des additions de nombres positifs.

b) $2x < 3x$ et $3 < 4$ donc par somme d'inégalités :
 $2x + 3 < 3x + 4$.

3. a) $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$ b) $-x \leq f(x) \leq x$

c) $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2 + 1}$

Activités

p. 50-51

1 Découvrir la notion d'asymptotes et de limites de fonctions

- **Durée estimée** : 35 min
- **Objectif** : Découvrir les notions de limite et d'asymptote.

A. Observations graphiques

1. Tracés sur GeoGebra.
2. a) À leurs extrémités, les courbes sont proches de l'axe des abscisses.
 b) Pour la courbe de h , on ne peut pas affirmer la même chose.
3. Les asymptotes sont : $y = 0$ et $x = 0$.

B. Observations numériques

1. a) b) c) Tableau de valeurs
2. Une limite finie pour f et g qui vaut 0 et une limite infinie pour h qui vaut $+\infty$.

2 Découvrir la notion de limite en un point

- **Durée estimée** : 20 min
 - **Objectif** : Découvrir la notion de limite en une valeur finie.
1. Non elles ne sont pas définies en 0.
 2. 3. a) b) GeoGebra
 - c) Pour f les images se rapprochent de moins l'infini et pour g elles se rapprochent de 15.
 4. a) GeoGebra
 - b) Pour f les images se rapprochent de plus l'infini et pour g elles se rapprochent de 15.

3 Effectuer des opérations sur les limites

- **Durée estimée** : 30 min
 - **Objectif** : Découvrir les difficultés dans les opérations portant sur les limites, manipulant les notions d'infini.
1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty.$$

$$2. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + h(x) = +\infty \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) + k(x) = +\infty$$

$$\text{ c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) + h(x) = +\infty \quad \text{ d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) + k(x) = +\infty$$

$$\text{ e) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + g(x) = +\infty \quad \text{ f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + h(x) = -\infty$$

$$\text{ g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + h(x) = +\infty \quad \text{ h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + g(x) = 0$$

$$3. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times h(x) = 0 \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times k(x) = 1$$

$$\text{ c) } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \times k(x) = 0 \quad \text{ d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times k(x) = 1$$

$$\text{ e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) \times h(x) = -\infty \quad \text{ f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times h(x) = 1$$

$$\text{ g) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \times h(x) = +\infty \quad \text{ h) } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \times k(x) = +\infty$$

4 Déterminer des limites de fonctions rationnelles

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Étudier les limites de fractions rationnelles.

1. Le calcul de la limite conduit vers infini sur infini pour le quotient et au numérateur aussi : infini moins infini.

$$2. f(x) = \frac{x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)}{\left(1 + \frac{4}{x^2} \right)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{x^2} \right) = 1$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc par produit et quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

5 Encadrer et comparer des fonctions

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Utiliser les comparaisons de fonctions pour trouver des limites.

A. Utilisation des outils acquis et des observations graphiques

1. Non, on ne peut pas les déterminer à partir d'opérations sur les limites, à cause du sinus.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

B. Démonstration algébrique

1. a) $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ d'où $x \leq f(x) \leq x + 20$.

b) De même $-1 \leq \sin(10x) \leq 1$ d'où $-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

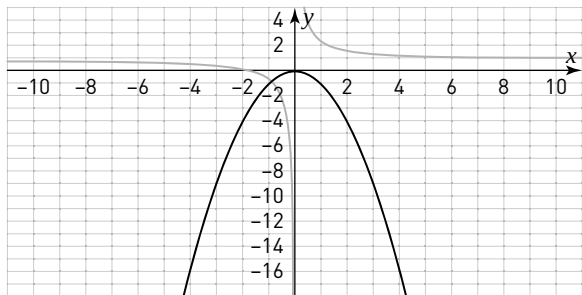
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

À vous de jouer

p. 53-61

1. 1.



2. a) À partir de 4 et avant -4.

b) À partir de 3 et avant -3.

3. On conjecture :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2.1. 2. a) À partir de 7 et avant -1.

b) À partir de 0,5.

3. On conjecture :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$.

4. On conjecture $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = \pm\infty$.

5. On conjecture une asymptote horizontale et une asymptote verticale.

6. On conjecture une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

7. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

8. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

9. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) / g(x) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) / g(x) = \pm\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times g(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times g(x) = +\infty$

10. 1. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

3. a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$

4. a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = 0$

11. a) $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$

b) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = x - 2$ et $g(x) = x - 2$

d) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $g(x) = -\frac{1}{x^4}$

12. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ **d)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

13. a) $f(x) \leq 1 - \sqrt{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\frac{3}{2e^x} \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\frac{2}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{4}{\sqrt{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

d) $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x+3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

14. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$

15. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ **b)** $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

16. a) $f(x) = 2x^5 \left(1 + \frac{1}{2x^3}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3}$

c) $f(x) = -3x^2 \left(1 - \frac{5}{3x}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

d) $f(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{x \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

17. a) $f(x) = -x^5 \left(-\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{x^6}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

b) $f(x) = \frac{-3x^2 \left(-\frac{1}{3x^2} + 1\right)}{-4x^3 \left(-\frac{1}{4x^2} + 1\right)} = \frac{3 \left(-\frac{1}{3x^2} + 1\right)}{4x \left(-\frac{1}{4x^2} + 1\right)}$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

c) $f(x) = -3x^3 \left(1 - \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{3x^3}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

d) $f(x) = \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{-x \left(-\frac{2}{x} + 1\right)} = \frac{x \left(1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{-\left(-\frac{2}{x} + 1\right)}$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

18. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 1 = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x + 1 = -\infty$ indéterminée.

3. $f(x) = 3x^2 \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3x^2}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

19. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 3x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ indéterminée.

2. $f(x) = \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

20. a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

b) $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-6}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c) $f(x) = \frac{-x - x^2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x \left(\frac{1}{x} + 1\right)}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

d) $f(x) = \frac{-7}{\sqrt{-3-x} + \sqrt{4-x}}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

21. a) $f(x) = \frac{-7}{\sqrt{3-x} + \sqrt{10-x}}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

b) $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{x^2+x+3} + \sqrt{x^2+x+6}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) &= \frac{x - 7 - x^2}{\sqrt{x - 4} + \sqrt{3 + x^2}} \\ &= \frac{-x^2 \left(-\frac{1}{x} + \frac{7}{x^2} + 1 \right)}{x \left(\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}} + \sqrt{\frac{3}{x^2} + 1} \right)} = \frac{-x \left(-\frac{1}{x} + \frac{7}{x^2} + 1 \right)}{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}} + \sqrt{\frac{3}{x^2} + 1}} \end{aligned}$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

$$\begin{aligned} \text{d) } f(x) &= \frac{-x - x^2}{\sqrt{2 - x} + \sqrt{2 + x^2}} \\ &= \frac{-x^2 \left(\frac{1}{x} + 1 \right)}{-x \left(\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{2}{x^2} + 1} \right)} = \frac{x \left(\frac{1}{x} + 1 \right)}{\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{2}{x^2} + 1}} \end{aligned}$$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

22. 1. Infini moins infini.

$$2. f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - x} + \sqrt{1 - x}}$$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

23. 1. Les trois !

$$2. f(x) = \frac{x - x^2 - 1}{\sqrt{x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-x \left(-\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{5 + x}} = \frac{x \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{1}{x}}}$$

$$h(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{-2 + x}} = \frac{x \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}}}$$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

Exercices apprendre à démontrer

p. 62

Pour s'entraîner

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ donc par définition d'une limite infinie à l'infini on a : pour tout réel A il existe un réel m tel que si $x < m$ alors $f(x) > A$.

Or $g(x) \geq f(x)$ donc par conséquent pour tout réel A il existe un réel m tel que si $x < m$ alors $g(x) > A$ ce qui signifie que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

Exercices calculs et automatismes

p. 63

24. Lecture graphique

1. b) 2. d)

25. Opérations sur les limites

1. c) et d) 2. a), b) et c)

26. Limites diverses

1. Faux

2. Vrai

3. Faux

4. Vrai

27. Formes indéterminées

a) et d)

28. Inégalités

1. c) 2. b) 3. a) et d)

29. Encadrement

1. a) 2. d) 3. b)

30. Comparaison

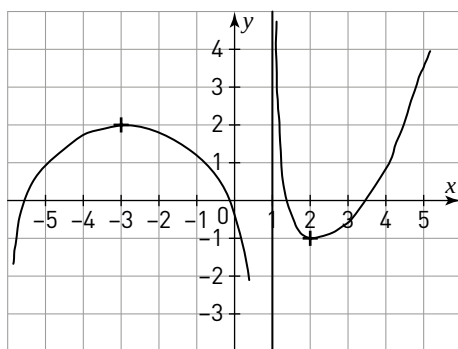
1. d) 2. d) 3. c)

Exercices d'application

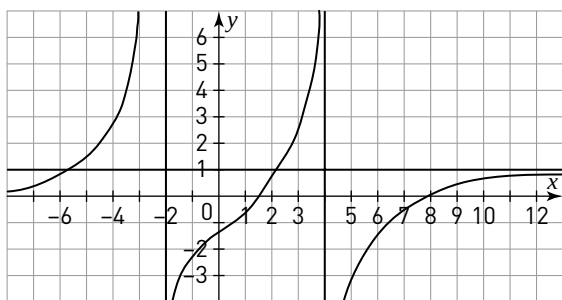
p. 64-66

Courbe représentative

31. On trace à la main en plaçant les extremums et l'asymptote verticale.



32. On trace à la main en plaçant les asymptotes verticales et horizontales.



Limites à l'infini

33. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

34. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

35. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{2}{3}$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Limite en une valeur réelle

36. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$

37. Non.

38. a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$
 c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{e^3}{3}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

Déterminer des asymptotes

39. La courbe $\mathcal{C}_f$ semble avoir une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ et une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

La courbe $\mathcal{C}_g$ semble ne pas avoir d'asymptote.

La courbe $\mathcal{C}_h$ semble avoir une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

La courbe $\mathcal{C}_k$ semble ne pas avoir d'asymptote.

40. a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$
 et $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

41. Deux asymptotes verticales d'équations $x = 0$ et $x = 2$ et deux asymptotes horizontales d'équations $y = -2$ et $y = 1$.

Opérations sur les limites

42. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

43. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

44. 1. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 0$.

2. Pas d'asymptotes pour f et g . Pour h une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et une verticale d'équation $x = 1$. Pour k une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et une verticale d'équation $x = 0$.

Opérations sur les limites en une valeur

45. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{4}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8e^2$ d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

46. a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = +\infty$

Comparaison de fonctions

47. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c) Impossible. d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

48. 1. a) $f(x) \geq 2x - 1$

b) $g(x) \geq x - 1$

2. Donc leur limite est $+\infty$.

49. 1. a) $f(x) \geq \frac{1}{x}$

b) $g(x) \geq \frac{1}{x}$

2. Donc leur limite est $+\infty$.

3. $f(x) \leq \frac{2}{x}$ et $g(x) \leq \frac{1}{x}$, donc leur limite est $-\infty$.

50. 1. a) $-\frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1}$

b) $1 \leq g(x) \leq \frac{x+1}{x}$

c) $-\frac{2}{x^2} \leq h(x) \leq \frac{2}{x^2}$

2. On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

Croissances comparées

51. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Composition de limites

52. 1. a) $u(x) = 2x^2 + 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

b) $u(x) = -2x - 1$ et $v(x) = e^x$.

c) $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \cos(x)$.

d) $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

53. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} k(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} k(x) = +\infty$.

54. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-1} + 2$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = +\infty$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = 0$

55. 1. a) $f(x) = e^{-3x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4+x^2}}$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ dans les deux cas.

56. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 1$

Formes indéterminées

57. 1. Forme « 0/0 ».

2. $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(1-x)^2} = \frac{x-2}{x-1}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

58. 1. C'est de la forme « 0/0 ».

2. $-3x^2 + 5x + 2 = (x-2)(-3x-1)$ et alors
 $f(x) = -3x - 1$ pour tout x différent de 2.

3. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -7 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

59. 1. C'est de la forme « 0/0 ».

2. $-x^2 - x + 6 = (x+3)(-x+2)$ et $f(x) = \frac{-x+2}{x+3}$.

3. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$.

60. 1. En $-\infty$ aucune des fonctions n'a une limite indéterminée.

2. En $+\infty$ elles sont toutes indéterminées.

$$3. f(x) = -x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right), g(x) = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\text{et } h(x) = -4x^4 - \frac{1}{2x^3} + 1 - \frac{1}{4x^4}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$$

61. 1. En $-\infty$ elles sont toutes indéterminées.

2. En $+\infty$ elles sont toutes indéterminées.

$$3. f(x) = \frac{1 - \frac{4}{x}}{x \left(1 + \frac{3}{x^2} \right)}, g(x) = \frac{x \left(1 + \frac{5}{x^2} \right)}{\frac{3}{x} - 1}$$

$$\text{et } h(x) = \frac{-\left(-\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 \right)}{\frac{3}{x^2} + 1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$$

62. 1. De la forme $\infty - \infty$.

$$2. f(x) = \frac{7}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-4}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Exercices d'entraînement

p. 67-69

Utiliser la définition de limite

63. 1. On conjecture $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour $A = 2\,003$ alors pour $x < -2\,000$

on a $f(x) > 2\,003$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Et pour $A = -1\,997$ alors pour $x > 2\,000$

on a $f(x) < -1\,997$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

64. a) Pour $A = 2\,003$ alors pour $x > 1\,000$

on a $f(x) > 2\,003$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) Pour $]0,99 ; 1,01[$ alors pour $x > 100$

on a $0,99 < f(x) < 1,01$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

c) Pour $A = 1001$ alors pour $x < -100$ on a $f(x) > 1001$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

d) Pour $]-2,01 ; -1,99[$ alors pour $x < -100$ on a $-2,01 < f(x) < -1,99$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$.

65. Pour $A = 100$ alors pour $x < -100$ on a $f(x) > 100$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Et pour $A = -100$ alors pour $x > 100$ on a $f(x) > 100$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

66. Pas limite en $+\infty$ car trop d'oscillations et en $-\infty$ la limite semble être 0.

Donc une asymptote d'équation $y = 0$.

67. 1. On conjecture $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$.

2. Pour $A = 50$ alors pour $0,49 < x < 0,5$ alors $f(x) > 50$ et donc $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = +\infty$.

Pour $A = 50$ alors pour $0,5 < x < 0,51$ alors $f(x) < -50$ et donc $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = -\infty$.

68. a) Pour $A = -100$ alors pour $0,99 < x < 1$ alors $f(x) < -100$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

b) Pour $]0 ; 0,01[$ alors pour $0 < x < 0,0001$ on a $0 < f(x) < 0,01$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

c) Pour $A = 10\,000$ alors pour $-2,01 < x < -2$ alors $f(x) > 10\,000$ et donc $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$.

d) Pour $A = -10\,000$ alors pour $1 < x < 1,01$ alors $f(x) < -10\,000$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

Opérations sur les limites

69. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ donc une asymptote d'équation $y = -1$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$ donc une asymptote d'équation $y = 0$.

70. 1. $f(-x) = e^{-x} + e^x = f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

71. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ donc une asymptote d'équation $y = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$.

72. a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = 12 = \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} k(x) = -\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow -1^+} k(x)$

73. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ et on en déduit une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

74. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

75. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

76. a) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$ donc une asymptote verticale d'équation $x = -4$.

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} g(x) = -\frac{e^4}{4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} g(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = +\infty$ donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

77. $f(0)$ n'existe pas donc la courbe 2 est celle représentant la fonction f .

Formes indéterminées

78. 1. a) $x^4 \left(1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} \right)$

b) $-5x^4 \left(1 - \frac{3}{5x} + \frac{1}{5x^3} \right)$

c) $e^{2x}(1 - e^{-x})$

d) $e^{4x}(1 + e^{-2x+1} - e^{-3x} - 3e^{-4x})$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} b(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = +\infty$.

79. 1. a) $\frac{2 - \frac{1}{x}}{3 + \frac{2}{x}}$

b) $\frac{x \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{-\frac{2}{x} - 3}$

c) $\frac{x \left(\frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^2} + 1 \right)}{\frac{3}{x^2} - 1 + \frac{4}{x}}$

d) $\frac{1 - e^{-2x} + e^{-3x}}{e^x(e^{-3x} - 2)}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = \frac{2}{3}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = \frac{2}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} b(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} c(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} c(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} d(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} d(x) = 0.$$

80. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ non indéterminée

$$\text{et } f(x) = x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) \text{ donne } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

b) Indéterminée dans les deux cas

$$\text{et } g(x) = x^4 \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3} \right) \text{ donne } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

c) Indéterminée dans les deux cas

$$\text{et } h(x) = \frac{2x \left(1 + \frac{1}{2x^2} \right)}{-\left(-\frac{1}{x} + 1 \right)} \text{ donne } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty.$$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = -\infty$ non indéterminée

$$\text{et } k(x) = \frac{1 + e^{-x} - e^{-2x}}{e^{-x} - 3} \text{ donne } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} k(x) = -\frac{1}{3}.$$

81. 1. a) $\frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1$

b) $\frac{(x-1)^2}{(x-1)(2x-4)} = \frac{x-1}{2x-4}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1^-} a(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} a(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} b(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} b(x) = 0$$

82. a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

b) $g(x) = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-1)} = \frac{x-2}{x-1}$ donne

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 0.$$

c) $h(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{x+3} = x-1$ donne

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} h(x) = -4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3^+} h(x) = -4.$$

d) $k(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$ donne

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = 2.$$

83. L'ensemble de définition est : $] -\infty ; 2[\cup] 2 ; +\infty [$.

À l'infini c'est indéterminé et $f(x) = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\frac{2}{x} - 1}$,

$$\text{ce qui donne } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\text{D'autre part : } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$$

84. L'ensemble de définition est : $] 0 ; +\infty [$.

À l'infini c'est indéterminé et $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ce qui

$$\text{donne } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0. \text{ D'autre part : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

85. 1. L'ensemble de définition est : $] -\infty ; -1[\cup] 1 ; +\infty [$.

2. À l'infini c'est indéterminé et $f(x) = \frac{x}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$ ce

$$\text{qui donne } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \text{ et d'autre part : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

3. On peut donc dire que f présente une asymptote verticale d'équation $x = 1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

86. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. $f(x) = \frac{\frac{1}{x} - 5}{x \left(1 - \frac{16}{x^2} \right)}$ donne $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

3. La fenêtre est sûrement entre les valeurs interdites -4 et 4 .

87. 1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

2. $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ donne $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

88. a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1+x}}$ donne $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

b) $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}} - x = x \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - 1 \right)$ donne

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$.

89. Courbe 1 pour f ,
courbe 2 pour k ,
courbe 3 pour g et
courbe 4 pour h .

Comparaison

90. a) $f(x) \geq x-1$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

b) $f(x) \geq (x-1)^2$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

c) $f(x) \leq \frac{x^3}{x-1}$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

d) $f(x) \leq \frac{x^3+2}{(x-1)^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

91. 1. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Par encadrement $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

92. 1. $x + \frac{1}{2} - 1 \leq E\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq x + \frac{1}{2}$

D'où $1 - \frac{1}{2x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{2x}$.

2. Par encadrement $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$.

Croissances comparées

93. Courbe a) pour k , courbe b) pour f ,
courbe c) pour g et courbe d) pour h .

94. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et

$g(x) = e^x \left(1 + \frac{x}{e^x} \right)$ donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 1$ et

donne $h(x) = e^{2x} \left(1 - \frac{x}{e^x} + e^{-2x} \right)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = +\infty$

et $k(x) = e^x \left(\frac{x^4}{e^x} - 2x + \frac{e^2}{e^x} \right)$ donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = -\infty$.

95. a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3x^2 + 3x - 6 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc
par composition de limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$.

$3x^2 + 3x - 6 = 3x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2 + 3x - 6 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x} = +\infty$

donc par composition de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^x = +\infty$

donc par composition de limites $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc par composition de limites $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 0$.

c) $\frac{3\pi x - 2\pi + 1}{1 - 6x} = \frac{3\pi \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{1}{3\pi x} \right)}{\frac{1}{x} - 6}$

donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\pi x - 2\pi + 1}{1 - 6x} = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \sin(X) = -1$

donc par composition de limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -1$.
Idem en $+\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc par composition

et somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc par composition

et somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = +\infty$.

96. Oui on le vérifie bien.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^x = 0$ donc par composition

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)e^{1-x} = 0$ et par ailleurs $\frac{\sqrt{x}}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(\frac{1}{x} - 1\right)}$

donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1-x} = 0$ donc par somme de limites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Études de fonctions

97. 1. $\left] -\infty ; -\frac{7}{3} \right[\cup \left] \frac{7}{3} ; +\infty \right[$

2. $f'(x) = \frac{1}{[-3x - 7]^2} > 0$ donc f est toujours

croissante.

3. $f(x) = \frac{-4 - \frac{9}{x}}{-3 - \frac{7}{x}}$ donne que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{4}{3}$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{4}{3}$

$\lim_{x \rightarrow -\frac{7}{3}} -4x - 9 = \frac{1}{3}$ et donc $\lim_{x \rightarrow -\frac{7}{3}} f(x) = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow \frac{7}{3}} f(x) = -\infty$.

4.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$	$\frac{4}{3}$

98. $f'(x) = 1e^{-x} + (x+1)(-e^{-x}) = -xe^{-x}$ qui est du signe de $-x$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc par produit

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

C'est indéterminé en $+\infty$, alors on écrit :

$f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

99. 1. $f(x) = \frac{1 - \frac{2}{x}}{2 + \frac{8}{x}}$ donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

Et $\lim_{x \rightarrow -4} x - 2 = -6$ donne $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = -\infty$ et donc la courbe possède deux

asymptotes d'équations $y = \frac{1}{2}$ et $x = -4$.

2. $f(x) - \frac{1}{2} = -\frac{12}{2(2x+8)}$ donc la courbe est

au-dessus de son asymptote

sur $] -\infty ; -4[$ et en dessous sur $] -4 ; +\infty[$.

100 1. $f(x) = \frac{2}{x\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}$ donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{x+2} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

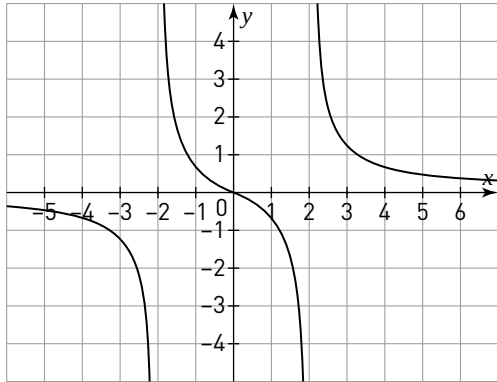
donc une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

3. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x}{x-2} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

donc une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

4. $f'(x) = \frac{-2(x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2} < 0$ donc toujours décroissante.

5.



101. On vérifiera que les règles de la démonstration sont observées.

102. On peut voir l'exercice 133.

Exercices bilan

p. 70

103. Calcul de limite

1. $f(x) = \frac{1}{x} e^{x^2}$ donne par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$

104. Suite de fonctions

1. On a $f_n(0) = \frac{1}{2}$ indépendant de n donc $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

2. a) $f'_0(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$ donc strictement croissante.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$ donc deux asymptotes horizontales d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

c)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_0(x)$		+
$f_0(x)$	0	1

3. a) $f_1(-x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}} = f_0(x)$

b) Par composition on en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $f'_0(x) = -f'_1(x)$ donc f_1 est décroissante.

c) Les courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

4. a) $f_n(x) = \frac{1}{e^{nx}(1+e^{-x})} = \frac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

c) $f'_n(x) = -\frac{ne^{nx} + (n-1)e^{(n-1)x}}{(e^{nx} + e^{(n-1)x})^2} < 0$ donc les fonctions f_n sont décroissantes.

105. Évolution d'une proportion

1. $p(10) \approx 0,88$

2. a) $p'(x) = \frac{0,2e^{-0,2x}}{(1+e^{-0,2x})^2} > 0$ donc p est croissante.

b) Par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 1$.

c) Plus les années s'écoulent, plus la proportion de personnes équipées augmentera jusqu'à ce que toutes les personnes soient équipées.

106. Taux d'alcoolémie

1. $f'(t) = 2e^{-t} + 2t(-e^{-t}) = 2(1-t)e^{-t}$ donc croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

2. Elle est maximale pour $t = 1$ et vaut $f(1) = 2e^{-1} \approx 0,74$.

3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ donc la concentration d'alcool disparaît.

4. a) Car la limite est nulle donc la concentration sera inférieure à 5×10^{-3} .

b)

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25	0,25	0,25
t	3,5	3,75	4
C	0,21	0,18	0,15

La valeur affichée est le temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.

Préparer le BAC
Je me teste

p. 72

107. D 108. D
 109. B 110. A et D
 111. D 112. C
 113. B 114. B
 115. C

Préparer le BAC
Je révise

p. 73

116. Observations graphiques

1. c)
 2. b)
 3. b)

117. Courbe représentative

1. b)
 2. d)

118. Opérations sur les limites

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

119. Comparaison de fonctions

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

120. Limites et croissances comparées

1. b)
 2. c)
 3. c)

121. Composition de limites

1. b)
 2. b)
 3. c)

Exercices
vers le supérieur

p. 74

122. Calcul de limites

- a) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 b) $f(x) = \frac{2x^{n-1}}{\sqrt{1+x^n} + \sqrt{1-x^n}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
 c) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + 1}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}$.
 d) $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+x+1}}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$.

123. Contres-exemples

1. $f(x) = x^3 - 3x^2$
 2. $f(x) = -\frac{1}{x^3}$
 3. $f(x) = x^2 - 4$

124. Utiliser les définitions

A. Préliminaires

1. $\Delta = (3-M)^2 - 4(1-2M) = M^2 + 2M + 5 = (M+1)^2 + 4 > 0$

2. a) Car si $x > 0$ alors $-\frac{1}{x+2} < 0$.

- b) L'inéquation donne $x > 2 - \frac{1}{\varepsilon}$ et ε étant petit alors x est grand.

B. Démonstrations

1. $f(x) = \frac{(x+1)(x+2) - 1}{x+2} = x+1 - \frac{1}{x+2}$ et donc,

d'après la partie A, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0$.

2. a) $f(x) > M \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + 1}{x+2} > M$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3-M)x + 1 - 2M < 0$$

car $x + 2 < 0$.

Donc x est entre les racines du trinôme comme -2 car $(-2)^2 + (3 - M)(-2) + 1 - 2M = -1$.

b) Donc $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$.

$$\begin{aligned} 3. \text{ a) } f(x) < m &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} < m \\ &\Leftrightarrow x^2 + (3 - m)x + 1 - 2m < 0 \\ &\text{car } x + 2 > 0. \end{aligned}$$

Donc x est entre les racines du trinôme comme -2 car $(-2)^2 + (3 - M)(-2) + 1 - 2M = -1$.

b) Donc $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$.

125. Asymptotes paramétrées

1. Pour a négatif.
2. Pour toutes les valeurs réelles.
3. Pour toutes les valeurs sauf $\frac{1}{2}$.

126. Asymptote oblique (1)

$$\frac{(ax + b)(2x - 2) + c}{2x - 2} = \frac{2ax^2 + (2b - 2a)x + (c - 2b)}{2x - 2}$$

$$\text{d'où le système : } \begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 2a = 1 \\ c - 2b = -6 \end{cases}$$

qui donne $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$ et $c = -4$.

On en déduit que l'asymptote oblique a pour équation $y = \frac{1}{2}x + 1$.

127. Asymptote oblique (2)

1. a) $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$

b) $f'(x) = \frac{2x^2 - 4}{4x^2}$ qui s'annule en $\pm\sqrt{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$$f(x) = \frac{x \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{2} \text{ qui donne } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$			$-1 - \sqrt{2}$	$+\infty$	
	$-\infty$			$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	

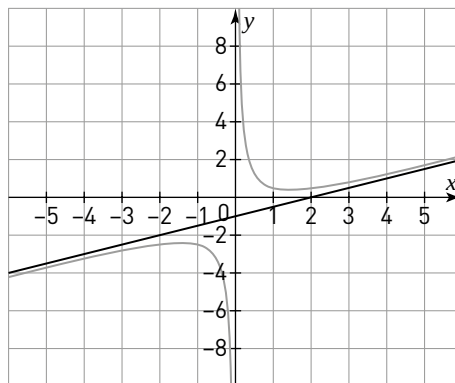
c) Une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

$$2. \text{ a) } f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1 \right) = \frac{1}{x} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2} - 1 \right) = 0.$$

b) Pour les réels négatifs, la courbe est en dessous de l'asymptote et pour les réels positifs elle est au-dessus.

3.



128. Asymptote oblique (3)

1. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ donc la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

$$2. f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) = \frac{2}{2x + 2}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right) = 0.$$

3. Le point $(-1 ; 2)$ est centre de symétrie quand $\frac{f(-1-h) + f(-1+h)}{2} = 2$.

129. Branches infinies (1)

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$2. a) \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$b) \frac{g(x)}{x} = x$$

$$3. a) \frac{f(x)}{x} = \frac{x \left(2 + \frac{3}{x^2} \right)}{1 + \frac{1}{x}} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

et branche parabolique d'axe (Oy).

$$b) \frac{g(x)}{x} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \left(1 + \frac{2}{x} \right)} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

et branche parabolique d'axe (Ox).

$$c) \frac{h(x)}{x} = \frac{e^x(1+e^{-x})}{x^3} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty \text{ et branche parabolique d'axe (Oy).}$$

$$d) \frac{k(x)}{x} = \frac{1 + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k(x)}{x} = 0 \text{ et branche parabolique d'axe (Ox).}$$

130. Branches infinies (2)

$$1. a) f(x) = \frac{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{1 + \frac{1}{x}} \text{ et } g(x) = \frac{x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)}{1 + \frac{1}{x}} \text{ donne bien}$$

les limites infinies.

$$b) \frac{f(x)}{x} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \text{ et } \frac{g(x)}{x} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\text{donnent } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1.$$

c) Ni l'un ni l'autre.

2. a) Pour f on a $a = 2$ et pour g , $a = 1$.

$$b) f(x) - (2x + b) = \frac{-(1+b)x - b}{x+1}$$

$$c) \text{ Ce qui s'écrit aussi } \frac{-(1+b)x - \frac{b}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \text{ et donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + b) = -(1+b)$$

pour que la droite d'équation $y = 2x + b$ soit asymptote oblique, il faut que cette limite soit nulle donc que $b = -1$.

$$3. g(x) - (x + b) = \frac{x\sqrt{x} - (1+b)x - b}{x+1} = \frac{\sqrt{x} \left(1 - \frac{1+b}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x\sqrt{x}} \right)}{1 + \frac{1}{x}}$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (x + b) = +\infty$ donc pas d'asymptote oblique.

$$4. f(x) - 2x = -\frac{x}{1+x} = -\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = -1$$

on retrouve b .

131. Fonction paire

Comme $f(-x) = f(x)$ quand x tend vers $-\infty$ alors $-x$ tend vers $+\infty$.

132. Utilisation de la dérivée

$$1. a) \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{9-x} - 3}{x}$$

$$b) = \frac{-x}{x(\sqrt{9-x} + 3)} = -\frac{1}{\sqrt{9-x} + 3}$$

$$\text{et donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-x} - 3}{x} = -\frac{1}{6}.$$

$$c) \text{ Cela rappelle } f'(0) \text{ et si on calcule } f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{9-x}}$$

$$\text{qui donne } f'(0) = -\frac{1}{6}.$$

2. a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ et $f'(0) = 1$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{x} = -1$.

b) $f'(x) = e^{x-1}$ et $f'(1) = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - e}{x-1} = 1$.

133. Règle de l'Hôpital

1. a) $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = e^x$ donc la limite vaut $\frac{2 \times 0}{e^0} = 0$.

b) $f'(x) = 1 \times e^{x^2-1} + x \times 2xe^{x^2-1}$ et $g'(x) = e^x$ donc la limite vaut $\frac{e^{-1} + 0}{e^0} = e^{-1}$.

2. a) $\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{3x+1}{(x+1)(x-1)}$ donne $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2-1} = +\infty$.

b) Avec la règle on obtient $\frac{3}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$ différent car $\lim_{x \rightarrow 1} 3x+1 \neq 0$.

3. a) $h(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin(X)}{X}$ qui par encadrement et comme X tend vers $+\infty$ donne comme limite 0.

b) $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right)$
 $= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

et $g'(x) = 1$.

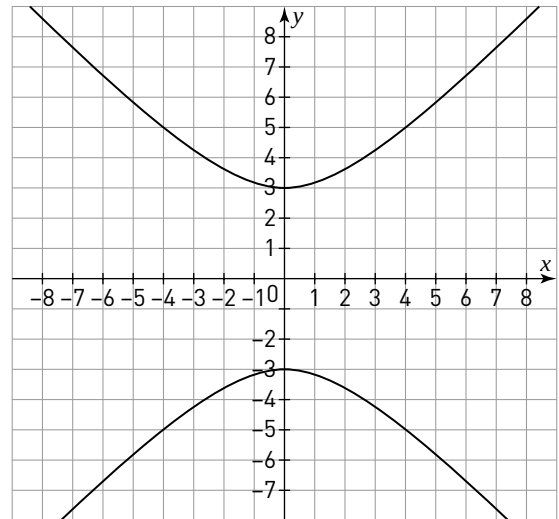
c) $\frac{f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}{g'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)} = \frac{1}{n\pi} \sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1$

si on pose $v_n = \frac{1}{n\pi}$ le résultat précédent devient ± 1 donc pas limite.

d) La condition $g(a) \neq 0$ n'est pas réalisée.

134. Coniques

1.



Deux limites ?

2. $y^2 = x^2 + 9$ d'où $y = \pm\sqrt{x^2 + 9}$.

3. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

et le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

4. $f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} - x = \frac{9}{\sqrt{x^2 + 9} + x}$

donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$ et

$-f(x) - x = -\sqrt{x^2 + 9} - x = \frac{-9}{\sqrt{x^2 + 9} - x}$

donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} -f(x) - x = 0$, on en déduit que la droite est asymptote aux deux courbes.

5. De même $y = -x$ est asymptote.

135. Calculs de limites (1)

$$a) \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}$$

donne comme limite $\frac{1}{2}$.

b) Avec la règle de l'Hôpital la limite est

$$\frac{(n+1)a^n}{na^{n-1}} = \frac{(n+1)a}{n}.$$

c) Par comparaison la limite est infinie.

d)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{1}{\sqrt{x+a}} = \frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x+a}} - \frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

et la limite donne $-\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

$$e) f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \text{ qui tend vers } 1.$$

136. Calculs de limites (2)

$$1. \sqrt{x+n} - \sqrt{x} = \frac{n}{\sqrt{x+n} + \sqrt{x}} \text{ qui tend vers } 0.$$

2. On associe une $\sqrt{x}$ à chaque terme et du coup chaque différence ayant pour limite 0 d'après 1, la somme aussi.

137. Partie entière

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{2}{x}\right) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} E(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} E(x) = 0.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} E\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{b}{a} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{x} E\left(\frac{x}{a}\right) = 0.$$

138. Fonction périodique

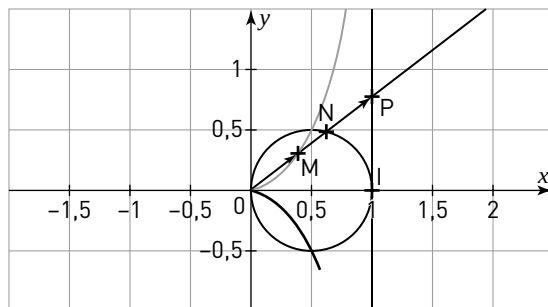
1. La suite tend vers l'infini.

$$2. f(x + nT) = f(x)$$

139. Cissoïde de Dioclès

A. Construction de la cissoïde

1.



2. C'est pareil et l'autre partie est la fonction $-f(x)$.

B. Équation de la cissoïde

1. a) (OP) $y = tx$

$$b) \text{ Équation du cercle : } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$c) \text{ On remplace, ce qui donne } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + t^2 x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{d'où } x = \frac{1}{t^2 + 1} \text{ et } N\left(\frac{1}{t^2 + 1}; \frac{t}{t^2 + 1}\right).$$

$$2. \text{ De plus } \overrightarrow{NP} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{t^2 + 1} \\ \frac{t^3}{t^2 + 1} \end{pmatrix} \text{ qui sont aussi}$$

les coordonnées de M.

3. On vérifie.

4. L'équation en y^2 a donc deux solutions symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

$$5. a) g'(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \text{ d'où le tableau :}$$

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	0	1	0

b) donc dans $[0 ; 1]$.

c) OK.

C. Détermination de $\sqrt[3]{2}$

1. La droite (IM) a pour équation $y = -t^3 x + t^3$ donc $R(0 ; t^3)$.

2. Pour $t = \sqrt[3]{2}$ alors $R(0 ; 2)$ donc il suffit de faire varier P pour que R corresponde à ce point et l'ordonnée de P donne la réponse.

140. Fonction équivalentes

1. a) $\frac{f(x)}{g(x)} = e^{\frac{1}{x^2}}$ et par composée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

b) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x}}}{2}$ et par composée $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

2. a) $g(x) = 2$

b) $g(x) = x$

c) $g(x) = x$

d) $g(x) = (a + 1)x$

141. Fonctions asymptotiques

a) $f(x) - g(x) = e^{-x}$ et par composée $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$.

b) $f(x) - g(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^4 + \cos(x) + x^2}}$ et par encadrement

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = 0$.

142. Calcul de limites (3)

a) $f(x) = \frac{e^x - 1}{\frac{1}{x}}$ et par composée $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - e^{-\frac{1}{x(x+1)}} \right)$ et par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ et par quotient $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

143. Étude qualitative

1. Car $1 + x^2 > 0$ et $\sqrt{1 + x^2} > x$.

$$2. f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} = \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{2\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} \sqrt{1+x^2}} > 0$$

donc la fonction est croissante.

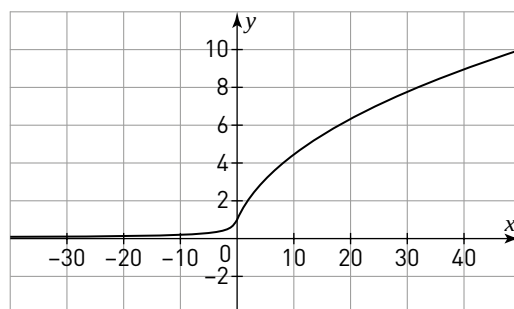
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$4. a) x + \sqrt{1+x^2} = \frac{-1}{x - \sqrt{1+x^2}}$$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{1+x^2} = 0$.

b) Par composée $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

5.



144. Triangle rectangle

a) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ donc $\frac{h(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$.

b) $x(h(x) - x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1}$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(h(x) - x) = \frac{1}{2}$.

145. Fonction homographique

On a : $-1 = -\frac{d}{c}$, $2 = \frac{1}{c}$ et $1 = \frac{b}{d}$.

Donc $b = d = c = \frac{1}{2}$.

146. Fonction exponentielle (1)

1. Tous les réels sauf 0.

2. a) $f'(x) = \frac{x^{n-1}e^x(x-n)}{x^{2n}}$ et $n-1$ est impair

donc x^{n-1} change de signe donc :

x	$-\infty$	0	n	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

3. $n-1$ est pair. La dérivée est du signe de $x-n$.

x	$-\infty$	0		n	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

147. Fonction exponentielle (2)

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ donc une asymptote horizontale

d'équation $y = 1$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3. Oui.

4. La dérivée est du signe de $x+1$ donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

148. Vitesse d'un véhicule

1. $[0 ; +\infty[$

2. a) $t_a = \frac{d}{80}$

b) $t_r = \frac{d}{x}$

c) $t = t_a + t_r = \frac{d}{80} + \frac{d}{x}$

3. $v(x) = \frac{2d}{t} \Leftrightarrow \frac{2}{v(x)} = \frac{t}{d} = \frac{1}{80} + \frac{1}{x}$ donc $v(x) = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{x}}$

4. $v'(x) = \frac{\frac{2}{x^2}}{\left(\frac{1}{80} + \frac{1}{x}\right)^2} > 0$ donc croissante.

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 160$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = 0$.

Travaux pratiques

p. 78

TP 1. Datation au carbone 14

• **Durée estimée :** 55 min

• **Objectif :** Découvrir la datation au carbone 14.

A. Étude de la fonction C

1. Pour étudier les variations d'une fonction dérivable, on détermine sa fonction dérivée afin d'obtenir son signe.

La fonction C est dérivable comme composée d'une fonction polynomiale par une fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. On obtient alors : $C'(t) = -\lambda C_0 e^{-\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Les constantes λ et C_0 sont strictement positives ainsi la dérivée est strictement négatives sur $\mathbb{R}_+$. C est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. On a d'une part $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\lambda t = -\infty$ car $\lambda > 0$ et d'autre part $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0$. Ainsi par limite d'une composée de fonctions continues, on obtient : $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = 0$.

On en déduit le tableau de variations complet de la fonction sur $\mathbb{R}_+$.

t	0	$+\infty$
$C'(t)$	-	
$C(t)$	C_0	0

B. Recherche de seuil

1.	0	1E-12
	1 000	8,86034E-13
	2 000	7,85056E-13

3 000	6,95586E-13
4 000	6,16313E-13
5 000	5,46074E-13
6 000	4,8384E-13
7 000	4,28699E-13
8 000	3,79842E-13
9 000	3,36553E-13
10 000	2,98197E-13
11 000	2,64213E-13
12 000	2,34102E-13
13 000	2,07422E-13
14 000	1,83783E-13
15 000	1,62838E-13
16 000	1,4428E-13
17 000	1,27837E-13
18 000	1,13268E-13
19 000	1,00359E-13
20 000	8,89216E-14
21 000	7,87876E-14
22 000	6,98085E-14
23 000	6,18527E-14
24 000	5,48036E-14
25 000	4,85578E-14
26 000	4,30239E-14
27 000	3,81206E-14
28 000	3,37762E-14
29 000	2,99268E-14
30 000	2,65162E-14

2. $t_0 = 29\,000$ au millier d'années près.
3. Sur le même principe qu'un affinage à la calculatrice, on complète le fichier pour obtenir le seuil $t_0 = 28\,980$ à l'année près.

28 972	3,00284E-14
28 973	3,00248E-14
28 974	3,00211E-14
28 975	3,00175E-14
28 976	3,00139E-14
28 977	3,00102E-14
28 978	3,00066E-14
28 979	3,0003E-14
28 980	2,99993E-14
28 981	2,99957E-14

28 982	2,99921E-14
28 983	2,99884E-14
28 984	2,99848E-14
28 985	2,99812E-14
28 986	2,99776E-14
28 987	2,99739E-14
28 988	2,99703E-14
28 989	2,99667E-14
28 990	2,99631E-14

C. Programme de recherche de seuil

```
1. import math
def datation(C):
    l=1.21*10**(-4)
    C0=10**(-12)
    t=0
    while C0*math.exp(-l*t)>C :
        t=t+1000
    return t
```

```
2. import math
def datation(C):
    l=1.21*10**(-4)
    C0=10**(-12)
    t=0
    while C0*math.exp(-l*t)>C :
        t=t+1000
    t=t-1000
    while C0*math.exp(-l*t)>C :
        t=t+100
    t=t-100
    while C0*math.exp(-l*t)>C :
        t=t+10
    t=t-10
    while C0*math.exp(-l*t)>C :
        t=t+1
    return t
```

```
3. import math
def seuil(Y,p) :
    l=1.21*10**(-4)
    C0=10**(-12)
    x=0
    if p>=3 :n=p
    else:n=3
    while n>=p :
        while C0*math.exp(-l*x)>Y :
            x=x+10**n
        x=x-10**n
        n=n-1
    x=x+10**p
    return x
```

TP 2. Critère de Cauchy

• **Durée estimée** : 30 min

• **Objectif** : Découvrir le critère de Cauchy.

1. Les limites sont nulles.

2.

y/x	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0	-0,01	-0,02	-0,03	-0,04	-0,05
0,05	0	-0,0009	-0,0016	-0,0021	-0,0024	-0,0025	-0,0024	-0,0021	-0,0016	-0,0009	0
0,04	0,0009	0	-0,0007	-0,0012	-0,0015	-0,0016	-0,0015	-0,0012	-0,0007	0	0,0009
0,03	0,0016	0,0007	0	-0,0005	-0,0008	-0,0009	-0,0008	-0,0005	0	0,0007	0,0016
0,02	0,0021	0,0012	0,0005	0	-0,0003	-0,0004	-0,0003	0	0,0005	0,0012	0,0021
0,01	0,0024	0,0015	0,0008	0,0003	0	-0,0001	0	0,0003	0,0008	0,0015	0,0024
0	0,0025	0,0016	0,0009	0,0004	0,0001	0	0,0001	0,0004	0,0009	0,0016	0,0025
-0,01	0,0024	0,0015	0,0008	0,0003	0	-0,0001	0	0,0003	0,0008	0,0015	0,0024
-0,02	0,0021	0,0012	0,0005	0	-0,0003	-0,0004	-0,0003	0	0,0005	0,0012	0,0021
-0,03	0,0016	0,0007	0	-0,0005	-0,0008	-0,0009	-0,0008	-0,0005	0	0,0007	0,0016
-0,04	0,0009	0	-0,0007	-0,0012	-0,0015	-0,0016	-0,0015	-0,0012	-0,0007	0	0,0009
-0,05	0	-0,0009	-0,0016	-0,0021	-0,0024	-0,0025	-0,0024	-0,0021	-0,0016	-0,0009	0

3. a) $f(0,04) - f(0,05)$

b) Oui car $x = y$.

c) Au bord de la diagonale.

d) Que la limite est nulle, ce qui est cohérent.

4. On obtient dans ce cas :

y/x	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0	-0,01	-0,02	-0,03	-0,04	-0,05
0,05	0	5	13,3333	30	80	#DIV/0!	-120	-70	-53,333	-45	-40
0,04	-5	0	8,33333	25	75	#DIV/0!	-125	-75	-58,333	-50	-45
0,03	-13,333	-8,3333	0	16,6667	66,6667	#DIV/0!	-133,33	-83,333	-66,667	-58,333	-53,333
0,02	-30	-25	-16,667	0	50	#DIV/0!	-150	-100	-83,333	-75	-70
0,01	-80	-75	-66,667	-50	0	#DIV/0!	-200	-150	-133,33	-125	-120
0	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
-0,01	120	125	133,333	150	200	#DIV/0!	0	50	66,6667	75	80
-0,02	70	75	83,3333	100	150	#DIV/0!	-50	0	16,6667	25	30
-0,03	53,3333	58,3333	66,6667	83,3333	133,333	#DIV/0!	-66,667	-16,667	0	8,33333	13,3333
-0,04	45	50	58,3333	75	125	#DIV/0!	-75	-25	-8,3333	0	5
-0,05	40	45	53,3333	70	120	#DIV/0!	-80	-30	-13,333	-5	0

Et on obtient bien d'un côté de la diagonale $+\infty$ et de l'autre $-\infty$.

CHAPITRE 3 Fonctions cosinus et sinus

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Dans ce chapitre, nous verrons la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus et comment dériver une fonction composée utilisant les polynômes et les fonctions trigonométriques. Dans un deuxième temps, nous verrons les valeurs remarquables et comment résoudre une équation et une inéquation mettant en jeu ces fonctions trigonométriques. Nous verrons enfin l'étude des fonctions trigonométriques et la résolution d'une inéquation trigonométrique de degré 3.

Objectifs

- Dériver une fonction trigonométrique.
- Résoudre une équation trigonométrique.
- Résoudre une inéquation trigonométrique.
- Étudier une fonction trigonométrique.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ

p. 81

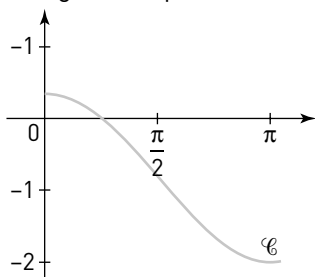
1. Déterminer la périodicité et la parité d'une fonction

1. a) 2π b) 2π c) π
 2. a) Paire. b) Impaire. c) Impaire.

2. Étudier la courbe d'une fonction trigonométrique

1. Comme f est paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Il suffit donc de tracer le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir la courbe sur $[0 ; 2\pi]$.

2. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur et utilise une figure erronée. L'erreur est corrigée sur les éditions suivantes, qui utilisent la figure ci-après.



Symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées puis translation de la courbe obtenue sur $[0 ; 2\pi]$ de vecteur horizontal et de longueur 2π vers la gauche puis vers la droite.

3. Se repérer dans un triangle rectangle

Dans le triangle rectangle ABC, on a :

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ donc } \widehat{ACB} = 60^\circ.$$

Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC}$ sont complémentaires donc $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

4. Se repérer sur le cercle trigonométrique

- a) C b) B c) A d) E e) D

5. Connaître les valeurs remarquables

$$\text{a) } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{b) } \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{d) } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Activités

p. 82-83

1 Dériver les fonctions cosinus et sinus

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Introduire la dérivation en abordant la notion de limite.

A. Limite... finie ?

1. Aire du triangle OMP $\leq$ Aire de la portion de disque OMI $\leq$ Aire du triangle OTI

$$\frac{MP \times OP}{2} \leq \frac{\pi \times x}{2\pi} \leq \frac{TI \times OI}{2}$$

$$\frac{\sin(x) \times \cos(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} \text{ avec } \sin(x) \neq 0 \text{ puisque}$$

$$x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[.$$

$$\cos(x) \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{\cos(x)}$$

2. Si $x > 0$, on utilise le théorème des gendarmes et on a : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Si $x < 0$, $f(-x) = f(x)$ car $\sin(-x) = -\sin(x)$ donc f est paire.

Lorsque x tend vers 0 avec $x < 0$, $-x$ tend vers 0 avec $-x > 0$ et donc $f(-x)$ tend vers 1 et comme $f(-x) = f(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Remarque : On dit alors que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

B. Vers la dérivation...

1. Lorsque la fonction sinus est décroissante, la fonction cosinus prend des valeurs négatives.

Lorsque la fonction sinus est croissante, la fonction cosinus prend des valeurs positives.

Lorsque la fonction cosinus est décroissante, la fonction sinus prend des valeurs positives.

Lorsque la fonction cosinus est croissante, la fonction sinus prend des valeurs négatives.

2. a) On développe $\sin(x+h)$ à l'aide de la formule $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\cos(h) - 1}{h} &= \frac{(\cos(h) - 1)(\cos(h) + 1)}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{\cos^2(h) - 1}{h(\cos(h) + 1)} \\ &= \frac{-\sin^2(h)}{h(\cos(h) + 1)} = \frac{\sin(h)}{h} \times \frac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x) \times \frac{\sin(h)}{h} \\ &\quad + \sin(x) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} = \cos(x). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction dérivée de la fonction sinus est la fonction cosinus, ce qui correspond au fait que :

- lorsque la fonction sinus est décroissante, la fonction cosinus prend des valeurs négatives ;
- lorsque la fonction sinus est croissante, la fonction cosinus prend des valeurs positives.

$$\begin{aligned} \text{3. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} -\sin(x) \times \frac{\sin(h)}{h} \\ &\quad + \cos(x) \times \frac{\cos(h) - 1}{h} = -\sin(x) \end{aligned}$$

2 Résoudre des équations trigonométriques

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Commencer à résoudre des équations simples à l'aide du cercle trigonométrique.

A. Résoudre une équation en cosinus

1. L'abscisse du point M est $\cos(\alpha)$.

2. L'abscisse du point N est $\cos(-\alpha)$ et $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$. (Les points M et N ont la même abscisse par symétrie d'axe (OI).)

3. a) Soit α et β deux réels appartenant à l'inter-

valle $[0 ; 2\pi[$. Alors : $\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta \end{cases}$

b) Comme la fonction cosinus est 2π -périodique, les solutions de l'équation $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ pour α, β réels sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

B. Résoudre une équation en sinus

1. a) $\widehat{IOP} = \pi - \alpha$

b) L'abscisse du point P est $\sin(\pi - \alpha)$.

Les points M et P ont la même ordonnée (symétrie d'axe (OJ)) donc $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$.

2. a) Soit α et β deux réels appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.

$$\text{Alors : } \sin(\alpha) = \sin(\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta \end{cases}$$

b) Comme la fonction sinus est 2π -périodique, les solutions de l'équation $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$ pour α, β réels sur $\mathbb{R}$ sont :

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3 Déterminer une valeur approchée des solutions d'une équation trigonométrique

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Utiliser un algorithme Python pour approcher des solutions d'une équation trigonométrique.

1. a) $f'(x) = -6\sin(2x - 1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(2x - 1) = \sin(0) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi + 1}{2}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi + 1}{2}$	π
$f'(x)$	-	0	-	0
Variation de f		3	-3	

Diagramme de variation : $3\cos(1) \rightarrow 3 \rightarrow -3 \rightarrow 3\cos(1)$

b) La fonction f est continue sur l'intervalle $[0 ; \pi]$. La fonction f prend des valeurs strictement positives sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; \frac{\pi + 1}{2}\right]$, f est strictement décroissante et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ et $f\left(\frac{\pi + 1}{2}\right) = -3$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; \frac{\pi + 1}{2}\right]$. Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi + 1}{2} ; \pi\right]$,

f est strictement décroissante et $f\left(\frac{\pi + 1}{2}\right) = -3$ et $f(\pi) = 3\cos(1)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\frac{\pi + 1}{2} ; \pi\right]$.

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

2. a) [ERRATUM] Le code de la question 2 utilise le symbole $^$ pour la fonction puissance : c'est une erreur. Il faut utiliser le symbole $**$.

Le programme retourne une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; \frac{\pi + 1}{2}\right]$ au dix-millième près.

b)

```
from math import *
def dichotomie(n):
    a=pi/2+0.5
    b=pi
    while abs(b-a)>1/(10**n):
        c=(a+b)/2
        if 3*cos(2*c-1)>0:
            b=c
        else:
            a=c
    print("Une valeur approchée de x est comprise entre", a, "et", b)
```

c) Le code est le suivant.

```
from math import *
def dichotomie(n):
    a1=0.5
    b1=pi/2+0.5
    a2=pi/2+0.5
    b2=pi
    while abs(b1-a1)>1/(10**n):
        c1=(a1+b1)/2
        if 3*cos(2*c1-1)>0:
            a1=c1
        else:
            b1=c1
    while abs(b2-a2)>1/(10**n):
        c2=(a2+b2)/2
        if 3*cos(2*c2-1)<0:
            b2=c2
        else:
            a2=c2
    print("Une valeur approchée de x1 est comprise entre", a1, "et", b1)
    print("Une valeur approchée de x2 est comprise entre", a2, "et", b2)
```

Les valeurs renvoyées sont :

Une valeur approchée de x_1 est comprise entre 1.2853981633974483 et 1.2854940371966912

Une valeur approchée de x_2 est comprise entre 2.0707963267948966 et 2.0708616830160143

À vous de jouer

p. 85

1. a) $f'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

b) $f'(x) = -2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) = 2(1 - 2\sin^2(x))$

2. a) $f'(x) = \frac{x \cos(x) - 2 \sin(x)}{x^3}$

b) $f'(x) = \frac{(1 - \sin(x))(3 + \sin(x)) - \cos(x)(x + \cos(x))}{(3 + \sin(x))^2}$

$f'(x) = \frac{2 - 2\sin(x) - x \cos(x)}{(3 + \sin(x))^3}$

3. a) $f'(x) = 15\cos(3x + 12)$

b) $g'(x) = 40\sin(-5x + 4)$

c) $h'(x) = -14\sin(-2x - 3)$

4. a)

$f'(x) = \frac{(-3\sin(3x) - 1)(\sin(3x) + x + 2) - (\cos(3x) - x)(3\cos(3x) + 1)}{(\sin(3x) + x + 2)^2}$

$f'(x) = \frac{3x(\cos(3x) - \sin(3x)) - 7\sin(3x) - \cos(3x) - 5}{(\sin(3x) + x + 2)^2}$

b)

$g'(x) = \frac{-5\sin(5x + 1) \left(\sin\left(\frac{x}{4}\right) + 3 \right) - \frac{1}{4}\cos(5x + 1)\cos\left(\frac{x}{4}\right)}{\left(\sin\left(\frac{x}{4}\right) + 3 \right)^2}$

5. a) $\left\{ -\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{18}; \frac{11\pi}{18}; \frac{13\pi}{18} \right\}$

b) $\left\{ -\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$

6. a)
$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = 3x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x + \frac{\pi}{3} = -3x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5\pi}{6} = 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{6} = -4x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{24} - \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont : $\left\{ -\frac{47\pi}{24}; -\frac{19\pi}{12}; -\frac{35\pi}{24}; -\frac{7\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}; -\frac{11\pi}{24}; -\frac{23\pi}{24}; \frac{\pi}{24}; \frac{13\pi}{24}; \frac{25\pi}{24}; \frac{17\pi}{12}; \frac{37\pi}{24} \right\}$

b)
$$\begin{cases} \pi - \frac{x}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \pi - \frac{x}{2} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{10\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Les solutions sont : $\left\{ -\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$

7. $x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right[$

8. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad 2x + \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{24} + k\pi < x < \frac{19\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x \in \left[\frac{\pi}{24}; \frac{19\pi}{24} \right[\cup \left[\frac{25\pi}{24}; \frac{43\pi}{24} \right[$

9. a) $f(x + 2\pi) = 3\cos^2(x + 2\pi) - 6\cos(x + 2\pi)f(x + 2\pi) = f(x)$
car la fonction cosinus est 2π -périodique.

b) On peut étudier f sur $[0; 2\pi]$.

c) $f'(x) = -6\cos(x)\sin(x) + 6\sin(x)$

$f'(x) = 6\sin(x)(1 - \cos(x))$

x	0	π	2π
$6\sin[x]$	0	+	0
$1 - \cos[x]$	0	+	+
$f'(x)$	0	+	0
Variation de f	-3	9	-3

10. [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur qui est corrigée sur les éditions suivantes : la fonction $f(x) = 2\cos(2x) + \sin^2(x)$ est remplacée par $f(x) = 2\cos(x) + \sin^2(x)$.

a) La fonction cosinus étant 2π périodique, la fonction f l'est aussi.

b) $f(-x) = 2\cos(x) + [-\sin(x)]^2$

$f(-x) = f(x)$ donc f est paire.

c) $f'(x) = -2\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)(\cos(x) - 1)$ avec $\cos(x) - 1 \leq 0$ et $\sin(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; \pi]$.

x	0	π
$f'(x)$	-	
Variation de f	2	-2

f étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

x	π	0	π
$f'(x)$	+		-
Variation de f	-2	2	-2

11. On effectue un changement de variable en posant $X = \sin(x)$ puis on résout l'inéquation

$$2X^2 - X - 1 > 0 \text{ et } \Delta = 9 \text{ et } X_1 = -\frac{1}{2}, X_2 = 1$$

$$\text{Donc } 2X^2 - X - 1 > 0 \text{ pour } X < -\frac{1}{2}$$

$$\text{ainsi, } \sin(x) < -\frac{1}{2} \text{ et } x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right].$$

12. [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur qui est corrigée sur les éditions suivantes. Le début de l'exercice est modifié ainsi :

1. Soit $f(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. Vérifier que $f(1) = 0$.

2. Résoudre

$$1. f(1) = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$$

2. On effectue un changement de variable en posant $X = \cos(x)$ puis on résout l'inéquation $2X^3 - X^2 - 2X + 1 < 0$.

Or, $f(1) = 0$. On peut donc factoriser par $X - 1$ l'expression $2X^3 - X^2 - 2X + 1$.

$$2X^3 - X^2 - 2X + 1 = (X - 1)(aX^2 + bX + c) \\ = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$$

$$\text{Par identification, on a : } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$2X^3 - X^2 - 2X + 1 = (X - 1)(2X^2 + X - 1)$$

On détermine le signe de $2X^2 + X - 1$.

$$\Delta = 9 \text{ et } X_1 = -1, X_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi } 2X^3 - X^2 - 2X + 1 < 0 \text{ pour } X < -1 \text{ et } X \in \left[\frac{1}{2}; 1\right[$$

Comme $X = \cos(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $X \in [-1; 1]$, on a :

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < X < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \cos(x) < 1$$

$$\text{donc sur l'ensemble } [-\pi; \pi], S = \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[.$$

$$13. 1. f(-1) = -1 - 2,5 + 2 + 1,5 = 0$$

2. On effectue un changement de variable en posant $X = \cos(x)$ puis on résout l'inéquation $X^3 - 2,5X^2 - 2X + 1,5 < 0$. Or, $f(1) = 0$. On peut donc factoriser par $X + 1$ l'expression $X^3 - 2,5X^2 - 2X + 1,5$

$$X^3 - 2,5X^2 - 2X + 1,5 = (X + 1)(aX^2 + bX + c) \\ = aX^3 + (b + a)X^2 + (c + b)X + c$$

$$\text{Par identification, on a : } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3,5 \\ c = 1,5 \end{cases}$$

$$X^3 - 2,5X^2 - 2X + 1,5 = (X + 1)(X^2 - 3,5X + 1,5)$$

on détermine le signe de $X^2 - 3,5X + 1,5$.

$$\Delta = 6,25 \text{ et } X_1 = 3, X_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ainsi } X^3 - 2,5X^2 - 2X + 1,5 < 0 \text{ pour } X < -1 \text{ et } X \in \left[\frac{1}{2}; 3\right[$$

comme $X = \cos(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $X \in [-1 ; 1]$, on a :

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < X < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \cos(x) < 1$$

donc sur l'ensemble $[0 ; 2\pi]$, $S = \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3} ; 2\pi\right]$.

14. 1. $f(2) = 8 - 2 - 5 - 1 = 0$

2. On effectue un changement de variable en posant $X = \sin(x)$ puis on résout l'inéquation $X^3 - 0,5X^2 - 2,5X - 1 < 0$. Or, $f(2) = 0$. On peut donc factoriser par $X - 2$ l'expression $X^3 - 0,5X^2 - 2,5X - 1$.

$$\begin{aligned} X^3 - 0,5X^2 - 2,5X - 1 &= (X - 2)(aX^2 + bX + c) \\ &= aX^3 + (b - 2a)X^2 + (c - 2b)X - 2c \end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1,5 \\ c = 0,5 \end{cases}$$

$$X^3 - 2,5X^2 - 2X + 1,5 = (X + 1)(X^2 + 1,5X + 0,5)$$

on détermine le signe de $X^2 + 1,5X + 0,5$.

$$\Delta = 0,25 \text{ et } X_1 = -1, X_2 = -\frac{1}{2}$$

Ainsi $X^3 - 2,5X^2 - 2X + 1,5 < 0$ pour $X < -1$ et $X \in \left]-\frac{1}{2} ; 2\right[$

comme $X = \sin(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $X \in [-1 ; 1]$, on a :

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < X < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \cos(x) < 1$$

donc sur l'ensemble $[-\pi ; \pi]$,

$$S = \left[-\pi ; -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6} ; \pi\right].$$

Exercices

apprendre à démontrer

p. 60

Pour s'entraîner

On pose $f(x) = \sqrt{3}x + 2\cos(x) - 3$.

$$f'(x) = \sqrt{3} - 2\sin(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 0 < \sin(x) < \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow x \in \left[0 ; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} ; 2\pi\right] \end{aligned}$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	2π
$f'(x)$	+	-	+	
Variation de f				

• f est continue et monotone sur l'intervalle

$\left[0 ; \frac{2\pi}{3}\right]$ et ne prend que des valeurs négatives sur cet intervalle.

• f est continue et strictement croissante sur l'in-

tervalle $\left[\frac{2\pi}{3} ; 2\pi\right]$ avec $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$ et $f(2\pi) > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur

$$\left[\frac{2\pi}{3} ; 2\pi\right].$$

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; 2\pi]$. L'équation $\sqrt{3}x + 2\cos(x) = 3$ a une unique solution sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

Exercices

calculs et automatismes

p. 91

15. Valeurs remarquables (1)

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -1, \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

16. Valeurs remarquables (2)

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos\left(\frac{25\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin\left(\frac{17\pi}{2}\right) &= 1, \sin\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\left(-\frac{8\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

17. Dériver des fonctions (1)

- a) $-\sin(x)$
 b) $-\sin(x) + 3$
 c) $2\cos(x)$
 d) $3\cos(x) + 8$
 e) $-5\sin(x) - 5\cos(x) + 7$
 f) $6\cos(x) + 7\sin(x) + 5$

18. Déterminer la parité ou non d'une fonction

- a) $f(-x) = 2\cos(-x) + 13 = f(x)$ donc f est paire.
 b) $f(-x) = \sin(-x) + x = -\sin(x) + x = -f(x)$ donc f est impaire.
 c) $f(-x) = 2\sin(-x) - \cos(-x) = -2\sin(x) - \cos(x)$ donc f n'est ni paire ni impaire.
 d) $f(-x) = (-x)^2 + 3\cos(-x) = x^2 + 3\cos(x) = f(x)$ donc f est paire.
 e) $f(-x) = (-x)^3 + 5\sin(-x) = -x^3 - 5\sin(x) = -f(x)$ donc f est impaire.

19. Vrai ou faux ?

- a) Faux. b) Vrai. c) Vrai. d) Faux.

20. Périodiques ?

- a) 2π périodique. b) π périodique.
 c) 2π périodique. d) 2π périodique.
 e) 2π périodique. f) Non périodique.

21. Résoudre une équation trigonométrique

- a) $x = \pi$ b) $x = 0$ ou $x = \pi$
 c) $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ d) $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$
 e) $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$ f) $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

22. Résoudre une inéquation trigonométrique

- a) $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ b) $x \in]0; \pi] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$
 c) $x \in \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right]$ d) $x \in \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$

23. Dériver des fonctions (2)

- a) $f'(x) = -12\sin(3x)$ b) $f'(x) = 30\cos(5x)$
 c) $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ d) $f'(x) = -2\cos(x)\sin(x)$
 e) $f'(x) = 5\cos(x) + 5\cos(5x)$
 f) $f'(x) = -2\sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$

24. QCM

1. c) 2. a)

25. Déterminer les variations d'une fonction

a) $f'(x) = 1 - \sin(x)$ avec $\sin(x) < 1$ pour tout x réel donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 0,5 + \cos(x)$

Comme le signe de $f'(x)$ peut être positif et négatif, la fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

26. Lecture graphique

f est une fonction paire et $f(0) = 2$ donc la courbe rouge correspond à sa courbe représentative.

$g(0) = 1$ donc la courbe verte correspond à la courbe représentative de g .

Exercices d'application

p. 92-93

Image d'un nombre par une fonction trigonométrique

$$27. f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{7}{2}; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}-8}{2}; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3; f(\pi) = -4$$

$$28. 1. f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, f(\pi) = 0$$

$$2. g(\pi) = 3, g\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-12-\sqrt{3}}{2}, g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$29. f(\pi) = 1; f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{11}{12}; f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3+2\sqrt{3}}{12};$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{3+2\sqrt{2}}{6}$$

Périodicité et parité

30. 1. a) $f(x + 2\pi) = \frac{1 - \cos(x + 2\pi)}{2 + \cos(x + 2\pi)} = f(x)$

b) $f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{2 + \cos(-x)} = f(x)$

2. $g(x + 2\pi) = 1 + 5\cos^2(x + 2\pi) = g(x)$

$g(-x) = 1 + 5\cos^2(-x) = g(x)$

31. 1. Elles sont 2π périodiques car les fonctions cosinus et sinus sont 2π périodiques.

2. $f(-x) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire.

$g(-x) = -\sin(x) + \frac{3}{2 - \sin(x)}$

g n'est ni paire ni impaire.

32. 1. $f(x + 2\pi) = 2\sin(x) + \sin(2x + 4\pi) = f(x)$. Donc f est 2π périodique.

2. $f(-x) = -2\sin(x) - 2\sin(2x) = -f(x)$. Donc f est une fonction impaire.

33. 1. $f(x + 4\pi) = f(x)$ donc f est 4π périodique.

2. $f(-x) = -f(x)$ donc f est une fonction impaire.

Représentation graphique

34. a) Ni l'une ni l'autre. **b)** Impaire.

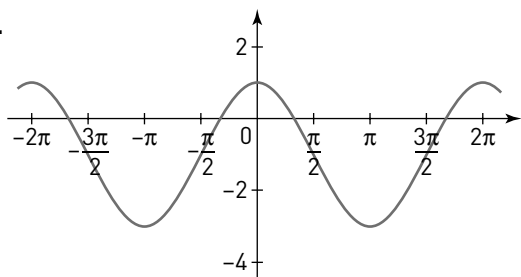
c) Paire. **d)** Paire.

c) Ni l'une ni l'autre.

35. a) 2π périodique. **b)** π périodique.

c) Non périodique.

36.



37.

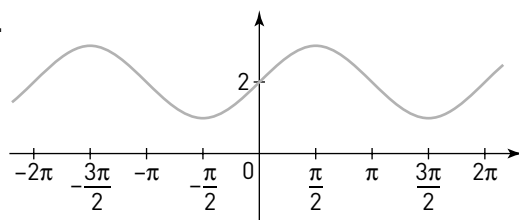


Tableau de variations

38.

x	$-\pi$	0	π
Variation de la fonction cosinus	-1	1	-1

x	0	π	2π
Variation de la fonction cosinus	1	-1	1

39.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Variation de la fonction sinus	0	-1	1	0

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Variation de la fonction sinus	0	1	-1	0

Dérivation

40. a) $f'(x) = 3\cos(x) + 2x\cos(x) - x^2\sin(x)$
 $= \cos(x)(3 + 2x) - x^2\sin(x)$

b) $f'(x) = -2\sin(x) + 1$

c) $f'(x) = \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x^2}$

d) $f'(x) = 10x\sin(x) - 5x^2\cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)$
 $f'(x) = 9x\sin(x) + \cos(x)(1 - 5x^2)$

41. a) $f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$

b) $f'(x) = 5(\sin(x) + x\cos(x))$

c) $f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{4 + \sin(x)}}$

d) $f'(x) = -4\sin(x)(\cos(x))^3$

42. a) $f'(x) = -9\sin(3x)$

b) $f'(x) = (2x + 1)\cos(x^2 + x)$

c) $f'(x) = \frac{3x^2}{(2+3x)^2} \sin\left(\frac{1}{2+3x}\right)$

d) $f'(x) = \frac{-\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$

e) $f'(x) = 3\cos\left(-3x - \frac{\pi}{2}\right)$

f) $f'(x) = 2\cos(2x) + 3\sin(x)$

43. a) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \sin(\sqrt{1+x^2})$

b) $f'(x) = -5\cos\left(-5x + \frac{\pi}{4}\right)$

c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2\sin(2x)-1)(\sin(2x)+x) - (\cos(2x)-x)(\cos(2x)+1)}{(\sin(2x)+x)^2} \\ &= \frac{2\sin^2(2x) + 2x\sin(2x) - \sin(2x) - \cos^2(2x)}{(\sin(2x)+x)^2} \\ &\quad + \frac{-\cos(2x) + x\cos(2x)}{(\sin(2x)+x)^2} \end{aligned}$$

d) $f'(x) = -\sin(x)e^{\cos(x)}$

Résolution d'équation

44. a) $S = \left\{-\frac{\pi}{30} + \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{30} + \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{\pi}{24} + \frac{1}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{3}k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

45. a) $S = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \pi\right\}$

b) $S = \left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right\}$

c) $S = \left\{-\frac{29\pi}{30}; -\frac{19\pi}{30}; -\frac{17\pi}{30}; -\frac{7\pi}{30}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{30}; \frac{17\pi}{30}; \frac{19\pi}{30}; \frac{29\pi}{30}\right\}$

d) $S = \left\{-\frac{3\pi}{4}; -\frac{7\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{4}\right\}$

46. a) $S = \left\{-\frac{17\pi}{18}; -\frac{5\pi}{18}; -\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{18}\right\}$

b) $S = \left\{-\frac{13\pi}{15}; -\frac{11\pi}{15}; -\frac{7\pi}{15}; -\frac{\pi}{15}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{15}; \frac{7\pi}{15}; \frac{11\pi}{15}; \frac{13\pi}{15}\right\}$

c) $S = \left\{-\frac{11\pi}{12}; -\frac{5\pi}{12}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}\right\}$

d) $S = \left\{-\frac{17\pi}{18}; -\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{18}; \frac{7\pi}{18}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Résolution d'inéquation

47. a) $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right[$ **b)** $x \in \left[\pi; \frac{5\pi}{3}\right[$

c) $x \in \left[0; \frac{4\pi}{3}\right[$ **d)** $x \in \left[0; \frac{7\pi}{12}\right[$

48. a) $x \in]0; \pi[$ **b)** $x \in \left]-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[$

c) $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[$ **d)** $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right[$

49. a) On pose $X = \sin(x)$ et l'inéquation proposée est équivalente à $2X^2 - 1 \leq 0$ avec $X \in [-1; 1]$

$$2X^2 - 1 \leq 0 \text{ pour } X \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\text{donc } x \in \left]-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$$

b) On pose $X = \cos(x)$ avec $X \in [-1; 1]$ et l'inéquation proposée est équivalente à $X^2 - 1 > 0$

$X^2 - 1 > 0$ pour $X \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ c'est-à-dire $\cos(x) \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ donc l'inéquation proposée n'a pas de solution.

c) On pose $X = \cos(x)$ avec $X \in [-1; 1]$ et l'inéquation proposée est équivalente à $4X^2 - 3 \geq 0$ avec $X \in [-1; 1]$

$$4X^2 - 3 \geq 0 \text{ pour } X \in \left[-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right]$$

$$\text{donc } \cos(x) \in \left[-1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$$

$$\text{donc } x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$$

d) $\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}$

On pose $X = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ avec $X \in [-1; 1]$.

L'inéquation est alors équivalente à $X^2 - \frac{1}{2} < 0$

$$\text{donc } X \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

D'où : $3x - \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ c'est-à-dire :

$$x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right].$$

Exercices d'entraînement

p. 94-97

Étude d'une fonction trigonométrique

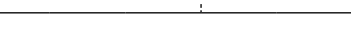
50. 1. f est 2π périodique par la définition de la fonction cosinus.

2. f est paire puisque la fonction cosinus est paire.

3. $f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = -\sin(x)(1 + 2\cos(x))$

$f'(x)$ est nulle pour $x = 0$, $x = \pi$, $x = \frac{2\pi}{3}$ et $x = \frac{4\pi}{3}$
donc f admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 , π , $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

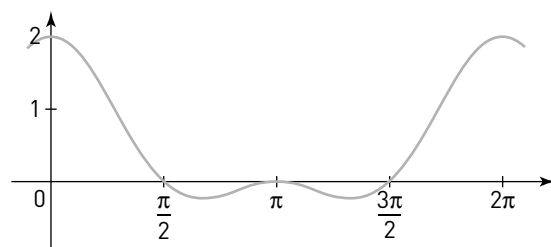
4.

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	-	0	+	0
Variation de f					

5.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f'(x)$	2	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$

6.



51. 1. a) $f'(x) = 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1$

b) Pour tout $x \in [0; \pi]$,

$$(2\sin(x) + 1)(\sin(x) - 1) = 2\sin^2(x) - 2\sin(x) + \sin(x) - 1 = 2\sin^2(x) - \sin(x) - 1 = f'(x)$$

2. Pour tout $x \in [0; \pi]$:

$\sin(x) \geq 0$ donc $2\sin(x) + 1 \geq 1 > 0$.

$$\sin(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

et $\sin(x) \leq 1$ donc $\sin(x) - 1 \leq 0$.

b)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$2\sin(x) - 1$	+		+
$\sin(x) - 1$	-	0	-
$f'(x)$	-	0	-
Variation de f			

52. 1. f est définie car pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ donc } 2 \leq \sin(x) + 3 \leq 4.$$

$$2. f'(x) = \frac{-2\cos(x)}{(\sin(x) + 3)^2}$$

3. Ainsi, f est croissante sur les intervalles

$$\left[-\pi; -\frac{\pi}{4}\right] \text{ et sur } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \text{ et décroissante sur } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right].$$

53. 1. Pour tout x réels : $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$ donc $x \leq f(x) \leq x + 1$ et $f(x + \pi) = x + \pi + (-\sin(x))^2 = f(x) + \pi$

2. Par comparaison de limites, comme

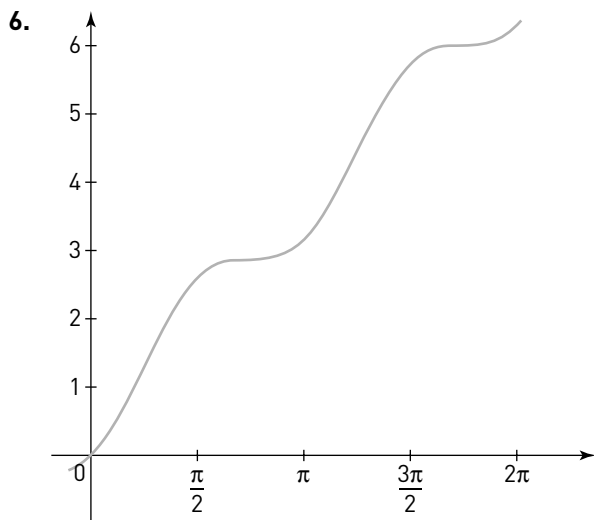
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. $f'(x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$

4. $f'(x) = 1 + \sin(2x)$ donc $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin(2x) \geq -1$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

5. Comme $f(x + \pi) = f(x) + \pi$, pour tracer f à partir de sa représentation sur $[0; \pi]$, on réalise une translation de vecteur $\pi \vec{j}$ dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.



54. 1. Pour tout x réels : $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

2. Pour tout x réels : $f'(x) = 1 - \cos(x)$ et donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \cos(x) \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Les tangentes horizontales à Γ sont situées aux points d'abscisses $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. Équation de la tangente à Γ au point d'abscisse

$$\frac{\pi}{2} : y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right); y = x + 1$$

Équation de la tangente à Γ au point d'abscisse

$$-\frac{\pi}{2} : y = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right); y = x - 1$$

On peut en déduire, d'après la question 1, que la courbe Γ est comprise entre les droites d'équation $y = x + 1$ et $y = x - 1$.

4. Sur calculatrice.

55. [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur qui est corrigée sur les éditions suivantes. L'exercice est à remplacer par l'énoncé suivant.

On considère dans un repère orthonormal $(0; \vec{i}, \vec{j})$ direct, les points $A(-1; 0)$, $B(0; -1)$ et $M(\cos(x); \sin(x))$ où x est un réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

1. Calculer AB puis exprimer les longueurs AM et BM en fonction de x .

2. Déterminer la valeur x_0 pour laquelle ABM est isocèle en M .

3. Montrer que $p(x) = \sqrt{2} + \sqrt{2(1 + \cos(x))} + \sqrt{2(1 + \sin(x))}$

4. Calculer $p'(x)$ et vérifier que $p'(x_0) = 0$.

5. On admet que pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; x_0\right], p'(x) \geq 0$ et pour tout $x \in [x_0; \pi[, p'(x) \leq 0$. Que peut-on en déduire sur le triangle ABM ?

1. $AB = \sqrt{2}$, $AM = \sqrt{2 + 2\cos(x)}$ et $BM = \sqrt{2 + 2\sin(x)}$

2. $x = \frac{\pi}{4}$

3. $p(x) = OA + OM + IM = \sqrt{2} + \sqrt{2(1 + \cos(x))} + \sqrt{2(1 + \sin(x))}$

4. $p'(x) = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{2(1 + \cos(x))}} + \frac{\cos(x)}{\sqrt{2(1 + \sin(x))}}$ et $p'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

5. Le périmètre du triangle ABM est maximal en $\frac{\pi}{4}$ et sa valeur est $\sqrt{2} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ soit environ 5,11 unités de longueur.

56. 1. f est impaire puisque la fonction sinus est impaire.

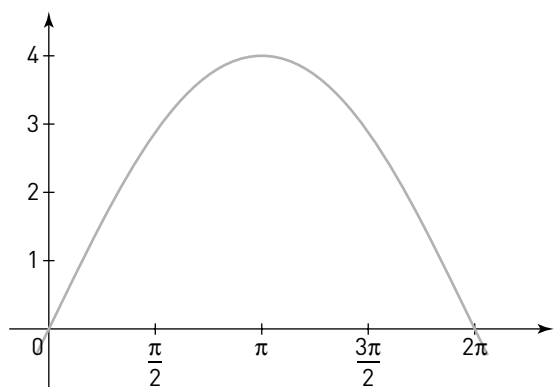
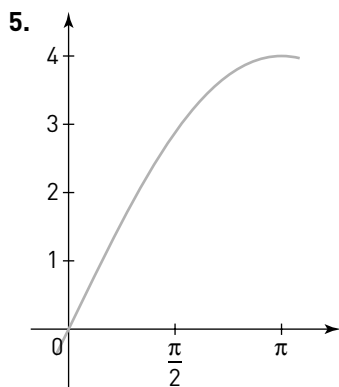
2. $f(x + 4\pi) = 4\sin\left(\frac{x + 4\pi}{2}\right) = 4\sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = f(x)$

donc f est 4π -périodique.

3. a) $f(\pi - x) = 4\sin\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = -4\sin\left(\frac{\pi + x}{2}\right) = f(\pi + x)$

b) La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi$.

4. $f'(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ et pour tout $x \in [0 ; \pi]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0 ; \pi]$.



57. 1. f est 2π périodique puisque la fonction cosinus l'est.

2. f est paire puisque la fonction cosinus est paire.

3. D'après la question 1, on peut étudier f sur un intervalle d'amplitude 2π . D'après la question 2, f peut être étudiée sur l'ensemble des réels positifs. On peut donc étudier f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

4. $f(x) = \frac{-3\sin(x)}{(2 + \cos(x))^2}$

x	0	π
$f'(x)$	0	0
Variation de f	1	-1

5. f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ avec $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution α sur $[0 ; \pi]$ avec $\alpha \approx 2,094$.

58. 1. Si f est périodique alors on a

$$f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow 3\cos\left(2x + 2T + \frac{\pi}{4}\right) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

donc $T = \pi$ et on a bien $f(x + \pi) = f(x)$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos(x) \leq 1$.

Donc $|f(x)| \leq 3$.

3. $f'(x) = -6\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

4. $-6\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 6\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sin 0$

$$\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{-\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$, $\frac{3\pi}{8} \leq x \leq \frac{7\pi}{8} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$

f est donc décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$.

5. f admet donc un minimum en $\frac{3\pi}{8}$ égal à -3 .

6. $y = -6x + \frac{3\pi}{4}$

59. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos'(0) = 1$

60. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $1 \leq 2 + \cos(x) \leq 3$

Pour tout $x \in \mathbb{R} : e^x > 0$ donc f ne prend que des valeurs strictement positives.

2. $f'(x) = -e^{1-x}(\sin(x) + \cos(x) + 2)$

$$= -e^{1-x}\left(\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\right)$$

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 > 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > -\sqrt{2}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 > 0$ et donc

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.

f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. a) Pour tout $x \in \mathbb{R} : 1 \leq 2 + \cos(x) \leq 3$ donc $e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$

c)

```

i ← 13
u ← 0, 1
tant que u > 10-6 :
    u ← (2 + cos(i)) × e1-x
    i ← i + 0, 1
Afficher i
    
```

Cela signifie que pour tout $x > x_0$, la courbe représentative de f est située en dessous de l'équation $y = 10^{-6}$. Ainsi, cette courbe est très proche de l'axe des abscisses en restant au-dessus de celui-ci, l'axe des abscisses est une asymptote horizontale en l'infini.

Résolutions d'équations et d'inéquations

61. a) $S = \left\{ -\frac{11\pi}{12}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{12}; \frac{3\pi}{4} \right\}$

b) $S = \left\{ -\frac{29\pi}{36}; -\frac{23\pi}{36}; -\frac{5\pi}{36}; \frac{\pi}{36}; \frac{19\pi}{36}; \frac{25\pi}{36} \right\}$

c) $S = \left\{ -\frac{\pi}{8}; \frac{7\pi}{8} \right\}$ **d)** $S = \left\{ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

62. a) On pose $X = \cos(x)$ [$X \in [-1; 1]$] et on résout l'équation : $4X^2 - 6X + 2 = 0$.

$X_1 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = 1$. $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

et $\cos(x) = \cos(0)$. $S = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$.

b) D'après la question précédente : $S = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right]$.

63. a) On pose $X = \sin(x)$ [$X \in [-1; 1]$] et on résout l'équation : $6X^2 + 9X + 3 = 0$.

$X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = -1$. $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

et $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. $S = \left\{ \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6} \right\}$.

b) D'après la question précédente : $S = \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right]$.

c) On pose $X = \sin(x)$ [$X \in [-1; 1]$] et on résout l'équation : $2X^2 + X + 2 = 0$. $\Delta < 0$ donc cette équation n'a pas de solution réelle.

64. a) Pour vérifier l'indication, on calcule les carrés de chaque expression puis on conclut.

On pose $X = \cos(x)$ [$X \in [-1; 1]$] et on résout l'équation : $4X^2 + (2 - 2\sqrt{3})X - \sqrt{3} = 0$.

$X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos(x) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

et $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{11\pi}{6} \right\}$.

b) D'après la question précédente, on a :

$S = \left[0; \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi \right]$.

65. Dans cet exercice, il faut se rappeler de la formule vue en première :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$.

a) $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ donc $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$.

b) $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc $S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$.

c) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(x)$ d'où : $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$.

66. [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur corrigée sur les éditions suivantes.

Remplacer $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

par $2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

1. d)

2. c) la courbe admet deux tangentes horizontales sur cet intervalle.

3. c) la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points sur cet intervalle.

4. c)

67. 1. a) Aucune solution.

b) Trois solutions.

c) Deux solutions (deux tangentes horizontales).

d) Deux solutions.

$$2. f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$

68. a) $\cos(2x) = \cos^2(x) - [1 - \cos^2(x)] = 2\cos^2(x) - 1$

$$\frac{7}{25} = 2\cos^2(a) - 1 \Leftrightarrow \cos^2(a) = \frac{32}{50}$$

$$\text{Comme } -\pi \leq a \leq 0, \cos(a) = \sqrt{\frac{32}{50}} \text{ ou } \cos(a) = -\sqrt{\frac{32}{50}}$$

$$\text{et comme } \sqrt{1 - \left(\frac{32}{50}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{50}}, \text{ on a dans les deux}$$

$$\text{cas : } \sin(a) = -\sqrt{\frac{18}{50}} = -\frac{3}{5}.$$

L'affirmation 1 est donc vraie.

Pour tout $x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$. Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

En utilisant le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et donc la fonction f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

Modélisation

69. [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur qui est corrigée sur les éditions suivantes. Dans la question 1., remplacer $g(x)$ par $g(t)$.

1. a) $g'(t) = -3A\sin(3t) + 3B\cos(3t) + \cos(t)$

$$g''(t) = -9A\cos(3t) - 9B\sin(3t) - \sin(t)$$

$$g''(t) + 9g(t) = 8\sin(t)$$

Donc g est solution de (E).

b) g représente la trajectoire du mobile M situé sur le ressort.

$$2. g(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ et } g'(0) = 4 \Leftrightarrow 3B + 1 = 4 \Leftrightarrow B = 1$$

Ainsi, $g(t) = \sin(3t) + \sin(t)$.

$$3. g(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(3t) + \sin(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -4\sin^3(t) + 4\sin(t) = 0 \Leftrightarrow -\sin^3(t) + \sin(t) = 0$$

on pose $T = \sin(t)$ et on résout $-T^3 + T^2 = 0$

on alors $T = 0$ ou $T = 1$ ou $T = -1$.

ainsi $\sin(t) = 0$ ou $\sin(t) = 1$ ou $\sin(t) = -1$.

$$\text{Donc } t = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ ou } t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

70. 1. a) Sur logiciel.

b) L'aire semble maximale pour un angle de 45° .

2. a) On considère un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'abscisse de B est alors $\cos(\alpha)$ et son ordonnée $\sin(\alpha)$.

Ainsi, $AB = \sin(\alpha)$ et $AD = 2\cos(\alpha)$ donc

$$\mathcal{A}(\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha).$$

$$\text{b) } \mathcal{A}'(\alpha) = -2\sin^2(\alpha) + 2\cos^2(\alpha) = -4\sin^2(\alpha) + 2$$

$$\mathcal{A}'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow 0 < \sin(\alpha) < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \text{ et}$$

$\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. $\mathcal{A}$ est donc croissante sur les inter-

valles $\left] 0; \frac{\pi}{4} \right[$ et $\left] \frac{3\pi}{4}; \pi \right[$ et décroissante sur

$\left] \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right[$. $\mathcal{A}$ admet donc un maximum en $\frac{\pi}{4}$ et l'aire

maximale est égale à 1 cm^2 .

$$\text{71. 1. } \tan(\alpha) = \frac{EA}{ET} = \frac{25}{x}; \tan(x) = \frac{EB}{ET} = \frac{30,6}{x}$$

$$2. \text{ Pour tout } x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[,$$

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$$

Ainsi, la fonction tangente est strictement crois-

sante sur $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.

3. $\widehat{ATB} = \widehat{ETB} - \widehat{ETA}$ soit $\gamma = \beta - \alpha$

$$\tan(\gamma) = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\alpha)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} = \frac{\frac{30,6}{x} - \frac{25}{x}}{1 + \frac{30,6}{x} \times \frac{25}{x}}$$

$$= \frac{\frac{5,6}{x}}{\frac{x^2 + 765}{x^2}} = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$$

4. a) L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal lorsque sa mesure γ l'est, avec $\gamma \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ donc γ est maximal lorsque $\tan(\gamma)$ est maximal.

$$\text{On pose } g(x) = \frac{5,6x}{x^2 + 765} \quad g'(x) = \frac{-5,6x^2 + 4\,284}{(x^2 + 765)^2}$$

on détermine le signe de $-5,6x^2 + 4\,284$ sur $]0; 50]$.

$$\Delta = 95\,961,6 \text{ et } x_1 = \frac{\sqrt{95\,961,6}}{-11,2}; x_2 = \frac{\sqrt{95\,961,6}}{11,2}.$$

g est donc croissante sur $]0; x_2]$ et décroissante sur $[x_2; 50]$.

L'angle $\widehat{ATB}$ est maximal pour une unique valeur $x_2 = \frac{\sqrt{95\,961,6}}{11,2}$ m soit au mètre près 28 m.

Une valeur approchée de l'angle $\widehat{ATB}$, à 0,01 radian près est 0,1 soit environ $5,78^\circ$.

Déterminer des valeurs de cos et sin

72. Pour tout x réel, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\text{D'où : } \cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = 1$$

$$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{6})^2}{16}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ puisque } \frac{7\pi}{12} \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[.$$

73. Pour tout x réel, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\text{D'où : } \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = 1$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4} \text{ puisque } \frac{\pi}{8} \in]0; \pi[$$

74. 1. $f'(x) = -\sin(x) + x$

$$f''(x) = -\cos(x) + 1 \geq 0$$

Donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$.

Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$ et $f(0) = 0$.

Donc pour tout réel x , $f(x) \geq 0$.

$$2. g'(x) = f'(x) - \frac{x^3}{6} \quad g''(x) = f''(x) - \frac{1}{2}x^2$$

$$g^{(3)}(x) = \sin(x) - x$$

$$g^{(4)}(x) = \cos(x) - 1$$

Donc $g^{(4)}(x) \leq 0$ c'est-à-dire que $g^{(3)}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $g^{(3)}(0) = 0$. Ainsi, g'' est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$ et $g''(0) = 0$. Donc, pour tout réel x , $g''(x) \leq 0$. D'où g' est décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $g'(0) = 0$. Donc g est croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$ et $g(0) = 0$. Donc, pour tout réel x , $g(x) \leq 0$.

$$3. 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

4. $\varepsilon(x) = \frac{x^4}{24}$ avec $\varepsilon'(x) = \frac{x^3}{6}$ donc ε est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

5. Le minimum de ε est atteint en zéro, il est donc pertinent d'utiliser cet encadrement au voisinage de zéro.

$$6. 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{2} \leq \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \leq 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^4}{24}$$

$$1 - \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{2} \approx 0,802 \text{ et } 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)^4}{24} \approx 0,809$$

La précision est d'environ 0,007.

Déterminer une aire entre deux courbes

75. 1. $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

$0 \leq f(x) \leq 3$; f est positive sur $[0 ; 2\pi]$.

2. a)

```
from math import *
def aire(n):
    s=0
    for k in range(1,n):
        s=s+(2*pi/n)*(-1.5*cos((k*2*pi)/n)+1.5)
    print("L'aire est égale à environ")
    print(s)
```

b) L'aire est égale à environ 9,42 unités d'aire.

c)

```
from math import *
def aire(n):
    s=0
    for k in range(1,n):
        s=s+(2*pi/n)*(-1.5*cos((k*2*pi)/n)+1.5)
    print("L'aire est égale à environ")
    print(2*s)
```

76. 1. a) -1 b) 1 c) $2\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$

2. a) $f'(x) = -\sin(x) + 2$

b) $g'(x) = -3\cos(x)$

c) $h'(x) = \sin(x) + 5\cos(x) + 10x$

77. $f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

On pose $g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$ $g'(x) = -x\sin(x)$ avec $\sin(x) > 0$ pour $x \in]0 ; \pi[$ donc g est décroissante sur $]0 ; \pi[$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pi} g(x) = \pi$.

Ainsi, pour tout $x \in]0 ; \pi[$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]0 ; \pi[$ avec $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = 0$.

Exercices bilan

p. 98

78. Étudier une fonction

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Donc par comparaison de limites, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

2. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3. Pour tout réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left[\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x)\right] \\ &= \cos(x) - \sin(x)\end{aligned}$$

4. a) $f'(x) = e^x\cos(x) - e^x\sin(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x))$
 $= \sqrt{2}e^x\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

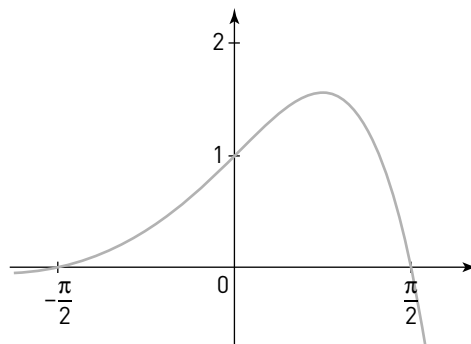
b) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$

f est donc croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

c) et d)

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	0	-
Variation de f			

5.

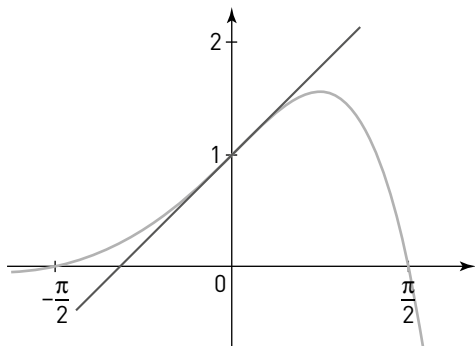


6. f est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

f prend des valeurs strictement supérieures à 0,5 sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, f est strictement décroissante avec $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0,5$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique α sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7. $\alpha \approx 1,57$

8. $y = x + 1$



79. Nombre de solutions

1. a) $1 - \frac{x}{2} < 0 \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2 < x$ et $-1 - \frac{x}{2} > 0$

$\Leftrightarrow -1 > \frac{x}{2} \Leftrightarrow -2 < x$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $g(x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow -1 < \frac{x}{2} < 1$

ainsi, d'après la question 1. a), cette équation admet des solutions uniquement dans $[-2; 2]$.

2. $g'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow \cos(x) < \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$

$k \in \mathbb{Z} < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	π	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
Variation de g	$\frac{\pi}{2}$ $\searrow$ $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$ $\nearrow$ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ $\searrow$ $-\frac{\pi}{2}$				

3. $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} > 0$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} < 0$

g est continue sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ et donc sur $[-2; 2]$.

g est strictement décroissante sur $\left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$

avec $f(-\pi) > 0$ et $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) < 0$. Donc, d'après le

théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left[-\pi; -\frac{\pi}{3}\right]$ avec $\alpha \approx -1,9$.

g est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ avec

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) < 0$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$ Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution β sur $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ avec $\beta = 0$.

g est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ avec

$f(\pi) < 0$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$ Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution γ sur $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ avec $\gamma \approx 1,9$.

Cette équation a donc trois solutions.

4. $\gamma \approx 1,895$

80. Suites et fonctions trigonométriques

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.

Donc grâce au théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \cos(4x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}}$

Ce sont les points de coordonnées

$\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; f\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)\right)$ ou $\left(-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; f\left(-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)\right)$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} 3. \text{ a) } u_{n+1} &= f\left(\left(n+1\right)\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n\pi + 2\pi) \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n\pi) = f\left(n\frac{\pi}{2}\right) e^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

(u_n) est donc une suite géométrique de raison $e^{\frac{\pi}{2}}$.

b) $e^{\frac{\pi}{2}} > 1$ donc la suite (u_n) est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

4. a) Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$,
 $f'(x) = -e^{-x} \cos(4x) - 4 \sin(4x) e^{-x} = -e^{-x} (\cos(4x) + 4 \sin(4x))$

$$\text{b) } g'(x) = -e^{-x} \text{ et } f'\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)$$

D'après la question 2., les deux courbes ont la même tangente en chacun de leurs points communs.

$$5. f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx -0,3$$

81. Équations de fonction

$$1. f'(x) = -3 \sin(3x) - 6 \cos(3x); f''(x) = -9 \cos(3x) + 18 \sin(3x)$$

$$2. 9f(x) + f''(x) = 0$$

$$3. g'(x) = -3 \sin\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right); g''(x) = -9 \cos\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right)$$

$$\text{Donc } g''(x) + 9g(x) = 0 \text{ et } g(0) = \cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et}$$

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$4. g(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{5\pi}{4}\right) = 0 \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{4} + 2k\frac{\pi}{3} \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; \frac{5\pi}{4}; \frac{19\pi}{12}; \frac{23\pi}{12} \right\}$$

$$5. \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

Donc les solutions s'écrivent $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ et

forment une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$.

82. QCM

d)

Préparer le BAC Je me teste

p. 100

83. B

84. B

85. D

86. C

87. B

88. C

89. C

Préparer le BAC Je révise

p. 101

90. Un lapin qui vit dangereusement

$$1. AD = \frac{AB}{\cos(\theta)} = \frac{4}{\cos(\theta)}; CD = 7 + 4 \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$\frac{60 \text{ km}}{h} = 1000 \text{ m/min et } \frac{30 \text{ km}}{h} = \frac{500 \text{ m}}{\text{min}}$$

$$t_1 = \frac{1}{125 \cos(\theta)}; t_2 = \frac{7 + 4 \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1000}.$$

$$2. t_1 < t_2 \Leftrightarrow \frac{8}{\cos(\theta)} < 7 + 4 \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \Leftrightarrow f(\theta) > 0$$

$$f'(\theta) = \frac{2}{\cos^2(\theta)} - 4 \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{2(1 - 2\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)} \text{ sur } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

f' est du signe de $1 - 2\sin(\theta)$ donc f' est strictement positive sur $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ et strictement négative sur

$$\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ et s'annule en } \frac{\pi}{6}. f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$$

le lapin s'en sort si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$.

91. Aire maximale d'un trapèze

1. Sur ordinateur.

$$2. \text{ a) } \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{A}(\theta) &= \frac{(1 + AD) \times h}{2} = \frac{(1 + 1 + 2\cos(\theta)) \times \sin(\theta)}{2} \\ &= (1 + \cos(\theta)) \sin(\theta) \end{aligned}$$

c) $\mathcal{A}'(\theta) = -\sin^2(\theta) + (1 + \cos(\theta))\cos(\theta)$

$\mathcal{A}'(\theta) = -\sin^2(\theta) + \cos(\theta) + \cos^2\theta$

$\mathcal{A}'(\theta) = 2\cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1$

On effectue un changement de variable en posant $X = \cos(\theta)$.

On étudie alors le signe du polynôme $2X^2 + X - 1$ sur $[0 ; 1]$.

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{A}'(\theta)$	+	0	-
Variation de $\mathcal{A}$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	1

d) On en déduit que pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, l'aire du trapèze est maximale.

92. Étude de fonctions

1. $f'(x) = -\sin(x) - \sin(2x)$

2. $f'(x) = -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) = -\sin(x)(1 + 2\cos(x))$

3. $\sin(x) = 0$ ou $1 + 2\cos(x) = 0$

$x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

4.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π	
$\sin(x)$	0	-	0	+	+	
$1 + 2\cos(x)$	+	0	-	0	+	
$f'(x)$	0	-	0	-	0	+

5.

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	2π
Variation de f	2,5	0,25	0,5	0,25	2,5

93. Étude de fonctions avec une fonction auxiliaire

A. 1. $f'(x) = \frac{9x^4 - 18x^2 + 9}{(3x^2 + 1)^2}$

2. On effectue un changement de variable en posant $X = x^2$ et on étudie le signe de $9X^2 - 18X + 9$. Comme $\Delta = 0$, ce polynôme est toujours positif.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
Variation de f	$-\infty$	$+\infty$

$y = f'(0)x + f(0) = 9x - 3$

B. 1. $g(x + 2\pi) = g(x)$

2. a. $g(x) = f(\sin(x))$

b. $g'(x) = \cos(x) \times \frac{9\sin(x)^4 - 18\sin(x)^2 + 9}{(3\sin(x)^2 + 1)^2}$

La fonction cosinus est positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	0	-	0	-
Variation de g	-3	-6	0	-3

Exercices vers le supérieur p. 102-103

94. Représenter une ampoule

1. Pour tout réel $x \in [0 ; 4]$, $f'(x) = \frac{\pi}{4}b\cos\left(c + \frac{\pi}{4}x\right)$.

2. Comme ces tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses, on a : $f'(0) = 0$ et $f'(4) = 0$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}b\cos(c) = 0 \Leftrightarrow \cos(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{2}$

puisque $c \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On peut vérifier que $f'(4) = 0$

nous permet aussi de trouver $c = \frac{\pi}{2}$.

3. $f(x) = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$ avec $f(4) = 3$, $f(0) = 1$

$f(0) = 1 \Leftrightarrow a + b = 1$; $f(4) = 3 \Leftrightarrow a - b = 3$

On obtient alors $a = 2$ et $b = -1$.

$$f(x) = 2 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)$$

95. Suite de sinus

Pour tout entier naturel k non nul, on a

$$-1 \leq \sin(k) \leq 1 \text{ donc } \frac{-1}{k} \leq \frac{\sin(k)}{k} \leq \frac{1}{k}.$$

On a alors : $\frac{-1}{n^2} - \frac{1}{n^2} - \dots - \frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin(1)}{n^2} + \frac{\sin(2)}{n^2} + \dots$

$$+ \frac{\sin(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{-1}{n^2} \times n \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} \times n - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

Grâce au théorème des gendarmes, on peut conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. La suite (u_n) converge vers 0.

96. Suite de suite

On peut prendre $a_n = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{n+1}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$.

Par composition de limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

97. Variations de fonctions

a) Vrai. b) Vrai. c) Faux. Sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ les fonctions

cosinus et sinus sont décroissantes puis sur $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ la fonction cosinus est croissante et la

fonction sinus est décroissante.

98. Une formule utile

1. $M(\cos(a) ; \sin(a))$

et $M'\left(\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right); \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ avec

$$\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a) \text{ et } \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$$

d'où : $M'(-\sin(a) ; \cos(a))$.

2. Dans le repère $(O, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$, les coordonnées de N sont : $N(\cos(b) ; \sin(b))$.

3. Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $N(\cos(a+b) ; \sin(a+b))$. De plus, d'après la question 2., on a :

$$\overrightarrow{ON} = \cos(b)\overrightarrow{OM} + \sin(b)\overrightarrow{OM'}.$$

D'après la question 1., on a :

$$\overrightarrow{ON} = \cos(b)[\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}] + \sin(b)[- \sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}]$$

$$\overrightarrow{ON} = [\cos(b)\cos(a) - \sin(b)\sin(a)]\vec{i} + [\cos(b)\sin(a) + \sin(b)\cos(a)]\vec{j}.$$

4. Ainsi, on a bien démontré les deux égalités cherchées.

99. Dériver une fonction

a) Faux, elle est décroissante sur cet intervalle.

b) Faux. c) Vrai. d) Vrai.

100. Déterminer es valeurs exactes

$$\begin{aligned} 1. \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{12} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Pour tout x réel, on a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Donc :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{16} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{16}$$

comme $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \frac{4}{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2} = \frac{4}{8 + 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$2. \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$- \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Pour tout x réel, on a $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Donc :

$$\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{16}$$

$$\text{comme } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{4}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \frac{4}{8 - 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

101. Inégalité de Huygens

$$1. f'(x) = 2\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} - 3 = \frac{2\cos^3(x) + 1 - 3\cos^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$2. a) (x-1)^2(2x+1) = (x^2 - 2x + 1)(2x+1) = 2x^3 + x^2 - 4x^2 - 2x + 2x + 1 = 2x^3 - 3x^2 + 1 = P(x)$$

b) Pour tout $x \in]0; 1]$, $(x-1)^2 \geq 0$ et $2x+1 > 0$.

Ainsi, pour tout $x \in]0; 1]$, $P(x) \geq 0$.

$$3. a) f'(x) = \frac{2\cos^3(x) + 1 - 3\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{P(\cos(x))}{\cos^2(x)}.$$

b) Comme $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) \in]0; 1]$.

D'après la question 2. b) on peut en déduire que

pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) \geq 0$.

La fonction f est donc croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

$$c) f(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2\sin(x) - 3x = 2 - \frac{3\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos(x)} = +\infty$$

avec $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ donc : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$

ainsi, l'inégalité de Huygens est vérifiée.

102. Arc de sinussoïde

1. • l_2 est la ligne brisée qui relie les points A_0

$\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ et $A_1(2\pi; 1)$ puis les points

$A_1(2\pi; 1)$ et $A_2\left(\frac{5\pi}{2}; 0\right)$.

$$\text{Distance entre } A_0 \text{ et } A_1 : \sqrt{\left(2\pi - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{2}$$

$$\text{Distance entre } A_2 \text{ et } A_1 : \sqrt{\left(2\pi - \frac{5\pi}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{2}$$

$$l_2 = \sqrt{\pi^2 + 4}$$

• l_3 est la ligne brisée qui relie les points

$A_0\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ et $A_1\left(\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ puis les points

$A_1\left(\frac{11\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $A_2\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et les points

$A_2\left(\frac{13\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $A_3\left(\frac{5\pi}{2}; 0\right)$

Distance entre A_0 et A_1 :

$$\sqrt{\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4\pi^2 + 27}}{6}.$$

$$\text{Distance entre } A_2 \text{ et } A_1 : \sqrt{\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{13\pi}{6}\right)^2 + 0^2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{Distance entre } A_2 \text{ et } A_3 : \sqrt{\left(\frac{13\pi}{6} - \frac{5\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi^2 + 27}}{6}. l_3 = \frac{\sqrt{4\pi^2 + 27} + \pi}{3}$$

2.

L ← 0

Pour i allant de 0 à n :

$$L \leftarrow L + \sqrt{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{(i+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{i\pi}{n}\right)\right)^2}$$

Fin Pour
Afficher L

3.

```
Def Ligne_briee (n) :
  L=0
  for i in range (n) :
    L=L+sqrt((pi/n)**2+(cos((3*pi)/2
      +(i+1)*pi/n)-cos((3*pi)/2+(i*pi)/n))**2)
  print(L)
```

```
>>> ligne_briee(2)
3.724191778237173
>>> ligne_briee(3)
3.7650074865910144
>>> ligne_briee(1000)
3.820197296312407
```

103. Résoudre une équation

$$\sin(x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) + 2\sin(x) \cos(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x)[1 + 2\cos(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \text{ou} \\ 1 + 2\cos(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + k\pi \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

104. Représentation graphique

a) Faux car $\cos(0) = 1$.

b) Faux, la courbe n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

c) Vrai car pas de symétrie non plus par rapport à l'origine du repère.

105. Fonctions hyperboliques

$$1. sh(x) = -sh(-x) ; ch(-x) = ch(x) ; th(x) = -th(-x).$$

sh et th sont des fonctions impaires et ch est une fonction paire.

$$2. a) ch^2(x) - sh^2(x) =$$

$$\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x e^{-x} - e^{2x} - e^{-2x} + 2e^x e^{-x}}{4} = \frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1$$

$$b) ch'(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = sh(x)$$

De même, $sh'(x) = ch(x)$

$$th'(x) = \frac{ch(x)^2 - sh(x)^2}{ch(x)^2} = \frac{1}{ch(x)^2} \text{ et } 1 - th^2(x)$$

$$= \frac{ch^2(x) - sh^2(x)}{ch(x)^2} = th'(x)$$

$$3. ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$ch'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

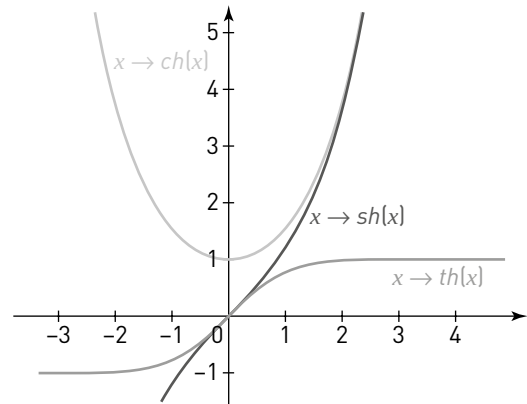
ch est donc décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$ avec $ch(0) = 1$.

$$sh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$$

Donc sh est strictement croissante sur l'ensemble des nombres réels.

$$th'(x) = \frac{1}{ch(x)^2} > 0$$

th est donc strictement croissante sur l'ensemble des nombres réels.



106. Équation et algorithme

1. La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ avec $f(0) = 1$ et $f(\pi) = -1$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\cos(x) = 0,2$ a une unique solution dans l'intervalle $[0 ; \pi]$.

2.

```
a ← 0
b ← 3
Tant que b-a > 0,001 :
  m ← (a+b)/2
  Si cos(m) > 0
    a ← m
  Sinon
    b ← m
  Fin si
Fin tant que
Afficher a et b
```

Travaux pratiques

p. 104-107

TP 1. Chercher la tangente

- **Durée estimée** : 45 min
- **Objectif** : Étudier certaines propriétés de la fonction tangente.

A. Dans le triangle rectangle

1. $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$; $\sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}$; $\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{AB}$

2. $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{AC}{BC}$; $\sin(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{BC}$; $\tan(\widehat{ACB}) = \frac{AB}{AC}$

3. Soit x la mesure d'un angle aigu, on a alors :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

B. Avec le cercle trigonométrique

1. a) Comme $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la droite (OM) ne peut

pas être perpendiculaire à l'axe des abscisses. Ainsi, la droite (OM) et la tangente T à C au point A ne sont pas parallèles donc sont sécantes. Le point N est donc bien défini.

b) Soit P le point de coordonnées $(\cos(x) ; 0)$.

Les droites (MP) et (AN) sont parallèles (car toutes les deux perpendiculaires à l'axe des abscisses) et les droites (MN) et (AP) sont sécantes en O.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AN}{MP} = \frac{OA}{OP} \Leftrightarrow \frac{y_N}{\sin(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \Leftrightarrow y_N = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

2. a) $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$

La fonction tangente est π -périodique.

b) $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

La fonction tangente est impaire.

c) La fonction tangente est bien définie sur l'intervalle $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$. Elle est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ comme

le quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

d) $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction tangente est donc strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

3. a) La fonction cosinus s'annule pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la fonction tangente n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.

b)

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Variation de $\tan(x)$				

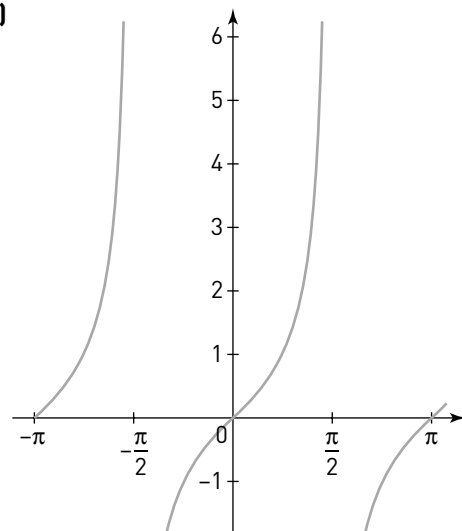
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(x) = 0$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$
$$x < -\frac{\pi}{2}$$

avec $\cos(x) < 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$
$$x < -\frac{\pi}{2}$$

c)



TP 2. De plus en plus proche du sinus et du cosinus

A. Sinus

1. a) $3! = 6$; $5! = 120$; $7! = 5\,040$.

b)

```

a ← 1
Pour i allant de 1 à n faire :
    a = a * i
Fin Pour
Retourner (a)
    
```

c)

```

def factorielle(n):
    a = 1
    for i in range(1, n+1):
        a = a * i
    return (a)
    
```

2.

```

def sinusnombre(x,n):
    s=0
    if x>1 or x<-1:
        print('Erreur')
        exit
    for i in range(0,n+1,1):
        s=s+((-1)**i)*(x**(2*i+1)/factorial(2*i+1))
    print('sin(x)=', s)
    
```

oOu :

```

def sinusnombre2(x,n):
    s=0
    if x>1 or x<-1:
        print('Erreur')
        exit
    for i in range(0,n+1,1):
        s=s+((-1)**i)*(x**(2*i+1)/factorial(2*i+1))
    print('sin(x)=', s)
    
```

B. Cosinus

$$1. \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

2.

```

def cosinusnombre(x,n):
    s=0
    if x>1 or x<-1:
        print('Erreur')
        exit
    for i in range(0,n+1,1):
        s=s+((-1)**i)*(x**(2*i)/factorielle(2*i+1))
    print('cos(x)=', s)
    
```

TP 3. Modélisation du son

A. Modélisation d'un son pur

1. a) $f(t + T) = P \sin(2\pi F(t + T)) = P \sin(2\pi Ft + 2\pi FT)$

$$f(t) = f(t + T) \Leftrightarrow 2\pi FT = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{1}{F}$$

b) La période T est l'inverse de la fréquence d'un son.

2. a) Graphiquement, sa période est environ égale à 0,002 5.

$$T = \frac{1}{F} = \frac{1}{440} \approx 0,0022$$

b) L'amplitude est de 1.

$$c) f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{440}t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{220}t\right)$$

B. Modélisation d'un son

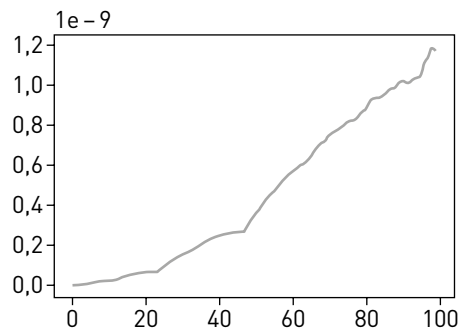
1. a) $T_1 = 0,009$ b) $T_3 = 0,003$

c) La période de la note mi_3 est trois fois plus petite que la période de la note la_1 .

2.

```

import matplotlib.pyplot as plt
from math import *
from random import *
def modelisationson():
    n=randint(3, 11)
    a=[0]*n
    f=0
    x=[]
    y=[]
    pas=1
    t=0
    for i in range(n):
        a[i]=random()
    for k in range(0, 100):
        x.append(t)
        for I in range(n):
            f=f+a[I]*sin(110*pi*(i+1)*t)
        y.append(f)
        t=t+pas
    plt.plot(x, y)
    plt.show()
    
```



CHAPITRE 4 Continuité

Manuel p. 108-135

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

L'objet de ce chapitre est d'aborder la notion de continuité d'une fonction qui est un prolongement de la notion de limite, notion fondamentale en analyse. On abordera aussi les applications de la continuité sur la détermination de la limite d'une suite et sur la résolution d'équation.

Nous étudierons en particulier comment déterminer la limite d'une suite récurrente convergente à travers le théorème du point fixe et comment montrer d'existence d'une solution d'une équation à travers des théorèmes des valeurs intermédiaires et de la bijection.

Pour cela, dans un premier temps, on définira, de façon intuitive, la continuité d'une fonction en un point et comment montrer qu'une fonction est continue sur un intervalle.

Dans un second temps, on montrera que l'on peut déduire la continuité de la dérivabilité, que l'on peut déterminer la limite d'une suite récurrente convergente et que la monotonie associée à la continuité permet de conclure sur l'existence et l'unicité de la solution d'une équation.

Objectifs

- Étudier la continuité d'une fonction et la dérivabilité en un point.
- Déterminer la limite d'une suite.
- Trouver le nombre de solutions d'une équation.
- Utiliser une fonction auxiliaire.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 109

1. Calculer une limite en un point

a) $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 3x + 5 = 9$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x}{2-x} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{[x-1]^2} = +\infty$

2. Interpréter une courbe

a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$

La fonction f n'est pas dérivable en 2, car sa courbe admet un point anguleux en 2.

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 0,5$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1,5$

La fonction g n'admet donc pas de limite en 2.

Si la fonction g n'a pas de limite en 2, elle n'est pas continue en 2 et donc pas dérivable en 2.

3. Déterminer les variations d'une fonction

a) $f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x - 2)$

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	5		-3	$+\infty$

b) $f'(x) = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f	0	$\frac{1}{3}$		1	0

c) $f'(x) = (2x + 5)e^x$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	$-2e^{-\frac{5}{2}}$	$+\infty$

d) $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$-\infty$	e^{-1}	0

4. Montrer la convergence d'une suite

1) La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge.

2) Réponse c).

5. Comprendre une fonction en langage Python

$f(1) = 3$; $f(0,9) = 1,9$ et $f(1,1) = 4,19$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$.

Activités

p. 110

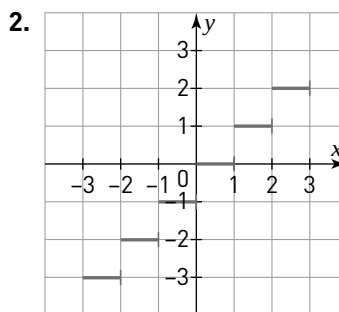
1 Découvrir la fonction partie entière

• **Durée estimée** : 15 min

• **Objectif** : Donner un exemple simple de fonction discontinue pour appréhender la notion de continuité à travers ce qu'elle n'est pas.

A. Représentation

1. $E(2,3) = 2$, $E(4) = 4$, $E(-1,7) = -2$, $E(-3) = -3$.



B. Continuité

1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} E(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} E(x) = 2$.

La fonction partie entière n'admet pas de limite en 2 car les limites à gauche et à droite ne sont pas égales.

2. Si $a \notin \mathbb{Z}$, $\lim_{x \rightarrow a} E(x) = E(a)$.

3. La partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, c'est-à-dire les réels non entiers. La partie entière n'est pas continue en tout point de $\mathbb{Z}$.

2 Comprendre le lien entre continuité et dérivabilité

• **Durée estimée** : 15 min

• **Objectif** : Utiliser les fonctions valeur absolue et racine carrée connues pour faire aborder continuité et dérivabilité.

A. Une première fonction et valeur absolue

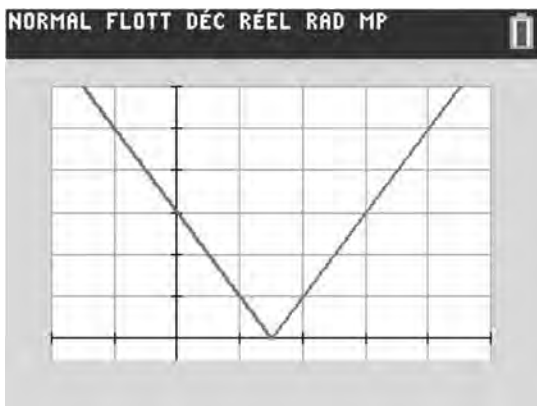
1. $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = 0$

f admet une limite en $\frac{3}{2}$ car les limites à gauche et à droite sont égales.

2. a) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{x - \frac{3}{2}} = -2$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{2}\right)}{x - \frac{3}{2}} = 2$.

b) La fonction f n'est pas dérivable en $\frac{3}{2}$ car les limites du taux d'accroissement à gauche et droite ne sont pas égales.

3. NORMAL FLOTT DEC RÉEL RAD MP



La courbe n'admet pas de saut en $\frac{3}{2}$ donc admet une limite et la courbe admet un point anguleux en $\frac{3}{2}$ donc non dérivable.

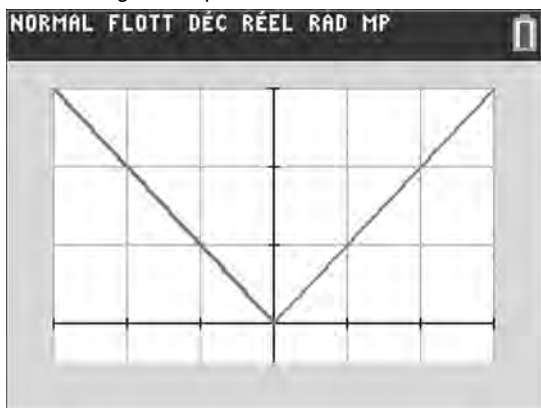
B. Une seconde fonction et racine carrée

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

La fonction g admet une limite en 0.

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = 1.$$

La fonction g n'est pas dérivable en 0.

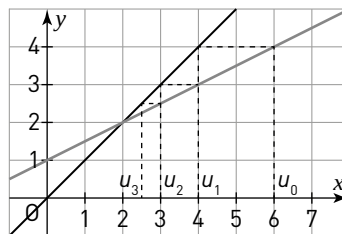


Mêmes constatations.

3 Utiliser les notions de limite et fonction associée

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** À travers deux exemples de suites, utiliser la fonction associée pour faire le lien entre la limite d'une suite et la limite d'une fonction.

1. a)



b) On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 2.

2. On trouve $a = 2$.

$$3. a) v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 4$.

$$b) v_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ et } u_n = 4 \left(\frac{1}{2} \right)^n + 2$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

d) La limite l est donc la solution de $f(x) = x$.

4 Résoudre une équation

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Comprendre l'importance de la continuité dans la recherche de solution d'une équation.

1. a) Pour $k = 0$, (E_1) a deux solutions car $f(x)$ change deux fois de signe et (E_2) a une solution car $g(x)$ ne change qu'une fois de signe.

b) Si $k < -1$, (E_1) a une solution.

Si $-1 \leq k < 5$, (E_1) a deux solutions.

Si $k = 5$, (E_1) a une solution.

Si $k > 5$, (E_1) n'a pas de solution.

c) Si $k < -2$, (E_2) n'a pas de solution.

Si $-2 \leq k \leq \frac{3}{2}$, (E_2) a une solution.

Si $k > \frac{3}{2}$, (E_2) n'a pas de solution.

2. a) La fonction g n'est pas continue en 2 car la courbe possède un « saut » en 2.

L'image de l'intervalle $[1 ; 4]$ par g est : $[1 ; 2] \cup]3 ; 4]$.

b) Si $k < 2$, (E_1) a trois solutions.

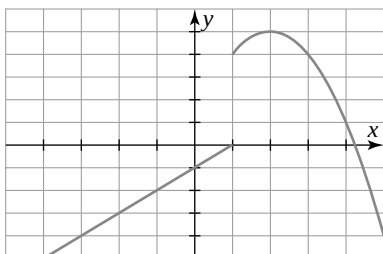
Si $k = 2$, (E_1) a deux solutions.

Si $k > 2$, (E_1) a une solution.
 Si $k \leq 2$, (E_2) a une solutions.
 Si $2 < k \leq 3$, (E_2) n'a pas de solution.
 Si $k > 3$, (E_2) a une solution.

À vous de jouer

p. 113

1. 1.



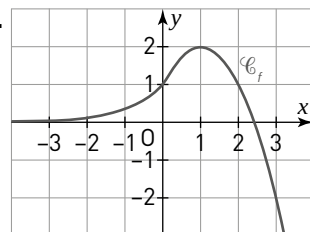
On peut conjecturer que la fonction est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Si $x \neq 1$, la fonction f est continue car un polynôme est continue sur son ensemble de définition.

Si $x = 1$, la fonction f est discontinue car :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} -x^2 + 4x + 1 = 4 \end{array} \right\} \text{ Pas de limite en 1.}$$

2. 1.



On peut conjecturer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

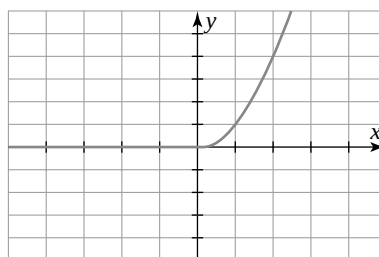
2. Si $x \neq 0$, la fonction f est continue comme fonction élémentaire.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 + 2x + 1 = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

La fonction f est continue en 0.

3. 1. La fonction est continue en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$.

2.



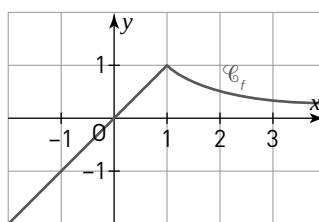
La fonction f est dérivable en 0 car la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en 0 d'équation $y = 0$.

4. 1. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

la fonction f est continue en 1.

2.



la fonction n'est pas dérivable en 1 car la courbe possède un point anguleux en 1.

5. La fonction associée à la suite est :

$$f(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 8}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composition de fonctions continues. D'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie :

$$\frac{1}{3} \sqrt{x^2 + 8} = x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 8} = 3x \Leftrightarrow x^2 + 8 = 9x^2 \quad x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

la suite (u_n) étant de termes positifs : $\ell = 1$.

6. La fonction associée à la suite est :

$$f(x) = \frac{2 + 3x}{4 + x}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme composition de fonctions continues. D'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2$$

comme la suite est minorée par 1 : $\ell = 1$.

7. 1. La fonction est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8)$$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 4$ ou $x_2 = 2$
- le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme.

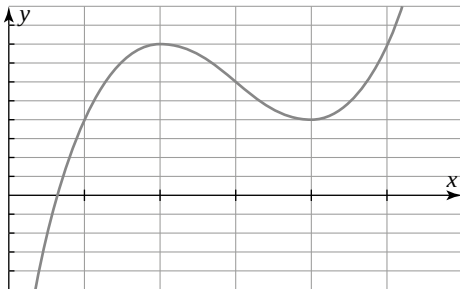
x	0	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	-12	8	4	$+\infty$	

2. a) • Sur $[0 ; 2]$, la fonction f est continue (dérivable), strictement croissante et change de signe car $f(0) = -12$ et $f(2) = 8$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

• Sur $]2 ; +\infty[$, $f(x)$ est minorée par 4, donc ne peut s'annuler.

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; +\infty[$.

b) On constate que la courbe $\mathcal{C}_f$ ne coupe qu'une fois l'axe des abscisses.



8. 1. $f(x) = \sqrt{x} - 2$

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	1	$-\frac{5}{3}$	$+\infty$

2. a) Sur $[0 ; 4]$ et sur $]4 ; +\infty[$, la fonction f est continue, monotone et change de signe donc sur ces deux intervalles, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution respectivement α et β .

$f(1) = -\frac{1}{3}$ donc $f(1) < 0$ et donc $\alpha \in [0 ; 1]$.

b) $\alpha \approx 0,69$

```
9. 1. def u(n):  
    u=1  
    for i in range(1,n+1):  
        u=9/(6-u)  
    return u
```

n	10	50	100	1 000
$u(n)$	2,739	2,942	2,970	2,997

On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 3.

2. a) $f(x) = \frac{9}{6-x}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{6\}$ donc continue sur $[1 ; 3]$.

b) D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie l'équation :

$$\frac{9}{6-x} = x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

donc $\ell = 3$.

```
10. 1. def u(n):  
    u=5  
    for i in range(1,n+1):  
        u=(1+3*u)/(3+u)  
    return u
```

On peut remplir le tableau de valeurs suivant.

n	5	10	50	100
$u(n)$	1,043	1,001	1,000	1,000

On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 1.

2. a) [ERRATUM] La première édition du manuel utilisait l'intervalle $[1 ; 3]$.

$$f(x) = \frac{1+3x}{3+x}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ donc continue sur $[1 ; 5]$.

b) D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie l'équation :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

comme $\ell \geq 1$, donc $\ell = 1$.

11. 1. On obtient : $f'(x) = 12g(x)$

avec : $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$.

2. a) On étudie les variations de g .

$g'(x) = 3x^2 + 2x + 2$

$\Delta = 4 - 24 = -20$ donc $g'(x)$ ne s'annule pas.

La fonction g est alors strictement croissante, continue et change de signe car $g(-1) = 0$ et $g(0) = 1$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et $\alpha \in [-1 ; 0]$.

b) À l'aide d'un balayage sur la calculatrice :

$-0,57 < \alpha < -0,57$

c) Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$.

3. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

12. 1. On obtient : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

avec : $g(x) = x^2 e^x - 1$.

2. a) On étudie les variations de g .

$\forall x > 0, g'(x) = x(x + 2)e^x \geq 0$

La fonction g est alors strictement croissante, continue et change de signe car $g(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$.

b) À l'aide d'un balayage sur la calculatrice :

$0,70 < \alpha < 0,71$

c) Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$.

3. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

Exercices

apprendre à démontrer

p. 120

Pour s'entraîner

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$.

La fonction f est continue en 1.

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -1 - \frac{1}{2}h = -1$$

La fonction f n'est pas dérivable en 1.

Exercices

calculs et automatismes

p. 121

13. Continuité en un point

Une courbe représente une fonction continue si à une abscisse donnée on peut associer un unique point sur la courbe et si la courbe n'admet pas de saut. Les courbes **a)** et **c)** représentent une fonction continue.

14. Continuité et fonction par morceaux

Faux car $f(-1) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+2} = 0$.

15. Continuité et dérivabilité

1. La fonction f est continue en 2 car la courbe n'a pas de "saut".

2. La fonction f n'est pas dérivable en 2 car la courbe admet deux demi-tangentes différentes (point anguleux).

16. Continuité et programme Python

Vrai, car si $x \neq -1$, la fonction est continue car composée de fonctions continues et

$f(-1) = -1 + 2 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1$.

Donc la fonction f est continue en -1 .

17. Continuité et suite

b) car la limite ℓ doit vérifier : $\ell = \sqrt{3\ell + 4}$ et $\ell \geq 0$.

18. Théorème des valeurs intermédiaires

1. a)

2. d)

19. Théorème de la bijection

1. La courbe représente une fonction et n'a pas de saut, donc la courbe représente une fonction continue.

2. a) Dans $[1 ; 5]$, la courbe est continue, strictement décroissante et coupe l'axe des abscisses donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \approx 4$.

b) Pour tout réel de $[-1 ; 1]$, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

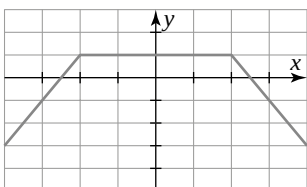
c) Dans I la courbe coupe 4 fois l'axe des abscisses donc l'équation $f(x) = 0$ admet 4 solutions.

Exercices d'application

p. 122

Conjecturer et montrer la continuité

20. 1.



On peut donc conjecturer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$ la fonction f est continue car composées de fonctions élémentaires.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} 2x + 5 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ \text{en } -2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} -2x + 5 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ \text{en } 2 \end{array}$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

21. 1. On a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = 0,5x & \text{si } x < 100 \\ f(x) = 0,4x & \text{si } 100 \leq x < 200 \\ f(x) = 0,35x & \text{si } x \geq 200 \end{array} \right.$$

2. La fonction f n'est pas continue en 100 et en 200, en effet :

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 100^-} f(x) = 50 \text{ et } f(100) = 40 \\ \lim_{x \rightarrow 200^-} f(x) = 80 \text{ et } f(200) = 70. \end{array}$$

Ailleurs la fonction f est continue.

$$22. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

La fonction f est continue en 1.

23. [ERRATUM] La première édition du manuel utilise un ensemble de définition sur $[-2 ; +\infty[$, et la fonction f définie par :

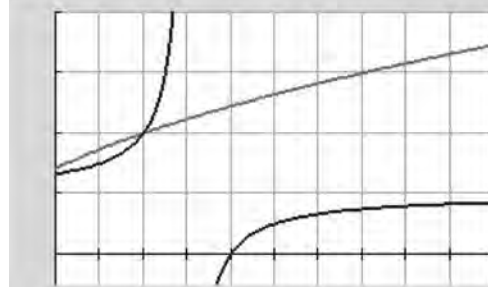
$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \sqrt{x+2} & \text{si } x < k \\ f(x) = \frac{x-4}{x-3} & \text{si } x \geq k \end{array} \right.$$

La **nouvelle édition** du manuel mentionne l'ensemble de définition $[0 ; +\infty[$ et la fonction f définie par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \frac{x-4}{x-3} & \text{si } x < k \\ f(x) = \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq k \end{array} \right.$$

La correction ci-dessous correspond à la nouvelle édition.

1. NORMAL FLOTT DÉC RÉEL RAD MP

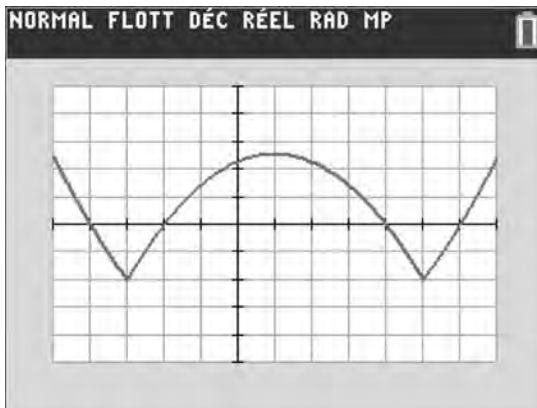


La fonction f est continue si le changement de forme intervient pour l'abscisse du point d'intersection des deux courbes soit pour $k = 2$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = 2.$$

La fonction est continue pour $k = 2$.

24. 1. a) On obtient le graphique suivant.



b) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Il faut déterminer les limites aux changements de forme :

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -2 \text{ et } f(3) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -2 \text{ et } f(5) = -2.$$

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

3. La fonction f n'est pas dérivable en -3 et en 5 car la courbe admet en ces deux points un point anguleux. Ailleurs la fonction f est dérivable.

Étudier la continuité et la dérivabilité en un point

25. 1. La continuité du volume vient que l'ajout de liquide étant continue, son volume aussi.

La fonction volume ne sera pas dérivable en 60 , car la volume étant proportionnel à la hauteur, le coefficient de proportionnalité change en 60 .

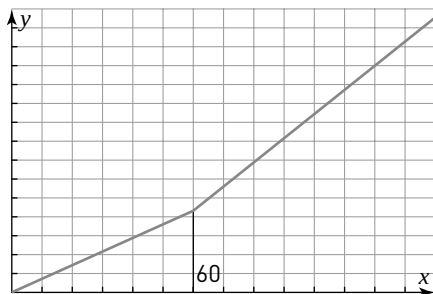
2. a) $1l = 1 \text{ dm}^3$, pour avoir le volume en litre, il faut exprimer toutes les mesures en dm.

$$\begin{cases} V(x) = 3,6x & \text{si } x \leq 60 \\ V(x) = 6,4x - 168 & \text{si } 60 < x \leq 140 \end{cases}$$

b) On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 60^-} 3,6x = 216 \\ \lim_{x \rightarrow 60^+} 6,4x - 168 = 216 \end{array} \right\} \begin{array}{l} V \text{ est continue} \\ \text{en } 60. \end{array}$$

Si l'on trace la fonction V sur la calculatrice, on observe que la courbe n'a pas de tangente en 60 (unités 10 sur (Ox) et 50 sur (Oy)).

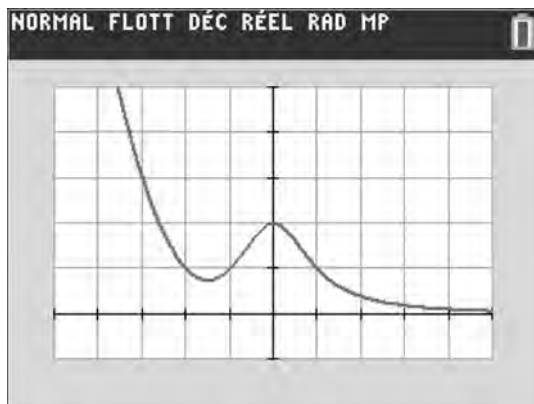


26. 1. On a :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \text{ et } f(1) = 1.$$

La fonction f est continue en 1 . Ailleurs la fonction est continue comme composée de fonctions de référence.

2. a) NORMAL FLOTT DÉC RÉEL RAD MP



b) La courbe semble ne pas avoir de points anguleux, on peut conjecturer que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

27. [ERRATUM] La première édition mentionne que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La **nouvelle édition** du manuel utilise :

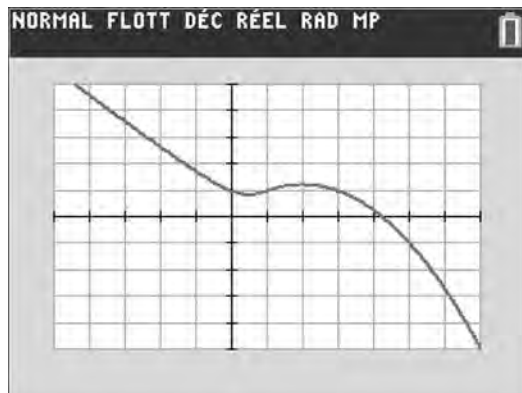
$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4} \text{ si } x > 1.$$

La correction ci-dessous correspond à la nouvelle édition.

1. On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ et $f(1) = 1$

La fonction f est continue en 1 . Ailleurs la fonction est continue comme composée de fonctions de référence.

2. a) NORMAL FLOTT DÉC RÉEL RAD MP



b) La fonction semble dérivable car la courbe n'admet pas de point anguleux.

3. a) Soit g la première fonction.

$$g'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

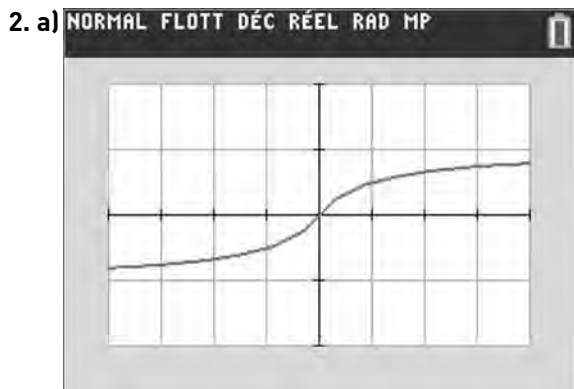
Soit h la seconde fonction.

$$h'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

b) $g'(1) = h'(1) = -\frac{1}{2}$

Les nombres dérivée de g et h en 1 sont égaux donc la fonction f est dérivable en 1.

28. 1. La fonction f est la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.



b) La fonction f semble dérivable sur $\mathbb{R}$ car la courbe n'admet pas de point anguleux.

c) Si $x < 0$, $f(x) = \frac{x}{1-x}$ et si $x \geq 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

d) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ car composée de fonctions dérivables.

e) On calcule les limites du taux d'accroissement en 0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+h} = 1$$

la fonction est donc dérivable en 0.

Déterminer la limite d'une suite

29. La fonction f associée à la suite (u_n) est :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) vérifie :

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) = x \Leftrightarrow x^2 + 2 = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2.$$

On obtient $\pm\sqrt{2}$, comme la suite (u_n) est minorée par 0, on a alors $l = \sqrt{2}$.

30. La fonction f associée à la suite (u_n) est :

$$f(x) = \frac{1}{4}(1+x^2).$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) vérifie :

$$\frac{1}{4}(1+x^2) = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0.$$

On obtient $x = 2 \pm \sqrt{3}$, comme la suite (u_n) est décroissante et $u_0 = 3$, on a alors $l = 2 - \sqrt{3}$.

31. La fonction f associée à la suite (u_n) est :

$$f(x) = e\sqrt{x}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) vérifie :

$$e\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x(x - e^2) = 0.$$

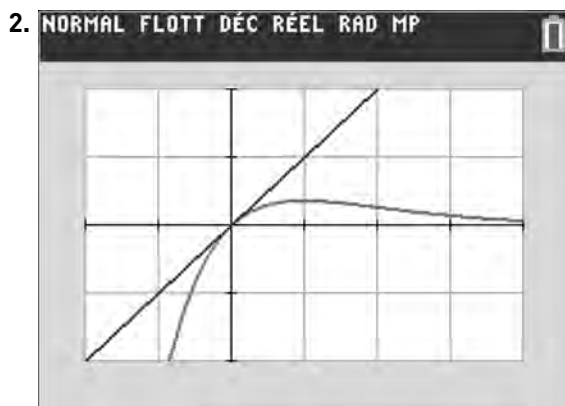
On obtient $x = 0$ ou $x = e^2$, comme la suite (u_n) est minorée par 0, on a alors $l = 0$.

32. 1. La fonction f associée à la suite (u_n) est :

$$f(x) = xe^{-x}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème du point fixe, la limite l de la suite (u_n) vérifie :

$$xe^{-x} = x \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ d'où } l = 0.$$



Il y a bien un seul point d'intersection en 0.

Trouver le nombre de solutions d'une équation

33. • Sur $[0 ; 3]$, $f(x) \leq -2$, donc $f(x)$ ne peut s'annuler.

• Sur $[3 ; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et change de signe car $f(3) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; +\infty[$.

34. 1. Sur $]-\infty ; 2]$ et sur $]2 ; +\infty[$ la fonction f est continue et monotone et $m \in]0 ; 2[$ appartient à l'intervalle image, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution sur chacun de ces intervalles.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq e^2$ donc l'équation $f(x) = m$ avec $m \in]e^2 ; +\infty[$ n'admet pas de solution.

35. 1. La fonction f est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = 2$ a trois solutions.

3. a) L'équation $f(x) = 4$ ne peut avoir de solution que dans $[-1 ; +\infty[$.

Sur $[-1 ; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et 4 est compris entre $f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 4$ admet un unique solution α .

b) $\alpha \approx 0$ à l'unité près.

36. 1. $f'(x) = 2x^4 - 8 = 2(x^2 - 2)(x^2 + 2)$

La fonction f' est du signe de $x^2 - 2$ et s'annule pour $x = \pm\sqrt{2}$. On a alors le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	$\nearrow \approx 6$	$\searrow \approx -12$	$\nearrow +\infty$	

2. Sur $[2 ; 3]$, la fonction f est continue, strictement croissante et $f(2) = -6,2$ et $f(3) = 70,2$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α .

3. On a : $2,24 < \alpha < 2,25$.

37. 1. $f(x) = -4 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 4) = 0$

$x = 0$ ou $x = 1 \pm \sqrt{5}$

2. $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ ou $x = 2$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow \approx 2,5$	$\searrow -12$	$\nearrow +\infty$	

3. Sur $]-\infty ; 2[$, $f(x) \leq 2,5$ donc l'équation $f(x) = 4$ n'admet pas de solution.

Sur $[2 ; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et 4 appartient à l'intervalle image donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution.

4. Il n'existe aucune valeur de k car la fonction f varie de $-\infty$ à $+\infty$.

38. 1. D'après le tableau de variations, la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. On utilise la continuité et la monotonie de la fonction sur des intervalles bien choisis.

k	Nombre de solutions
$k < -4$	Aucune solution
$k = -4$	Une solution
$-4 < k < -\pi$	Deux solutions
$k = -\pi$	Trois solutions
$-\pi < k \leq \sqrt{2}$	Quatre solutions
$\sqrt{2} < k < 2$	Trois solutions
$k = 2$	Deux solutions
$k > 2$	Une solution

39. 1. La fonction f est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) $f'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x = x(4x^2 + 9x + 2)$
 $= x(x + 2)(4x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c)

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	-3	$\approx 1,02$	1	$+\infty$		

3. L'équation (E) admet 2 solutions, en effet :

sur $]-\infty ; -2[$ et sur $[-2 ; -\frac{1}{4}]$, la fonction f est conti-

nue, monotone et change de signe, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur ces deux intervalles.

Sur $]-\frac{1}{4} ; +\infty[$, $f(x) \geq 1$ donc elle ne peut s'annuler.

Exercices d'entraînement

p. 124

Déterminer la limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

40 1. a) f est continue sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ car f est une fonction rationnelle.

b) $\frac{2x+1}{x+2} = x \Leftrightarrow 2x+1 = x^2+2x \Leftrightarrow x^2 = 1$

On obtient alors $x = \pm 1$.

c) $f'(x) = \frac{2(x+2) - 1(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$

Pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, la fonction f est croissante.

2. a) Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$.

On a donc : $0 \leq u_0 \leq u_1 < 1$. La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 1$, montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 1$:

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 1 \xrightarrow{f} f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(1)$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 1 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 1$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 1$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente.

La fonction f est continue sur ℓ et la suite (u_n) est convergente, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(x) = x$, comme $\ell \geq 0$, on en déduit d'après la question 1. b) que $\ell = 1$.

41. 1. a) f est continue sur I car f est un polynôme.

b) $1,4x(1-x) = x \Leftrightarrow x(0,4 - 1,4x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{2}{7}$

c) $f'(x) = 1,4(1-2x)$

Pour tout $x \in [0 ; 0,5]$, $f'(x) > 0$, la fonction f est croissante.

2. a) Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 0,126$.

On a donc : $0 \leq u_0 \leq u_1 < 0,5$. La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 0,5$, montrons que

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 0,5$:

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 0,5$

$\xrightarrow{f} f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(0,5)$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 0,35 \Rightarrow$

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 0,5$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 0,5$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 0,5, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente.

La fonction f est continue sur I et la suite (u_n) est convergente, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(x) = x$, comme $\ell \geq 0,1$, on en déduit

d'après la question 1. b) que $\ell = \frac{2}{7}$.

42. 1. a) f est continue sur I car f est une fonction rationnelle.

b) $\frac{3x+2}{x+1} = x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$

On obtient alors $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

c) $f'(x) = \frac{3(x+1) - 1(3x+2)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

Pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, la fonction f est croissante.

2. a) [ERRATUM] Sur la première édition du manuel, l'énoncé donne $0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 1$.

Sur la **nouvelle édition** du manuel, l'énoncé utilise $-0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

La correction ci-dessous correspond à la nouvelle édition.

Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = -0,5$ et $u_1 = 1$.

On a donc : $-0,5 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$. La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$-0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$, montrons que

$-0,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$

$-0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$

$\Rightarrow f(-0,5) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(3)$

$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{11}{4}$

$\Rightarrow -0,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour

tout $n \in \mathbb{N}$, $-0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente.

La fonction f est continue sur I et la suite (u_n) est convergente, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, comme $\ell \geq -0,5$, on en déduit d'après la question **1. b)** que $\ell = 1 + \sqrt{3}$.

43. 1. a) f est continue sur I car f est un polynôme.

b) $2x(1-x) = x \Leftrightarrow x(1-2x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

c) $f'(x) = 2(1-2x)$

Pour tout $x \in [0 ; 0,5]$, $f'(x) > 0$, la fonction f est croissante.

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 0,5 &\Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(0,5) \\ &\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 0,5 \end{aligned}$$

d) Si $x \leq 0,5$, f est croissante et si $x > 0,5$ f est décroissante.

2. a) Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 0,18$

On a donc : $0 \leq u_0 \leq u_1 < 0,5$. La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 0,5$, montrons que

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 0,5$:

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 0,5$

$\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(0,5)$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 0,5$

$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 0,5$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} < 0,5$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 0,5. D'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) est convergente.

La fonction f est continue sur I et la suite (u_n) est convergente, d'après le théorème du point fixe, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, comme $\ell \geq 0,1$, on en déduit d'après la question **1. b)** que $\ell = 0,5$.

Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

44. A. 1. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

• $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

• Le signe de $g'(x)$ est le signe du trinôme.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	-2		-6	$+\infty$

2. Sur $[1 ; 3]$, g est continue car dérivable, strictement croissante et change de signe car $g(1) = -6$ et $g(3) = 14$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

3. Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

$$\text{B. 1. } f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + 2x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(3x^3 - 3x + 4x^2 - 4 - 2x^3 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

2. Limites en $\pm\infty$: $f(x) = \frac{x^2(x+2)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{x+2}{1-\frac{1}{x}}$

Par quotient, on trouve :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Limite en ± 1 : on détermine le signe de $x^2 - 1$.

x	0	-1	1	$+\infty$	
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+

On obtient alors les limites suivantes.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

3. Le signe de $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$.

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$+\infty$	0	$-\infty$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

45. A. 1. $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$	

2. Sur $[1; 2]$, g est continue car dérivable, strictement croissante et change de signe car $g(1) = -2$ et $g(2) = 3$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

3.

```
def f(x):
    return 2*x**3 - 3*x*x - 1
def dichotomie(a,b):
    n=0
    while b-a >= 10**(-3):
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
            n += 1
    return a,b,n
```

On trouve alors : $1,676 < \alpha < 1,677$ après 10 itérations.

4. Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

B. 1. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2. $f'(x) = \frac{-1(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	0

46. 1. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

2. $f'(x) = \frac{-3x^2(x+2) + x^3}{(x+2)^2} = \frac{-2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	$+\infty$	$-\infty$

4. Sur I la fonction f est continue, monotone et à valeur dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α .

$f(-1,5) = 6,75$ et $f(0) = 0$ donc $\alpha \in]1,5; 0[$.

5.

```
def f(x):
    return -x**3/(x+2) - 2
def dichotomie(a,b):
    n=0
    while b-a >= 10**(-4):
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) < 0:
            b = c
        else:
            a = c
            n += 1
    return a,b,n
```

On trouve alors : $-1,1795 < \alpha < -1,1794$ après 14 itérations.

47. A. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$.

2. $g'(x) = 2e^x + 2 > 0$

La fonction g est croissante.

3. a) Sur $\mathbb{R}$ g est continue, croissante et à valeur dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

b) $g(0) = -5$ et $g(1) = 2e - 5 > 0$ donc $\alpha \in [0; 1]$.
 On trouve $\alpha \approx 0,940$.

4. Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

B. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = 2(1 - e^{-x}) + e^x(2x - 5) = g(x)e^{-x}$

3. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$\begin{aligned}
 4. \quad g(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow e^\alpha = \frac{-2\alpha + 7}{2} \\
 &\Leftrightarrow 1 - e^{-\alpha} = \frac{2\alpha - 5}{2\alpha - 7} \\
 &\Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7} \Rightarrow f(\alpha) \approx -1,901
 \end{aligned}$$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x}(2x - 5) = 0$

La droite D est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$. La courbe est en dessous de l'asymptote en $+\infty$.

C. $A_n(n; 0)$, $B_n(n; 2n - 5)$, $C_n(n; f(n))$.

1. $C_n B_n(0; 2n - 5 - f(n))$ et $A_n B_n(0; 2n - 5)$

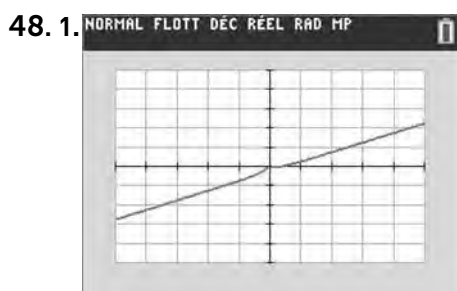
$$\text{On a donc } u_n = \frac{2n - 5 - f(n)}{2n - 5} = \frac{e^{-n}(2n - 5)}{2n - 5} = e^{-n}.$$

2. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = e^{-1}$.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{-1})^n = 0$ car $-1 < e^{-1} < 1$.

La suite (u_n) converge vers 0.

Limite et continuité



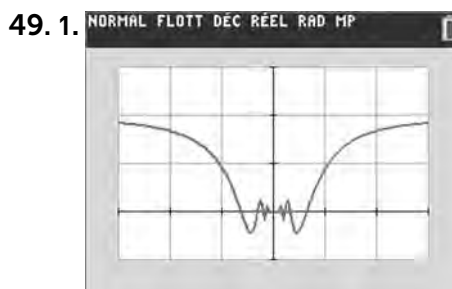
La fonction semble continue en 0.

2. Par composition : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Par quotient : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = 0$ par quotient : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$.

La fonction est continue en 0.



La fonction semble continue en 0.

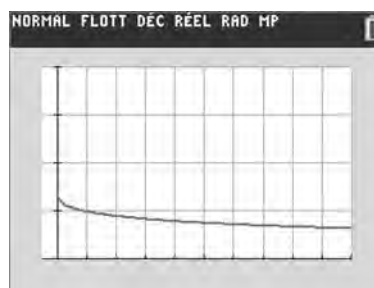
2. $|f(x)| \leq |x|$ et $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

D'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
 La fonction est continue en 0.

$$50. 1. \quad f(x) = \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \text{ si } x \neq 9$$

$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}$. La fonction f est continue en 9.

2. On obtient la courbe suivante.



$$51. 1. \quad f(x) = e^x \times \frac{x}{e^x - 1} \text{ par produit } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

La fonction est continue en 1.

52. 1. En utilisant la quantité conjuguée, on obtient la forme demandée.

2. a) Par quotient on trouve $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

b) $m = 0$

53. 1. Vue la courbe, la fonction ne semble pas continue.

$$2. f(x) = \frac{x^{40} + 200x^{20} + 10\,000 - 10\,000}{x^{20}}$$

$$f(x) = x^{20} + 200 \text{ si } x \neq 0$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ la fonction est continue en 0.

3. La représentation chaotique proche de 0 s'explique par les erreurs d'arrondis.

54. 1. largeur = hauteur

$$2x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2) \\ \Leftrightarrow e^x + e^{-x} - 4x - 2 = 0$$

2. a) $f'(x) = e^x - e^{-x} - 4$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow [e^x]^2 - 1 - 4e^x = 0$

c) $X^2 - 4X - 1 = 0$ d'où $\Delta = 20$
la racine positive est alors

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$$

$$x_1 = \ln(2 + \sqrt{5})$$

3. a)

x	0	$\ln(2 + \sqrt{5})$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	0	$f(\ln(2 + \sqrt{5}))$	$+\infty$

b) Si $0 < x < x_1$, $f(x) < 0$ ne peut s'annuler.

Sur $[x_1 ; +\infty[$, la fonction f est continue, croissante et change de signe donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

$f(2) \approx -2,48$ et $f(3) \approx 6,14$ donc $\alpha \in [2 ; 3]$.

c)

```
def f(x):
    return exp(x)+exp(-x)-4*x-2
def dichotomie(a,b):
    n=0
    while b-a>10**(-3):
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:
            b=c
        else:
            a=c
            n+=1
    return a,b,n
```

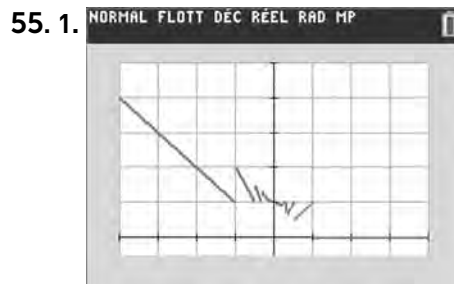
On trouve : $2,466 < \alpha < 2,4667$.

4. En posant $x = \frac{t}{39}$, on retrouve la solution α .

La hauteur h de l'arche est :

$$h = 2t = 2 \times 39\alpha = 78\alpha$$

$$2,466 < \alpha < 2,467 \Rightarrow 192,34 < h < 192,43.$$



On peut conjecturer que la fonction est continue en 0 bien qu'en d'autres points elle ne l'est pas.

2. Pour $x \neq 0$, $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

si $x > 0$, on a : $1 - x < f(x) \leq 1$

et si $x < 0$, on a : $1 \leq f(x) < 1 - x$

par le théorème des gendarmes à droite et à gauche de 0, on déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ la fonction est bien continue en 0.

Exercices bilan

p. 127

56. Fonction et suite (1)

1. $f'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$

La fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 6 = 0$

Donc $\alpha = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \approx 4,37$.

3. a) Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{11}{3}$.

On a donc : $0 \leq u_0 \leq u_1 < \alpha$.

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < \alpha, \text{ montrons que}$$

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \alpha :$$

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < \alpha$$

$$\Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(\alpha)$$

$$\Rightarrow 3 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \alpha$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \alpha$$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} < \alpha$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par α donc d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge.

4. a) $S_0 = 1$, $S_1 \approx 3,67$, $S_2 \approx 8,96$

b) Comme la suite est croissante et $u_1 > 3$, si $n \geq 1$ alors $u_n > 3$, on en déduit alors que : $S_n > 1 + 3(n-1)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 3(n-1) = +\infty$ par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

57. Fonction et suite (2)

A. 1. $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$ sur $I = [0; +\infty[$.

g croissante sur I .

2. $g(0) = 0$, comme g est croissante, $g(x) \geq 0$ sur I .

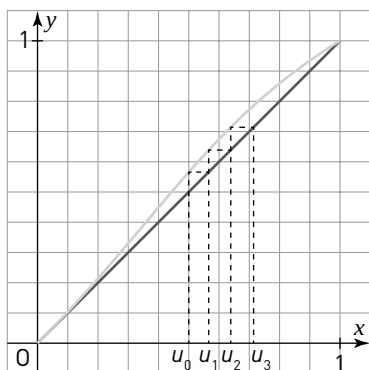
3. On en déduit que sur I , $e^x \geq x + 1 \Rightarrow e^x > x$.

B. 1. $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ comme f est croissante, $x \in [0; 1] \Rightarrow f(x) \in [0; 1]$.

2. a) $f(x) - x = \frac{e^x - 1 - xe^x - x^2}{e^x - x} = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$

b) Sur $[0; 1]$, $\frac{(1-x)g(x)}{e^x - x} \geq 0$ donc (D) est en dessous de $\mathcal{C}_f$.

C. 1.



2. Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 \approx 0,56$.

On a donc : $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq u_1 < 1$.

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} < 1$, montrons que

$\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 1$:

$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} < 1$

$$\stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) < f(1)$$

$$\Rightarrow 0,56 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < 1$$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour

tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} < 1$.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1, d'après le théorème des suites monotone, la suite (u_n) est convergente vers ℓ .

D'après le théorème du point fixe, f étant conti-

nue sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ vérifie l'équation $f(x) = x$ qui admet

deux solutions 0 et 1 et comme $\ell \geq 0,5$, la suite (u_n) converge vers 1.

58. Résolution d'équation

1. a) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1$.

L'équation $g(x) = 0$ admet $x = 1$ comme unique solution.

b) Comme la fonction g est croissante pour $x > 0$.

Si $x < 1$, $g(x) < 0$ et si $x > 1$, $g(x) > 0$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{b) } f'(x) = 2 - \frac{2}{x\sqrt{x}} = \frac{2g(x)}{x\sqrt{x}}$$

c) $f'(x)$ est du signe de $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
f	$+\infty$		$+\infty$

3. a) En divisant l'égalité (E) par $\sqrt{x}$, on trouve $f(x) = \pi$.

b) D'après le tableau de variations, sur $]0; 1[$ et $[1; +\infty[$, la fonction f est continue, monotone et π appartient aux intervalles images donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = \pi$ admet sur ces intervalles une unique solution notées α et β .

c) Par balayage sur une calculatrice, on trouve :
 $0,73 < \alpha < 0,74$ et $1,34 < \beta < 1,35$

59. Fonction irrationnelle

Affirmation 1 : Vraie

Soit $g(x) = x^3 - 3x + 3$, on a alors

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	5		1	$+\infty$

Sur $]-1 ; +\infty[$, $g(x) > 0$ donc ne peut s'annuler.

Sur $]-\infty ; -1]$, la fonction g est continue, croissante et change de signe, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha < 0$.

Affirmation 2 : Vraie

Comme g est strictement positive sur $]\alpha ; +\infty[$, la fonction f est dérivable sur cet intervalle.

Affirmation 3 : Faux

Contre exemple avec $m = 1$

$f(-2) = 1$ et $f(1) = 1$ donc l'équation $f(x) = 1$ admet au moins deux solutions.

60. Fonction auxiliaire

A. 1. Par produit et composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2. En développant $g(x)$ et avec les limites de références, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$.

3. $g'(x) = (x + 3)e^{x-4}$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	-2	$\approx -2,001$	$+\infty$

4. Sur $]-\infty ; -3[$, $g(x) < 0$ donc ne peut s'annuler.

Sur $[-3 ; +\infty[$, la fonction g est continue, croissante et change de signe, donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

5. Si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

6. $g(4) = 4$ donc $\alpha \in [-3 ; 4]$

```
def f(x):  
    return(x+2)*exp(x-4)-2  
def dichot(a,b):  
    n=0  
    while b-a>=10**(-3):  
        c=(a+b)/2  
        if f(a)*f(c)<0:  
            b=c  
        else:  
            a=c  
        n+=1  
    return a,b,n
```

On trouve en rentrant dichot(-3,4) :

$$3,069 < \alpha < 3,070$$

B. 1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(1 - e^{x-4}) = 0$

D'où $x = 0$ ou $x = 4$.

2. $f'(x) = 2x - e^{x-4}(-2x - x^2) = -xg(x)$

x	$-\infty$	0		α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$+\infty$	0		$f(\alpha)$	$-\infty$

3. $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)e\alpha^{-4} = 2 \Leftrightarrow e\alpha^{-4} = \frac{2}{\alpha + 2}$

D'où :

$$f(\alpha) = \alpha^2 - \frac{2\alpha}{\alpha + 2} = \frac{\alpha^3}{\alpha + 2}$$

61. Portail

A. 1. Immédiat la fonction est paire.

La courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

$$2. f'(x) = -\frac{b}{8} \left(\frac{1}{b} e^{\frac{x}{b}} - \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{b}} \right) = -\frac{1}{8} \left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} \right)$$

3. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	-2	0	2
$f'(x)$	-	0	+
f	$f(-2)$	$\frac{-b+9}{4}$	$f(2)$

$$S\left(0; \frac{-b+9}{4}\right)$$

B. 1. Comme $S[0; 2]$ on a : $b = 1$.

2. On a : $f(x) = -\frac{1}{8}(e^x + e^{-x}) + \frac{9}{4}$.

$$f(2) \approx 1,31$$

Sur $[0; 2]$, la fonction f est continue, décroissante et 1,5 appartient à l'intervalle image, d'après le théorème de la bijection l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution α .

Par balayage on trouve : $\alpha \approx 1,76$.

3. La masse d'un ventail vaut : $20 \int_0^{1,8} f(x) dx$.

$$\int_0^{1,8} f(x) dx = \left[\frac{-e^x + e^{-x}}{8} + \frac{9}{4}x \right]_0^{1,8} \approx 3,31$$

La masse vaut alors : 66,2 kg.

Le client va donc décider de motoriser son portail.

62. Population de grenouilles

$$1. P'(t) = \frac{18\,000e^{-0,5x}}{[0,4 + 3,6e^{-0,5x}]^2} > 0$$

La fonction P est croissante.

2. Par quotient et composition : $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 2\,500$.

3. $P(0) = 250$. Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction P est continue, croissante et 2 000 appartient à l'intervalle image, d'après le théorème de la bijection, l'équation $P(t) = 2\,000$ admet une unique solution t_0 .

Par balayage sur une calculatrice, on trouve : $t_0 \approx 7,2$.

4. C'est au cours de l'année 2025 que la population de grenouilles dépassera 2 000.

63. Plant de maïs

1. $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = a$ donc $a = 2$.

$$h(0) = \frac{a}{1+b} \Leftrightarrow \frac{2}{1+b} = 0,1 \Leftrightarrow b = 19$$

2. a) Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction h est continue, croissante et 1,5 appartient à l'intervalle image, d'après le théorème de la bijection, l'équation $h(t) = 1,5$ admet une unique solution t_0 .

b)

```
def f(t):
    return 2/(1+19*exp(-0,04*t))
t=0
while f(t) <= 1.5:
    t += 1
print(t)
```

On trouve $t = 102$. Au 102^e jour le plant de maïs a une hauteur supérieure à 1,5 m.

Préparer le BAC

Je me teste

p. 130

64. A et D

65. A

66. B

67. B

68. c

69. c

70. B

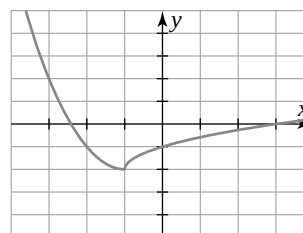
Préparer le BAC

Je révise

p. 131

71. Ensemble de continuité

1. On obtient la courbe suivante.



On peut conjecturer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Sur $x \neq -1$, la fonction est continue car composée de fonctions continues.

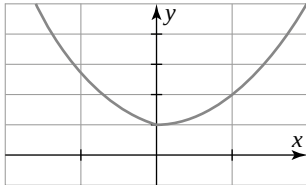
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + 2x - 1 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} - 2 = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ \text{en } -1 \end{array}$$

72. Dérivabilité en 0

1. On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ \text{en } 0. \end{array}$$

2. On obtient :



La non dérivabilité en 0 s'explique par l'absence de tangente en 0.

73. Limite par récurrence

1. f est une fonction rationnelle donc continue sur son ensemble de définition et donc sur $[0 ; 9]$.

2. a) On montre facilement par récurrence l'encadrement.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par 9, donc d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers $\ell \leq 9$.

c) La fonction f est continue sur $[0 ; 9]$ et la suite (u_n) est convergente vers ℓ , donc d'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation

$$f(x) = x \quad x = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \approx 5,19 \text{ ou } x = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \approx -0,19.$$

$$\text{On en déduit alors que } \ell = \frac{5 + \sqrt{29}}{2}.$$

74. Étude de fonction

1. On a :

$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$$(x + 1)(x^3 - x^2 + 3x + 1) = x^4 + 2x^2 + 2x + 1$$

On en déduit alors que :

$$f'(x) = \frac{(x + 1)g(x)}{(x^2 + 1)^2}$$

2. a) Pour $x \neq 0$, on a :

$$g(x) = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$$

Par produit, on déduit :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$$

b) $g'(x) = 3x^2 - 2x + 3$

$\Delta = -32 < 0$ donc $g'(x)$ n'a pas de racine.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$ donc la fonction g est croissante.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+			
g	$-\infty$	-4	1	$+\infty$

c) Sur $\mathbb{R}$, la fonction g est continue, strictement croissante et change de signe car $g(-1) = -4$ et $g(0) = 1$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et $\alpha \in [-1 ; 0]$.

d) On trouve $-0,296 \leq \alpha \leq -0,295$

3. a) si $x < \alpha$, $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$, $g(x) > 0$.

b) $f'(x)$ est du signe de $(x + 1)g(x)$.

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$x + 1$	-	+	+	0
$g(x)$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	-	0	+

x	$-\infty$	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
f	$-\infty$	-2	$f(\alpha)$	$+\infty$

75. Deux solutions

1. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 3 = +\infty$

b) $f'(x) = e^x - 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et comme $\exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$, $x < 0$, $f'(x) < 0$ et $x > 0$, $f'(x) > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	-2	$+\infty$

2. a) Sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[0 ; +\infty[$ la fonction f est continue, strictement monotone et change de signe donc sur chacun de ces intervalles l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

b) $f(1) \approx -1,28$ et $f(2) \approx 2,38$ donc $\beta \in [1 ; 2]$.

Par balayage, on trouve : $\beta \approx 1,5$ au dixième.

76. Unique solution

A. 1. On a les équivalences pour $x \neq 0$:

$$e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x - e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 0$$

2. a) Par somme, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue, strictement croissante et change de signe car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α . De plus $f(0,5) \approx -0,11$ et $f(1) \approx 0,63$ donc

$$\alpha \in \left[\frac{1}{2} ; 1 \right].$$

d) Comme f est croissante si $x \in [0 ; \alpha]$, $f(x) < 0$.

B. 1. a) On a les équivalences pour $x \neq 0$

$$e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x e^x = 1 \Leftrightarrow x e^x + x = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x(e^x + 1) = x + 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{e^x+1} = x \Leftrightarrow g(x) = x$$

b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = \frac{1(1+e^x) - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - x e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^x(e^{-x} - x)}{(1+e^x)^2} = -\frac{e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$, on en déduit que le

signe de $g'(x)$ est celui de $-f(x)$.

Comme sur $\in [0 ; \alpha]$, $f(x) < 0$ alors $g'(x) > 0$.

La fonction g est croissante sur $[0 ; \alpha]$.

2. a) Initialisation : $n = 0$, on a $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$.

On a donc : $0 \leq u_0 \leq u_1 < \alpha$. La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < \alpha$, montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \alpha$:

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < \alpha \xrightarrow{g'} g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) < g(\alpha) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} < \alpha$$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} < \alpha$.

b) La suite (u_n) est croissante et majorée par α , d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers ℓ .

De plus, la fonction g est continue sur $[0 ; \alpha]$, d'après le théorème du point fixe, $\ell = \alpha$.

```
c) from math import *
def u(n) :
    u = 0
    for i in range(1, n + 1) :
        u = (1 + u) / (1 + exp(u))
    return u
```

Pour $n = 4$, on trouve alors $u_4 \approx 0,567\ 143$.

Exercices vers le supérieur

p. 132

77. Fonction définie par une relation fonctionnelle

1. a) On prend $x = y = 0$, on trouve $f(0) = 0$.

On prend $y = -x$ et comme $f(0) = 0$, on trouve $f(-x) = -f(x)$.

La fonction f est impaire.

b) Initialisation : $n = 0$, on a $f(0x) = f(0) = 0 = 0f(x)$

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $f(nx) = nf(x)$, montrons que $f((n+1)x) = (n+1)f(x)$.

$$f[(n+1)x] = f[nx + x] = f(nx) + f(x)$$

De plus,

$$f[(n+1)x] = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.

c) Comme la fonction f est impaire,

$$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x).$$

$$d) f(x) = f\left(n \times \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x)$$

e) $q \in \mathbb{Q}$, donc $q = \frac{k}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$f(qx) = f\left(k \times \frac{x}{n}\right) = kf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{k}{n}f(x) = qf(x)$$

f) $f(q) = f(q \times 1) = qf(1) = \lambda q$

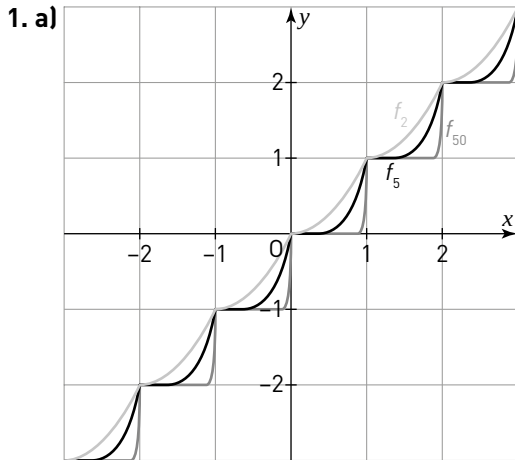
2. a) D'après la continuité de la fonction f :

$$f(x) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(q_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda q_n$$

$$f(x) = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = \lambda x.$$

b) Les fonctions f vérifiant cette relation constituent l'ensemble des fonctions linéaires.

78. Somme et continuité



b) Si $x \notin \mathbb{Z}$, la fonction partie entière est continue donc la fonction f_n est continue par composition de fonctions continues.

Si $x = k \in \mathbb{Z}$, calculons les limites à gauche et à droite de k et la valeur en k :

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f_n(x) = (k-1) + [k - (k-1)]^n = k$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f_n(x) = k + [k - k]^n = k$$

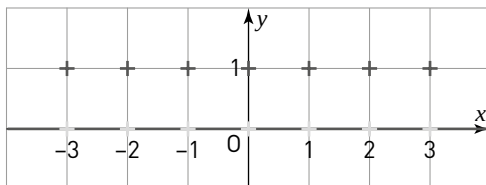
$$\text{et } f_n(x) = f_n(k) = k$$

la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Si $x \notin \mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k < x < k+1$

on a alors $E(x) = k$ et $E(1-x) = -k$ donc $g(x) = 0$.

Si $x = k \in \mathbb{Z}$, $g(k) = k+1 - k = 1$.



La fonction g n'est pas continue pour $x \in \mathbb{Z}$

3. La somme de deux fonctions discontinues peut être continue comme les fonctions f_n ou discontinue comme la fonction g .

79. Produit de fonctions et continuité

1. Supposons que fg est continue en a

$$\lim_{x \rightarrow a^-} fg(x) = fg(a) = f(a)g(a) \quad (1)$$

comme la fonction f est continue en a , la limite à gauche de fg vaut :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} fg(x) = f(a) \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$$

de (1) et comme $f(a) \neq 0$ on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = g(a)$$

même raisonnement avec la limite à droite :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = g(a)$$

donc g est continue en a . Contradiction.

2. a) On calcule les limites à gauche et à droite de 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} fg(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \times (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} fg(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times 0 = 0$$

Comme $fg(0) = 0$, la fonction fg est continue en 0.

b) On calcule la limite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} fg(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \times \frac{1}{x} = 1$$

Comme $fg(0) = 0$, la fonction fg est discontinue en 0.

c) Il faut que la fonction g soit bornée au voisinage de a , on peut alors avec le théorème des gendarmes, montrer que la limite en a de fg est nulle.

3. Soit les fonctions f et g définies sur $]1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = E(x) \\ g(x) = \frac{1}{E(x)} \end{cases}$$

les fonctions f et g sont discontinues en 2 mais fg est continue en 2 : $\lim_{x \rightarrow 2} fg(x) = 1 = fg(2)$

soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

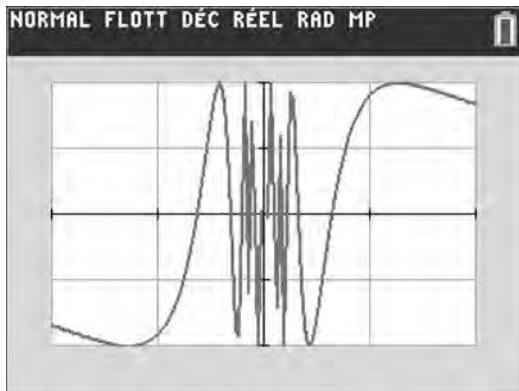
$$\begin{cases} f(x) = E(x) \\ g(x) = \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } g(0) = 0 \end{cases}$$

les fonctions f et g sont discontinues en 2 ainsi que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} fg(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty \text{ et } fg(0) = 0.$$

80. Discontinuité

1. On a la courbe suivante sur $[-1 ; 1]$.



La fonction f semble non continue en 0, la courbe oscillant de plus en plus vite entre -1 et 1 plus x se rapproche de 0.

2. On pose $X = \frac{1}{x}$ donc si $x \rightarrow 0^+$ alors $X \rightarrow +\infty$.

L'idée est de s'approcher vers l'infini de deux façons avec les suites (u_n) et (v_n) .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin u_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin v_n = 1$$

Ce qui prouve que f n'a pas de limite en 0^+ .

La fonction f n'est pas continue en 0.

81. Valeurs intermédiaires

1. a) Initialisation : $n = 0$,

$$a \leq k \leq b \Leftrightarrow a_0 \leq k \leq b_0$$

la proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $a_n \leq k \leq b_n$, montrons que $a_{n+1} \leq k \leq b_{n+1}$:

$$\text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq k \text{ d'après HR } a_n \leq k \leq f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\text{donc } a_{n+1} \leq k \leq b_{n+1}$$

$$\text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < k \text{ d'après HR } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq k \leq b_n$$

$$\text{donc } a_{n+1} \leq k \leq b_{n+1}$$

la proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq u_n \leq b_n$

b) Pour la suite (a_n) deux cas de figure :

$$\text{soit } a_{n+1} - a_n = 0$$

$$\text{soit } a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \geq 0$$

la suite (a_n) est croissante.

même chose pour la suite (b_n)

$$\text{soit } b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + b_n}{2} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$$

$$\text{soit } b_{n+1} - b_n = 0$$

la suite (b_n) est décroissante.

2. $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1}$ deux cas de figure :

$$\text{soit } u_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2} u_n$$

$$\text{soit } u_{n+1} = b_n - \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2} u_n$$

$\forall x \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$, la suite (u_n) est géométrique de

raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = b - a$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1.$$

3. D'après 1. $a_n \leq k \leq b_n$, d'après le théorème de gendarmes $k = c$, comme f est continue sur $[a ; b]$, d'après le théorème du point fixe, $c = f(c)$ donc $k = f(c)$. Cela démontre le théorème des valeurs intermédiaires.

82. Méthode de la sécante

A. Le principe

$$1. (AB) : y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

a' correspond à $y = 0$, on a alors :

$$a' = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a).$$

2. a) Par construction : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b$

la suite (a_n) est majorée par b .

Comme f est croissante,

$f(a_n) < 0$ et $f(b) > f(a)$ et comme $b > a_n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = -\frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n) > 0$$

la suite (a_n) est croissante.

b) La suite (a_n) est croissante et majorée par b d'après le théorème des suites monotones, la suite (a_n) est convergente vers ℓ .

La fonction f étant continue, par passage à la

limite de : $a_{n+1} = a_n - \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n)$ on en déduit que $f(\ell) = 0$.

B. Application

1. $f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x - 8) \forall x \in [0; 1], x \geq 0$
et $3x - 8 < 0$ donc $f'(x) \leq 0$.

La fonction f est décroissante, continue et $f(0) = 1$ et $f(1) = -2$ donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0; 1]$.

2. a)

```
from math import *
def f(x):
    return x**3-4*x*x+1
def secante(a,b,p):
    while f(a) >= 10**(-p):
        a = a - (b-a)/(f(b)-f(a))*f(a)
    return a
```

b) Avec $\text{secante}(0, 1, 3)$ on trouve $\alpha \approx 0.537$ à 10^{-3} près.

83. Relation fonctionnelle

Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$.

On a alors en utilisant la relation fonctionnelle :

$$f^2(b) - f^2(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(b) - f(a)][f(b) + f(a)] = 0$$

comme $f(a) \neq f(b)$ alors $f(b) + f(a) = 0$

$f(a) \neq 0$ sinon on aurait $f(b) = f(a) = 0$.

La fonction f est continue sur $[a; b]$, et f change de signe sur $[a; b]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = 0$. On a alors $f^2(c) = 0$ contradiction.

84. Zéros d'une famille de fonctions

1. $f'(x) = x^{n-1} [(n+1)x - 2n]$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{2n}{n+1}$$

Si $x \geq 0$, $f'(x)$ est du signe de $(n+1)x - 2n$, donc

Si $x \in \left[0; \frac{2n}{n+1}\right]$, $f'(x) \leq 0$, f est décroissante.

2. Si $n \geq 2 \Leftrightarrow 2n \geq n+2 > n+1$ donc $\frac{2n}{n+1} > 1$.

Or $f(1) = 0$ comme f est décroissante sur $\left[0; \frac{2n}{n+1}\right]$.

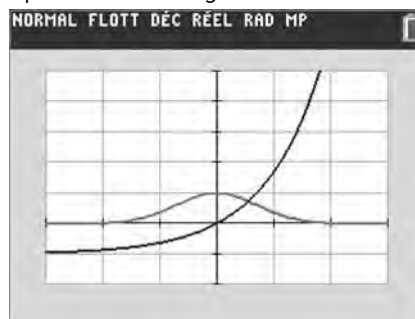
$$f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$$

3. Sur $\left[\frac{2n}{n+1}; 2\right]$, $f'(x) \geq 0$ et $f(2) = 1 > 0$.

La fonction f est continue, croissante et change de signe, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

85. Nombre de solutions d'une équation

1. Pour montrer graphiquement le nombre de solutions de (E) on cherche le nombre de points d'intersection des courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = e^x - 1$.



On observe donc une solution.

2. Si $x < 0$, $e^{-x^2} > 0$ et $e^x - 1 < 0$ donc $e^{-x^2} > e^x - 1$.

3. a) $f'(x) = -2xe^{-x^2} - e^x = -(2xe^{-x^2} + e^x)$

Si $x \geq 0$, alors $f'(x) < 0$, la fonction f est décroissante.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

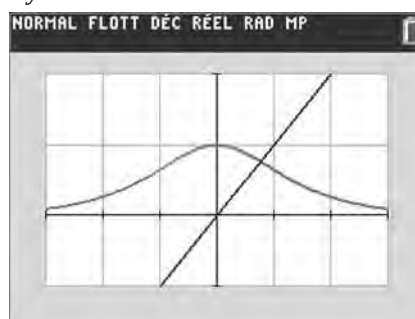
c) $f(0) = 1$

Sur $[0; +\infty[$, la fonction f est continue, décroissante et change de signe donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

Si $x < 0$, d'après 2. $f(x) > 0$ donc f ne s'annule pas. L'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

86. Point fixe

1. On trace la courbe de la fonction f sur $[-3; 3]$ et la droite $y = x$.



On peut conjecturer que $f(x) = x$ admet une solution.

2. a) On a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

$$b) g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} - 1$$

Si $x \geq 0$, $e^x - e^{-x} \geq 0$ et $e^x + e^{-x} \geq 1$ donc

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \leq 1 \text{ et } \frac{1}{e^x + e^{-x}} < 1 \text{ donc } \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \leq 1$$

donc $g'(x) \leq 0$.

Si $x < 0$ alors $\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} < 0$ donc $g'(x) < 0$

la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $g(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Sur $\mathbb{R}$, la fonction g est continue, décroissante et change de signe, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ donc $f(x) = x$ admet une unique solution.

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc la suite (u_n) d'après le théorème du point fixe converge vers la solution de $f(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$.

$g(0) = 1$ et $g(1) \approx -0,35$ donc $\ell \in [0 ; 1]$.

```
def f(x):
    return 2/(exp(x)+exp(-x))-x
def dichotomie(a,b):
    n=0
    while b-a>=10**(-3):
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:b=c
        else:a=c
        n+=1
    return a,b,n
```

de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

$f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc $\alpha \in [0 ; 1]$.

2. a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$. La fonction f change donc de signe

entre $\frac{1}{2}$ et 1 donc $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] = I_2$.

b) $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64}$ La fonction f change de signe entre $\frac{1}{2}$

et $\frac{3}{4}$ donc $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right] = I_3$.

3. a) f doit changer de signe entre a et b .

b) La variable n représente le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une largeur d'intervalle $b - a < 10^{-3}$.

c) Ligne 7 : on teste si la fonction change de signe entre a et b ;

ligne 8 : si vrai on remplace b par c ;

ligne 9 : et 10 si faux on remplace a par c .

d) On trouve $0,681 < \alpha < 0,682$ obtenu après 10 itérations.

e) On modifie la ligne 5 par :

while b-a>=10**(-6):

On trouve $0,682\,327 < \alpha < 0,682\,328$ obtenu après 20 itérations.

TP 2. La méthode Newton Raphson

• **Durée estimée** : 30 min

• **Objectif** : Étude d'un algorithme très performant donnant une valeur approchée d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

A. Principe

1. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_n vaut :

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_{n+1} .

On a alors : $f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

2. La fonction f' ne doit pas s'annuler en x_n .

B. Application

1. $f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x - 8)$

Si $x \in [0 ; 1]$, $3x - 8 < 0$ donc $f'(x) \leq 0$.

Travaux pratiques

p. 134

TP 1. Algorithme de dichotomie

• **Durée estimée** : 30 min

• **Objectif** : Utilisation d'un algorithme permettant de donner une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue, strictement croissante et change de signe donc d'après le théorème

La fonction f est décroissante sur $[0 ; 1]$.

$f(0) = 1$ et $f(1) = -2$

Sur $[0 ; 1]$, la fonction f est continue, strictement décroissante et change de signe, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

2. a) On ne peut prendre $x_0 = 0$ car la dérivée f' s'annule en 0.

b)

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	x_{n+1}
0	1	-2	-5	0,4	0,6
1	0,6	-0,224	-3,72	0,060	0,540
2	0,540	-0,009	0,3445	0,0026	0,537

La correction entre deux termes est $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

c) Après deux étapes, elle est de 0,0026 soit $\approx 2,6 \times 10^{-3}$.

3. a)

```
from math import*
def f(x):return x**3-4*x*x+1
def fprime(x):return 3*x*x-8*x
def newton(a,p):
    x=a
    n=0
    while abs(f(x))>=10**(-p):
        x=x-f(x)/fprime(x)
        n=n+1
    return x,n
```

b) ligne 9 : tant que la distance de $f(x)$ à 0 est plus grande que 10^{-p} , on boucle. Lorsque cette condition n'est plus respectée, la valeur de $f(x)$ se trouve à moins de 10^{-p} de 0.

c) Il y a 3 itérations pour $p = 3$.

Il y a 4 itérations pour $p = 6$.

Il y a 5 itérations pour $p = 12$.

d) Cet algorithme est très efficace car il nécessite une itération supplémentaire pour passer à une précision au carré.

CHAPITRE 5 Dérivation et convexité

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

L'objectif de ce chapitre est de compléter les notions de dérivation vues en 1^{er} et d'introduire la notion de convexité d'une fonction.

Ainsi, nous avons fait le choix d'activités d'introduction de diverses natures, progressives et qui suivent la trame du cours.

Ceci est accompagné d'exercices au niveau croissant de difficulté et de TP de recherche et d'algorithmique permettant une appropriation progressive des différents contenus par l'élève.

Objectifs

- Déterminer l'image d'un nombre par une fonction composée.
- Calculer la dérivée d'une fonction composée et en déduire le tableau de variations de cette fonction.
- Étudier la convexité d'une fonction par différentes méthodes.
- Déterminer les coordonnées des points d'inflexion par différentes méthodes.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 137

1. Déterminer un nombre dérivé

1. a) Graphiquement on trouve $f'(0) = -2$, $f(0) = 0$, $f'(1) = 3$ et $f(1) = 0$.

b) Graphiquement, la tangente est horizontale pour $x = -1,2$ et $x = 0,6$.

2. $g(x) = 3x^2$ et $g''(x) = 6x$.

a) $g'(3) = 3 \times 3^2 = 27$

et $g'(-3) = 3 \times (-3)^2 = 27$. On remarque que $g'(-3) = -g'(3)$.

C'est normal car la fonction $x \mapsto 3x^2$ est paire.

b) $g'(a) = 12$ ssi $3a^2 = 12$ ssi $a^2 = 4$ ssi $a = 2$ (abscisse positive).

2. Déterminer une équation de tangente

1. a) $f'(x) = 2x + 3$ donc $f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$ et

$f(2) = 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 11$.

b) $\mathcal{T}_2 : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.

$\mathcal{T}_2 : y = 7(x - 2) + 11 = 7x - 3$.

2. $g(x) = e^x$ donc $g'(x) = e^x$.

$\mathcal{T}_0 : y = g'(0)(x - 0) + g(0)$.

$\mathcal{T}_0 : y = 1(x) + 1$.

$\mathcal{T}_0 : y = x + 1$.

3. Calculer des dérivées

a) $f'(x) = \frac{2}{3}[3x^2] + 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

b) $g'(x) = 4 - 7\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4 + \frac{7}{x^2}$

c) $h'(x) = e^x + xe^x = e^x(x + 1)$

d) $i'(x) = \frac{(2xe^x + x^2e^x)(x + 5) - (x^2e^x + 3)(1)}{(x + 5)^2}$
 $= \frac{(2x^2e^x + 10xe^x + x^3e^x + 5x^2e^x) - (x^2e^x + 3)}{(x + 5)^2}$
 $= \frac{2x^2e^x + 10xe^x + x^3e^x + 5x^2e^x - x^2e^x - 3}{(x + 5)^2}$
 $= \frac{6x^2e^x + 10xe^x + x^3e^x - 3}{(x + 5)^2}$

4. Étudier des tableaux de signes

1.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$\text{sgn}(f(x))$	$-$	$-$	$+$	
$\text{sgn}(g(x))$	$-$	$+$	$+$	
$\text{sgn}(f(x) \times g(x))$	$+$	$-$	$+$	

2. $h(x) = (x-3)(x+3)(3x+4)$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{4}{3}$	3	$+\infty$
$\text{sgn}(x-3)$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$\text{sgn}(x+3)$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$\text{sgn}(3x+4)$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$\text{sgn}(h(x))$	$-$	$+$	$-$	$+$	

5. Calculer la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$

1. $f'(x) = 3e^{3x+1}$

2. $g'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{-2x+1}} = -\frac{1}{\sqrt{-2x+1}}$

et $v \circ u(4) = v(u(4)) = v(3 \times 4) = v(12) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
 donc $u \circ v(4) \neq v \circ u(4)$.

On peut en conclure que les fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$ ne sont pas égales.

B. Schéma de composition avec trois fonctions

$$x \xrightarrow{w} x+1 \xrightarrow{v} (x+1)^2 \xrightarrow{u} \frac{1}{(x+1)^2}$$

$u \circ v \circ w(x) = u \circ v(w(x)) = u \circ v(x+1)$

$$= u(v(x+1)) = u((x+1)^2) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

de même $(u \circ v)(x) = \frac{1}{x^2}$

$(u \circ v) \circ w(x) = (u \circ v)(w(x)) = (u \circ v)(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$

de même $(v \circ w)(x) = (x+1)^2$

$u \circ (v \circ w)(x) = u((x+1)^2) = \frac{1}{(x+1)^2}$

donc $u \circ v \circ w(x) = (u \circ v) \circ w(x) = u \circ (v \circ w)(x)$.

2 Étudier une dérivée

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Conjecturer et démontrer la formule de la dérivée d'une fonction composée.

1.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de u	$+\infty$	1	$+\infty$

2.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	$+$	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g(x)$	$-$	$+$	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $h(x)$	$-$	$+$	

3. Il s'agit de la fonction g qui présente le bon signe (contrairement à h) mais également les bonnes valeurs (contrairement à f), en effet sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère, donc $g'(-3) = -g'(3)$ ce qui correspond à la situation de u .

4. $(v \circ w)'(x) = w'(x) \times v'(w(x))$

Activités

p. 138-139

1. Voir des fonctions... à l'intérieur d'autres fonctions !

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectifs :** Introduire la notion de fonction composée et montrer la construction de fonctions à partir de fonctions de référence.

A. Schéma de composition avec deux fonctions

1. $f(1) = \sqrt{3 \times 1} = \sqrt{3}$. La dernière opération effectuée est la racine carrée.

2. $x \mapsto u(x) = 3x \mapsto v(u(x)) = v(3x) = \sqrt{3x}$.

3. C'est l'algorithme A.

4. a) $D_u = \mathbb{R}_+$ et $D_v = \mathbb{R}$.

b) $u(v(x)) = \sqrt{v(x)} = \sqrt{3x}$ et $v(u(x)) = 3u(x) = 3\sqrt{x}$.

c) $D_{u \circ v} = \mathbb{R}_+$ et $D_{v \circ u} = \mathbb{R}_+$. Ces deux domaines de définition sont égaux.

5. $u \circ v(0) = u(v(0)) = u(\sqrt{0}) = 0$

et $v \circ u(0) = v(u(0)) = v(3 \times 0) = 0$

$u \circ v(4) = u(v(4)) = u(\sqrt{4}) = u(2) = 3 \times 2 = 6$

5. a) Il suffit de simplifier par $v(a+h) - v(a)$ le produit à droite de l'égalité.

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u \circ v(a+h) - u \circ v(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u \circ v(a+h) - u \circ v(a)}{v(a+h) - v(a)} \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u \circ v(a+h) - u \circ v(a)}{v(a+h) - v(a)} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \\ &= u' \circ v(a) \times v'(a). \text{ Ceci est vérifié pour tout réel } a \text{ de } I \text{ d'où } (u \circ v)' = (v' \circ u) \times v'. \end{aligned}$$

3 Utiliser une fonction de production

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Étudier différentes fonctions et leurs particularités.

1. a) $\frac{f(0) + f(20)}{2} = \frac{0 + 20\sqrt{20}}{2} = 10\sqrt{20} \approx 44,72 < 50.$

La stratégie ne semble pas efficace.

b) $\frac{f(10) + f(10)}{2} = \frac{20\sqrt{10} + 20\sqrt{10}}{2} = 20\sqrt{10} \approx 63,25 > 50.$

La stratégie semble efficace.

c) Si on trace la courbe représentative de la fonction f et les points $A(4; f(4))$ et $B(16; f(16))$ alors le point $M(t \times 4 + (1-t) \times 16; f(t \times 4 + (1-t) \times 16))$ est situé au-dessus du point

$$N(t \times 4 + (1-t) \times 16; tf(4) + (1-t) \times f(16))$$

donc $f(t \times 4 + (1-t) \times 16) \geq tf(4) + (1-t)f(16).$

Autre manière :

$$tf(4) = 40t \text{ et } (1-t)f(16) = (1-t)80 = 80 - 80t$$

donc $tf(4) + (1-t)f(16) = 80 - 40t$

$$\text{De plus : } f(4t + 16(1-t)) = f(16 - 12t) = 20\sqrt{16 - 12t}$$

Soit g la fonction définie par

$$g(t) = 20\sqrt{16 - 12t} - (80 - 40t).$$

$$\text{Alors } g'(t) = 40 + \frac{20(-12)}{2\sqrt{16 - 12t}} = 40 - \frac{120}{\sqrt{16 - 12t}}.$$

$$40 - \frac{120}{\sqrt{16 - 12t}} \geq 0 \text{ ssi } \frac{40}{120} \geq \frac{1}{\sqrt{16 - 12t}} \text{ ssi}$$

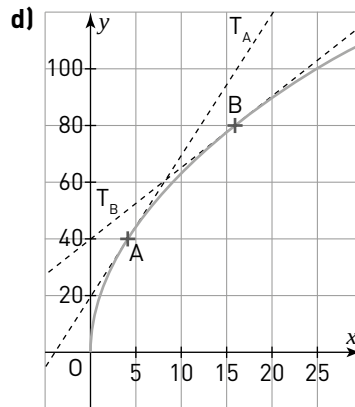
$$\sqrt{16 - 12t} \geq \frac{120}{40} \text{ ssi } \sqrt{16 - 12t} \geq 3 \text{ ssi } 16 - 12t \geq 9$$

$$\text{ssi } 7 \geq 12t \text{ ssi } t \leq \frac{7}{12}.$$

t	0	$\frac{7}{12}$	1
Signe de $g'(t)$	+		-
Variations de g			

Donc $g(t) \geq 0$ sur $[0; 1]$ d'où :

$$f(t \times 4 + (1-t) \times 16) \geq tf(4) + (1-t)f(16).$$



Les tangentes sont situées au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. a) $\frac{f(0) + f(20)}{2} = \frac{0 + \frac{4}{25} \times 20^2}{2} = 32 < 50$

La stratégie ne semble pas efficace.

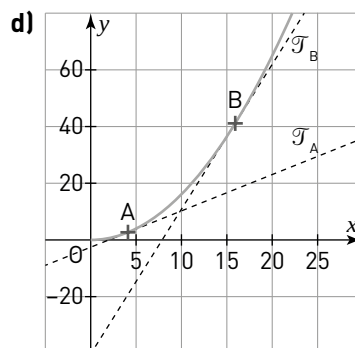
b) $\frac{f(10) + f(10)}{2} = \frac{\frac{4}{25} \times 10^2 + \frac{4}{25} \times 10^2}{2} = 16 < 50$

La stratégie ne semble pas efficace.

c) Si on trace la courbe représentative de la fonction f et les points $A(4; f(4))$ et $B(16; f(16))$ alors le point $M(t \times 4 + (1-t) \times 16; f(t \times 4 + (1-t) \times 16))$ est situé en-dessous du point

$$N(t \times 4 + (1-t) \times 16; tf(4) + (1-t) \times f(16))$$

donc $f(t \times 4 + (1-t) \times 16) \leq tf(4) + (1-t)f(16).$

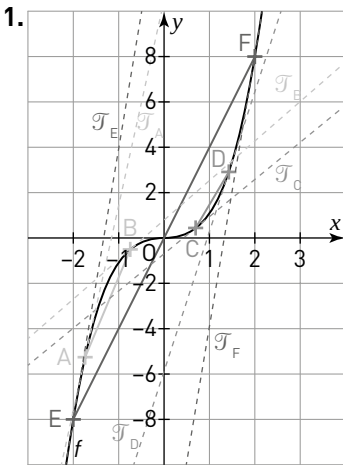


Les tangentes sont situées en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. Cela dépend de la modélisation. Dans la 1^{re} modélisation, la 2^e stratégie semblait efficace. Dans la 2^e modélisation, la 2^e stratégie était moins efficace que la 1^{re}, elle donne même des résultats moindres. Les fonctions des questions 1. et 2. ne présentent pas la même orientation de courbe. La 1^{re} est orientée vers le bas, la 2^{de} vers le haut, ce qui donne des valeurs pour $f(10)$ très différentes ! Par la suite, nous verrons que la 1^{re} est concave et la 2^e est convexe.

4 Voir le lien entre courbes, sécantes et tangentes

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Conjecturer des positions relatives de courbes, de sécantes et de tangentes.



2. Voir graphique ci-dessus.

Le segment [AB] est situé en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. Voir graphique ci-dessus.

Le segment [CD] est situé au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Le segment [EF] traverse la courbe $\mathcal{C}_f$.

4. Les tangentes $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{T}_B$ et $\mathcal{T}_E$ sont au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$. Les tangentes $\mathcal{T}_C$, $\mathcal{T}_D$ et $\mathcal{T}_F$ sont en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$.

5. Il existe un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$ ici, il s'agit de l'origine du repère.

Sur $]-\infty ; 0]$	Sur $[0 ; +\infty[$
• Les sécantes sont en dessous de $\mathcal{C}_f$. • Les tangentes sont au-dessus de $\mathcal{C}_f$.	• Les tangentes sont en dessous de $\mathcal{C}_f$. • Les sécantes sont au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

Avec un point d'inflexion d'abscisse 0.

À vous de jouer

p. 141

1. Le schéma de composition de la fonction f est

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+2 & \mapsto & (x+2)^3 \end{array}$$

2. Le schéma de composition de la fonction g est

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2 - 5 & \mapsto & \sqrt{3x^2 - 5} \end{array}$$

$$3. f \circ g(6) = f(g(6)) = f\left(\frac{1}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{6}\right) + 1 = \frac{1}{2} + 1 = 1,5.$$

$$4. f \circ g(1) = f(g(1)) = f(0) = \frac{1}{e}$$

$$5. f'(x) = (-1)e^3x + (-x+1)3e^3x = e^3x(-1-x+1) = -xe^3x.$$

$$6. f'(x) = 2x\cos(x^2 + 1)$$

$$7. f(x) = \sqrt{2 + \cos(x)} ; f'(x) = \frac{-\sin(x)}{2\sqrt{2 + \cos(x)}}$$

or $2\sqrt{2 + \cos(x)} > 0$ et $-\sin(x) \geq 0$ ssi $\sin(x) \leq 0$ ssi $x \in [-\pi + 2k\pi ; 0 + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$.

Donc f est croissante sur $[-\pi + 2k\pi ; 0 + 2k\pi]$ et décroissante sur $[0 + 2k\pi ; \pi + 2k\pi]$. Le tableau de variations est donc le suivant, pour $k = 0$.

x	0	π	2π
Variations de f	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$

8. $g(x) = -2xe^{-x^2}$ or $-2e^{-x^2} < 0$ pour tout réel x donc le signe de $g'(x)$ est le contraire du signe de x . Donc $g'(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_-$.

Donc g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et g est croissante sur $\mathbb{R}_-$. De plus $g(0) = e^{-0^2} = e^0 = 1$ d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	-
Variations de g		1	0

9. D'après le graphique, la courbe de f est en-dessous de ses sécantes sur $[-1 ; 0,5]$ et est au-dessus de ses sécantes sur $[0,5 ; 1,5]$. Donc f est convexe sur $[-1 ; 0,5]$ et concave sur $[0,5 ; 1,5]$.

10. f est convexe sur $[0,25 ; 1,5]$ et concave sur $[-1 ; 0,25]$.

11. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur et utilise le signe $\leq$ au lieu de $\geq$. L'erreur est corrigée sur les éditions suivantes.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} \text{ ssi } \sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{2} \text{ ssi } \sqrt{a+b} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

$$\text{12. } f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \text{ ssi } \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2} \text{ ssi } (a+b)^3 \leq \frac{8(a^3+b^3)}{2} \text{ ssi } (a+b)^3 \leq 4(a^3+b^3)$$

13. f' est décroissante sur $]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$ donc f est concave sur cet intervalle.

f' est croissante sur $[0 ; 1]$ donc f est convexe sur cet intervalle.

14. f' est décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{4}\right]$ donc f est concave sur cet intervalle.

f' est croissante sur $\left[\frac{1}{4} ; +\infty\right[$ donc f est convexe sur cet intervalle.

15. $f(x) = xe^{-x}$ donc $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$ et $f''(x) = -e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$.

Or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x et $x-2 \geq 0$ ssi $x \geq 2$.

Donc $f''(x) \geq 0$ ssi $x \geq 2$ et $f''(x) \leq 0$ ssi $x \leq 2$.

Donc f est convexe sur $[2 ; +\infty[$ et f est concave sur $]-\infty ; 2]$.

$$\text{16. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3e^{x+2} \text{ et } f''(x) = \frac{-\sqrt{x}}{4x^2} - 3e^{x+2} \leq 0$$

donc f est concave sur $\mathbb{R}_+$.

17. Graphiquement, la courbe présente un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0,7$.

18. Graphiquement, la courbe présente un point d'inflexion au point de coordonnées $(-2 ; 1)$.

19. $f(x) = (x+1)e^{-x}$ donc

$$f'(x) = e^{-x} + (x+1)(-e^{-x}) = (1-x-1)e^{-x} = -xe^{-x} \text{ et}$$

$$f''(x) = -1e^{-x} + (xe^{-x}) = e^x(x-1)$$

Or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x donc f'' change de signe pour $x = 1$. Donc le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées $(1 ; f(1))$ c'est-à-dire $(1 ; 2e^{-1})$.

$$\text{20. } f(x) = \frac{e^x}{x} \text{ donc } f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2} \text{ et } f''(x) = \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$$

or $e^{-x}(x^2-2x+2) > 0$ pour tout réel x donc f'' a le même signe que x . Elle changerait de signe pour $x = 0$ mais n'est pas définie en 0. Donc il n'y a pas de point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.

$$\text{21. } f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} e^{3\sqrt{x}} > 0$$

x	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+
Variations de g	1	$+\infty$

$$\text{22. } \frac{1}{1+x} > 0 \text{ ssi } 1+x > 0 \text{ ssi } x > -1 \text{ donc}$$

$$D_g =]-1 ; +\infty[\cap]0 ; +\infty[=]0 ; +\infty[$$

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} = \frac{-\sqrt{1+x}}{2(1+x)^2} < 0 \text{ donc } g \text{ est strictement}$$

décroissante.

x	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		-
Variations de g	1	0

23. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$; $f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$ et $f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$.

f'' change de signe pour $x = 1$ donc la croissance commence à ralentir au bout du premier mois c'est-à-dire à partir du 1^{er} février 2020.

24. $f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = e^x + \frac{2}{x^3} > 0$ sur $]0 ; +\infty[$.

Donc f' est strictement croissante. Elle ne diminue jamais.

Exercices

apprendre à démontrer

p. 152

Pour s'entraîner

Soit f une fonction deux fois dérivable, f' sa dérivée première et f'' sa dérivée seconde. On admet que f'' est négative sur un intervalle I .

Soit ϕ la fonction définie sur I par :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) \\ &= f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0).\end{aligned}$$

ϕ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant ϕ' sa dérivée, on obtient :

$$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$$

or f'' est négative sur I donc f' est décroissante sur I . D'où :

- si $x \geq x_0$ alors $f'(x) \leq f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leq 0$ donc ϕ est décroissante sur $[x_0 ; +\infty[$.
- si $x \leq x_0$ alors $f'(x) \geq f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geq 0$ donc ϕ est croissante sur $]-\infty ; x_0]$.

Donc ϕ admet un maximum pour ϕ et ce maximum est égal à :

$$\phi(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0.$$

Donc, pour tout réel x de I , $\phi(x) \leq 0$ donc $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes.

Conclusion : si f'' est négative, alors la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes.

Exercices

calculs et automatismes

p. 153

25. Schéma de composition 1. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur : il est écrit e^{x^2+1} au lieu de e^{x^2+1} . L'erreur est corrigée sur les éditions suivantes.

Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 & \mapsto & e^{x^2 + 1} \end{array}$$

2. Schéma de composition de la fonction g

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} & w & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + 2 & \mapsto & \sqrt{x + 2} & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{x + 2}} \end{array}$$

26. Dérivée d'une fonction composée

$$f'(x) = -6x \sin(3x^2 + 1)$$

27. Dérivée d'une fonction composée

$$f'(x) = -\frac{7}{2(\sqrt{7x-1})^3} = -\frac{7}{2(7x-1)\sqrt{7x-1}}$$

28. Dérivée d'une fonction composée

$$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

29. Convexité

D'après le graphique, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont représentatives de fonctions convexes.

30. Somme de deux fonctions convexes

Vrai. Soit $h = f + g$ avec f et g deux fonctions convexes. Alors, pour tout réel x vérifiant les conditions de définition des trois fonctions : $h''(x) = f''(x) + g''(x) \geq 0$ donc h est aussi convexe.

31. Convexité

Vrai. Si f est convexe alors $f''(x) \geq 0$ donc $-f''(x) \leq 0$ donc $-f$ est concave.

32. Exemples de fonctions convexes et concaves

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, la fonction racine est concave sur $\mathbb{R}_+$.

33. Exemple de point d'inflexion

La fonction cube est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$, elle présente un point d'inflexion en l'origine du repère.

34. Cube

La fonction a pour dérivée $x \mapsto 3x^2$ et pour dérivée seconde $x \mapsto 6x$. Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$ (dérivée positive), convexe sur $\mathbb{R}_+$ (dérivée seconde positive), et concave sur $\mathbb{R}_-$ (dérivée seconde négative). Réponses a) et d).

35. Racine carrée

La fonction a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et pour dérivée seconde $x \mapsto -\frac{\sqrt{x}}{4x^2}$. Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée positive), et concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée seconde négative). Réponses a) et d).

36. Puissance

La fonction a pour dérivée $x \mapsto -10x^4$ et pour dérivée seconde $x \mapsto -40x^3$. Elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée négative), et concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée seconde négative). Réponses b) et d).

37. Point d'inflexion

La fonction a pour dérivée $x \mapsto 3(x-2)^2$ et pour dérivée seconde $x \mapsto 6(x-2)$. La dérivée seconde change de signe pour $x = 2$ donc admet un point d'inflexion d'abscisse 2. Réponse a).

38. Fonctions affines

Vrai. Les fonctions affines ont leurs dérivées secondes nulles, donc à la fois positives et négatives donc elles sont à la fois convexes et concaves.

39. Fonctions trigonométriques

a) Faux, la fonction cosinus est concave sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Vrai, la fonction sinus est concave sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Exercices d'application

p. 155-157

Étudier un schéma de composition

40. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R} & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 + 1 & \mapsto & \sqrt{x^2 + 1}. \end{array}$$

2. Comme $x^2 + 1 > 0$ et que la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ alors $D_f = \mathbb{R}$.

41. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R} & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} & \mapsto & \sqrt{\frac{1}{x}} \end{array}$$

Schéma de composition de la fonction f .

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_+ & u & \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_+ & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

2. $D_f = \mathbb{R}_+^*$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$.

42. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R} & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 - 8x + 15 & \mapsto & \sqrt{x^2 - 8x + 15} \end{array}$$

2. Comme $x^2 - 8x + 15 \geq 0$ ssi $x \in]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$ et que la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ alors $D_f =]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$.

43. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & -x + 3 & \mapsto & (-x + 3)^4 \end{array}$$

2. Comme $x \mapsto -x + 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que la fonction puissance est définie sur $\mathbb{R}$ alors $D_f = \mathbb{R}$.

44. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+ & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} & \mapsto & \frac{1}{e^x} \end{array}$$

2. Comme $x \rightarrow \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et que la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ alors $D_f = \mathbb{R}^*$.

45. 1. Schéma de composition de la fonction f

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \frac{e^x + 1}{x} & \mapsto & \sqrt{\frac{e^x + 1}{x}} \end{array}$$

2. Comme $\frac{e^x + 1}{x} > 0$ ssi $x > 0$ et que la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ alors $D_f = \mathbb{R}_+$.

Déterminer l'image d'un nombre par une fonction composée

46. $g \circ f(1) = g(f(1)) = g(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$$f \circ g(3) = f(g(3)) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

47. $g \circ f(-2) = g(e^{-2}) = \{e^{-2}\}^2 = e^{-4}$

$f \circ g(-1) = f((-1)^2) = f(1) = e^1 = e$

48. 1. $f(1) = \frac{1}{4}$

2. $g(1) = 4$

3. Mettre x ou $\sqrt{x}$ à la place du $x + 3$.

49. $f \circ g(1) = f(g(1)) = f(1) = -2$

$g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(4) = 2$

$f \circ g(-1)$ n'existe pas car g n'est pas définie en -1 .

$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(-2)$ n'existe pas car g n'est pas définie en -2 .

50. $g \circ f(2) = g(f(2)) = g(4) = 2$

$f \circ g(2) = f(g(2)) = f(1) = 1$

51. $g = \exp(f)$. La fonction exp est :

i) définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_g = D_f$.

ii) strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc les variations de g seront celles de f .

iii) strictement positive donc g est strictement positive.

a) $]-\infty ; 3]$ réponse d).

b) $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ donc $g'(1) = f'(1)e^{f(1)} = 2e^0 = 2$, réponse a).

c) g est strictement positive donc réponse c).

52. 1. $\cos(f(0)) = \cos(\pi) = -1$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} = +\infty$.

Calculer la dérivée d'une fonction composée

53. $f'(x) = -e^{-x+2}$

54. $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

55. $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}}$

56. $f'(x) = -e^{-x}$

57. $f'(x) = -4\sin(4x)$

58. $f'(x) = 3[-4e^{-x}][4e^{-x} + 1]^2 = -12e^{-x}[4e^{-x} + 1]^2$

59. 1. $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f^{(3)}(x) = \cos(x)$ et $f^{(4)}(x) = \sin(x)$.

2. $f^{(4)}(x) = f(x)$

3. $f^{(1789)}(x) = f^{(4 \times 447 + 1)}(x) = f^{(1)}(x) = f'(x) = \cos(x)$

60. $f_n'(x) = n[-\sin(x)](\cos(x))^{n-1} = -n \sin(x)(\cos(x))^{n-1}$

Étudier une fonction composée et dresser son tableau de variations

61. 1. Schéma de composition de la fonction f .

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & u & \mathbb{R} & v & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 1 & \mapsto & \sqrt{x^3 - 1}. \end{array}$$

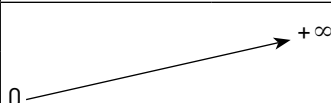
2. f existe ssi $x^3 - 1 \geq 0$ ssi $x^3 \geq 1$ ssi $x \geq 1$

donc $D_f = [1 ; +\infty[$.

3. $g'(x) = 3x^2 > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Voici son tableau de variations.

x	1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	
Variations de g		

4. On en déduit le tableau de variations de f .

x	1	$+\infty$
Variations de f		

62. 1. Schéma de composition de la fonction f .

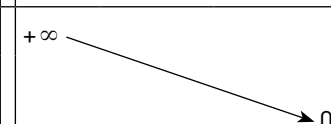
$$\mathbb{R} \quad u \quad \mathbb{R} \quad v \quad \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{1+x} \mapsto \sqrt{\frac{1}{1+x}}$$

2. La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ et

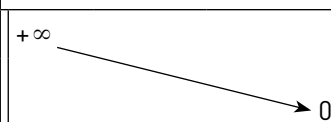
$$\frac{1}{1+x} \geq 0 \text{ ssi } 1+x > 0 \text{ ssi } x > -1 \text{ donc } D_g =]-1; +\infty[.$$

$$3. g'(x) = \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}} = \frac{-\sqrt{1+x}}{2(1+x)^2} < 0$$

donc g est strictement décroissante.

x	-1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	
Variations de g		

4. La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc f est strictement décroissante.

x	-1	$+\infty$
Variations de f		

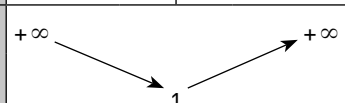
63. [ERRATUM] la première édition présente une erreur. Il est écrit e^{x^2-2x} , alors qu'il faut utiliser l'expression e^{x^2-2x} . Cette erreur est corrigée sur les éditions suivantes.

1. Schéma de composition de la fonction f

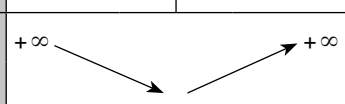
$$\mathbb{R} \quad u \quad \mathbb{R} \quad v \quad \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - 2x \mapsto e^{x^2-2x}$$

2. $x \mapsto x^2 - 2x$ et $x \mapsto e^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$.

3. $g'(x) = 2x - 2$ donc $g'(x) \geq 0$ ssi $x \geq 1$ donc g est croissante sur $[1; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 1]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-		+
Variations de g			

4. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

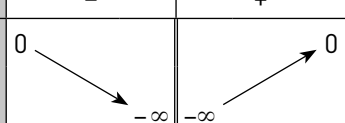
x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-		+
Variations de f			

64. 1. Schéma de composition de la fonction f

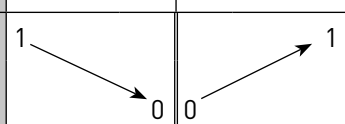
$$\mathbb{R} \quad u \quad \mathbb{R} \quad v \quad \mathbb{R}$$
$$x \mapsto -\frac{1}{x^2} \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$$

2. $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$.

3. $g'(x) = \frac{2}{x^3}$ donc $g'(x) > 0$ ssi $x > 0$ donc g est croissante sur $]0; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; 0[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-		+
Variations de g			

4. La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-		+
Variations de f			

Lire les intervalles où f est convexe ou concave

65. f est concave sur $[-2 ; -1]$ et convexe sur $[-1 ; +\infty[$.

66. f est convexe sur $[-3 ; 0]$ et concave sur $[0 ; 2]$.

67. g est concave sur $[-6 ; -3]$ et convexe sur $[-3 ; 0]$.

68. h est concave sur $[-4 ; 1]$ et convexe sur $[1 ; 4]$.

Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction

69. $x \mapsto e^x$ est convexe donc sa courbe au-dessus de ses tangentes. La tangente à sa courbe au point d'abscisse 0 est

$$\mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1x + 1 = x + 1$$

donc $e^x \geq 1 + x$ pour tout réel x .

70. $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave donc sa courbe en-dessous de ses tangentes. La tangente à sa courbe au point d'abscisse 1 est

$$\mathcal{T}_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{1}{2}(x - 1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + 1)$$

donc $\sqrt{x} \leq \frac{1}{2}(x + 1)$ pour tout réel x positif.

71. 1. $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave donc $x \mapsto -\sqrt{x}$ est convexe.

$$2. \mathcal{T}_9 : y = f(9)(x - 9) + f(9) = \frac{1}{6}(x - 9) + 3 = \frac{1}{6}x + 1,5$$

3. Donc $-\sqrt{x} \geq \frac{1}{6}x + 1,5$ pour tout réel x positif.

Étudier la convexité de f à partir des variations de f'

72. f' est croissante sur $]-\infty ; 6]$ et f' est décroissante sur $[6 ; +\infty[$ donc f est convexe sur $]-\infty ; 6]$ et f est concave sur $[6 ; +\infty[$.

73. 1. f' est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et f' est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. f est concave sur $]-\infty ; 0]$ et f est convexe sur $[0 ; +\infty[$.

74. f est concave sur $\left] -\infty ; 2 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \cup \left[2 + \frac{1}{\sqrt{3}} ; +\infty \right[$ et f est convexe sur $\left[2 - \frac{1}{\sqrt{3}} ; 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$.

$$75. 1. f'(x) = -24x^2 + 480x - 2400$$

$$= -24(x^2 - 20x + 100) = -24(x - 10)^2$$

2. $x \mapsto (x - 10)^2$ est décroissante sur $]-\infty ; 10]$ et croissante sur $[10 ; +\infty[$. Donc f' est croissante sur $]-\infty ; 10]$ et décroissante sur $[10 ; +\infty[$.

3. f est convexe sur $]-\infty ; 10]$ et concave sur $[10 ; +\infty[$.

Étudier la convexité de f à partir du signe de f''

$$76. 1. f'(x) = 3x^2 + 12x \text{ et } f''(x) = 6x + 12.$$

$$2. f''(x) \geq 0 \text{ ssi } 6x + 12 \geq 0 \text{ ssi } x \geq -\frac{12}{6} \text{ ssi } x \geq -2.$$

Donc f est convexe sur $[-2 ; +\infty[$.

$$77. 1. f(x) = \frac{-(x+1) - (3-x)}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(x+1)^2} \text{ et}$$

$$f''(x) = \frac{(-4)(-2)}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x+1)^3}.$$

$$2. f''(x) \geq 0 \text{ ssi } x > -1.$$

Donc f est convexe sur $]-1 ; +\infty[$.

$$78. 1. f'(x) = 5 - \frac{1}{x^2} \text{ et } f''(x) = 0 - \frac{-2}{x^3} = \frac{2}{x^3}.$$

Donc $f''(x) \geq 0$ ssi $x > 0$.

2. Donc f est convexe sur $]0 ; +\infty[$.

79. 1. $f''(x) \leq 0$ ssi $x \in [-4 ; 4]$ et $f''(x) \geq 0$ ssi $x \in]-\infty ; -4] \cup [4 ; +\infty[$.

2. Donc f est convexe sur $]-\infty ; -4] \cup [4 ; +\infty[$ et concave sur $[-4 ; 4]$.

$$80. 1. a) f'(x) = \frac{-9\sqrt{x} + 6}{2} \text{ et } f''(x) = \frac{-9}{4\sqrt{x}}.$$

$$b) f''(x) = \frac{-9}{4\sqrt{x}} < 0$$

2. a) $f''(x) < 0$ donc f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sa courbe représentative est située au dessus de ses sécantes et en-dessous de ses tangentes.

Lire les points d'inflexion

81. Graphiquement, les points d'inflexion sont ceux d'abscisses -2 et 2 .

82. $\mathcal{C}_f$ a pour points d'inflexion les points d'abscisses -1 et 1 .

Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'inflexion

83.1. Tableau de signes de $f''(x)$.

x	$-\infty$	4	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$+$	0	$-$

2. Le point d'inflexion de la courbe représentative de f a pour abscisse 4 et pour ordonnée

$$6 + (6 - 4)e^{4-5} = 6 + 2e^{-1}.$$

84. 1. $f'(x) = 7(-x + 1)e^{-x}$

$f'(x) \geq 0$ ssi $-x + 1 \geq 0$ ssi $1 \geq x$. Donc f est croissante sur $]-\infty; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

2. a) $f''(x) = 7(x - 2)e^{-x}$

b) $f''(x) \geq 0$ ssi $x - 2 \geq 0$ ssi $x \geq 2$. Donc f est concave sur $]-\infty; 2]$ et convexe sur $[2; +\infty[$. De plus $f(2) = \frac{14}{e^2}$.

Le point d'inflexion a pour coordonnées $\left(2; \frac{14}{e^2}\right)$.

85. 1. $f'(x) = (x + 1)^2 e^x$. $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) $f''(x) = (x + 1)(x + 3)e^x$.

b) $f''(x) \geq 0$ ssi $x \in]-\infty; -3] \cup [-1; +\infty[$ et $f''(x) \leq 0$ ssi $x \in [-3; -1]$.

$$\text{De plus } f(-3) = \frac{10}{e^3} \text{ et } f(-1) = \frac{2}{e}.$$

Les points d'inflexion de la courbe ont pour coordonnées $\left(-3; \frac{10}{e^3}\right)$ et $\left(-1; \frac{2}{e}\right)$.

$$\mathbf{86. 1.} f'(x) = -\left(x + \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)\left(x + \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)e^{-x}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ ssi } x \in \left[-\frac{5 - \sqrt{21}}{2}; -\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right] \text{ donc } f \text{ est}$$

croissante sur $\left[-\frac{5 - \sqrt{21}}{2}; -\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right]$ et décroissante sinon.

2. a) $f''(x) = (x - 1)(x + 4)e^{-x}$

b) $f''(x) \geq 0$ ssi $x \in]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$ et $f''(x) \leq 0$ ssi $x \in [-4; 1]$.

$$\text{De plus } f(-4) = -4e^4 \text{ et } f(1) = \frac{16}{e}.$$

Les points d'inflexion de la courbe ont pour coordonnées $(-4; -4e^4)$ et $\left(1; \frac{16}{e}\right)$.

Exercices d'entraînement p. 158-159

Étude de fonctions composées

87. 1. a) $x^2 - 7x + 10 \geq 0$ ssi $x \in]-\infty; 2] \cup [5; +\infty[$. (Calculer le discriminant Δ pour trouver les racines puis le signe du polynôme en fonction de a).

b) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc : $D_g =]-\infty; 2] \cup [5; +\infty[$.

2. a) Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - 7x + 10 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$.

$$\mathbf{b)} g'(x) = \frac{2x - 7}{2\sqrt{x^2 - 7x + 10}}.$$

Donc $g'(x) \geq 0$ ssi $x \geq \frac{7}{2}$ donc g est croissante sur $\left[\frac{7}{2}; +\infty\right[$ et décroissante sur $]-\infty; \frac{7}{2}]$.

c) Tableaux de variations des fonctions f et g .

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ ↘ 0		0 ↗ $+\infty$	

x	$-\infty$	2	5	$+\infty$
Variations de g	$+\infty$ ↘ 0		0 ↗ $+\infty$	

88.1. a) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$ ssi $x \in \mathbb{R}$.

b) La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$ donc il faut que $(x+1)^2$ soit strictement positif, autrement dit que x soit différent de -1 . $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. a) Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x+1)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1)^2 = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty.$$

$$b) g'(x) = \frac{-\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}{\left| \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \right|} = -\frac{f'(x)}{2|f(x)|\sqrt{f(x)}} = -\frac{2x+2}{2|f(x)|\sqrt{f(x)}}.$$

Donc $g'(x) \geq 0$ ssi $x \geq -2x - 2 \geq 0$ ssi $x \leq -1$ donc g est décroissante sur $]-1; +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; -1[$.

c) Tableau de variations de la fonction g .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	-	
Variations de g			

89. 1. Les fonctions $x \mapsto x^3 - 1$ et $x \mapsto e^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc $D_g = \mathbb{R}$.

2. a) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0.$$

b) $g'(x) = f'(x)e^{f(x)} = 3x^2e^{x^3-1} \geq 0$. Donc g est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Tableaux de variations des fonctions f et g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	
Variations de f			

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	
Variations de g			

90. 1. $f'(x) = -k\sin(kx)$, $f''(x) = -k^2\cos(kx)$,
 $f^{(3)}(x) = -k^2(-k)\sin(kx) = k^3\sin(kx)$

$$\text{et } f^{(4)}(x) = k^4\cos(kx).$$

$$2. f^{(4)}(x) = k^4f(x)$$

$$3. f^{(2020)}(x) = f^{(4 \times 505)}(x) = (k^4)^{505} f(x) = k^{2020} f(x)$$

Étudier la convexité d'une fonction pour résoudre un problème

91. f est concave sur $[0; \pi]$ et convexe sinon. g est concave sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et convexe sinon.

92. 1. f est convexe sur $[4; 10]$ et concave sur $[-1,8; 4]$.

2. Le point d'inflexion a pour abscisse 4.

$$93. 1. f'(x) = 1 \times e^{0,4x} + (x - 2,5) \times 0,4e^{0,4x} \\ = 0,4 \left(\frac{1}{0,4} + x - 2,5 \right) e^{0,4x} = 0,4xe^{0,4x}$$

$$2. f''(x) = 0,4e^{0,4x} + 0,4x \times 0,4e^{0,4x} \\ = (0,4 + 0,16x)e^{0,4x} = \frac{2}{25}(2x + 5)e^{0,4x}$$

3. $f''(x) \geq 0$ ssi $2x + 5 \geq 0$ ssi $x \geq -\frac{5}{2}$. Donc f est convexe sur $\left[-\frac{5}{2}; 7\right]$ et concave sur $\left[-5; -\frac{5}{2}\right]$.

$$94. g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \text{ et } g''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

or $g''(x) \leq 0$ ssi $x + 1 \geq 0$ ssi $x \geq -1$. Donc g est concave sur $[0; +\infty[$.

$$95. 1. f'(x) = \frac{(e^x - 6)(2e^x - 3)}{(e^x - 3)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{3e^x(e^x + 3)}{(e^x - 3)^3}.$$

Or, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln(3)\}$, $3e^x(e^x + 3) > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $(e^x - 3)^3$ c'est-à-dire celui de $(e^x - 3)$. Donc $f''(x) \geq 0$ ssi $e^x - 3 \geq 0$ ssi $e^x \geq 3$ ssi $x \geq \ln(3)$.

2. $f''(x)$ changerait de signe pour $x = \ln(3)$. Or $\ln(3)$ ne fait pas partie du domaine de définition de f ni de celui de f'' . Il n'y a donc pas de point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.

$$96. 1. f'(x) = (-5x + 5)e^{-x} \text{ et}$$

$$f''(x) = (5x - 10)e^{-x} = 5(x - 2)e^{-x}$$

2. $f''(x) \leq 0$ ssi $x - 2 \leq 0$ ssi $x \leq 2$. Donc f est concave sur $]-\infty; 2]$.

97. 1. $f'(x) = 1 + (16x + 52)e^{-0,5x} + (8x^2 + 52x + 88)(-0,5)e^{-0,5x}$
 $= e^{-0,5x}[-4x^2 - 10x + 8] + 1$

et $f''(x) = e^{-0,5x}[-0,5](-4x^2 - 10x + 8) + e^{-0,5x}[-8x - 10]$
 $= e^{-0,5x}[2x^2 - 3x - 14] = (x + 2)(2x - 7)e^{-0,5x}$.

2. $f''(x) \geq 0$ ssi $x \in [-4 ; -2] \cup [3,5 ; 10]$. Donc f est convexe sur $[-4 ; -2] \cup [3,5 ; 10]$ et concave sur $[-2 ; 3,5]$.

98. 1. $f'(x) = 2(x + 1)e^{-x}$

et $f''(x) = 2(1)e^{-x} + 2(x + 1)(-1)e^{-x} = -2xe^{-x}$.

2. $f''(x) \geq 0$ ssi $x \leq 0$. De plus $f(0) = -4$.

Donc le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées $(0 ; -4)$.

99. 1. $g'(x) = -x(x - 2)e^{-x}$ et $g''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$. Il faut utiliser $(u \times v)' = u'v + uv'$ à chaque fois.

2. Comme $e^{-x} > 0$ pour tout réel x , le signe de $g''(x)$ est celui de $x^2 - 4x + 2$.

Or $x^2 - 4x + 2 = (x - (-\sqrt{2} + 2))(x - (\sqrt{2} + 2))$.

Donc $x^2 - 4x + 2 \geq 0$ ssi $x \in]-\infty ; -\sqrt{2} + 2] \cup [\sqrt{2} + 2 ; +\infty[$

et $x^2 - 4x + 2 \leq 0$ ssi $x \in [-\sqrt{2} + 2 ; \sqrt{2} + 2]$. Donc

g est convexe sur $]-\infty ; -\sqrt{2} + 2] \cup [\sqrt{2} + 2 ; +\infty[$ et

g est concave sur $[-\sqrt{2} + 2 ; \sqrt{2} + 2]$.

De plus $g(-\sqrt{2} + 2) = (-4\sqrt{2} + 6)e^{\sqrt{2}-2}$ et

$g(\sqrt{2} + 2) = (4\sqrt{2} + 6)e^{-\sqrt{2}-2}$.

Donc les points d'inflexion de $\mathcal{C}_g$ ont pour coordonnées $(-\sqrt{2} + 2 ; (-4\sqrt{2} + 6)e^{\sqrt{2}-2})$ et $(\sqrt{2} + 2 ; (4\sqrt{2} + 6)e^{-\sqrt{2}-2})$

100. 1. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur. Il est écrit $h''(x) = -2\sin(x)e^{-x}$, mais il faut utiliser $h''(x) = -2\sin(x)e^x$. Cette erreur est corrigée dans les éditions suivantes.

$h'(x) = -\sin(x)e^x + \cos(x)e^x$

et $h''(x) = -\cos(x)e^x - \sin(x)e^x - \sin(x)e^x + \cos(x)e^x$
 $= -2\sin(x)e^x$.

2. $h''(x)$ change de signe ssi $\sin(x)$ change de signe donc pour $x = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc les coordonnées des points d'inflexion de $\mathcal{C}_h$ sont $(k\pi ; (-1)^k e^{k\pi})$.

101. 1. $f''(x) = x(x - 7)(x + 2)e^x$.

2. $f(0) = -26$, $f(7) = -54e^7$ et $f(-2) = -\frac{126}{e^2}$. Les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ ont pour coordonnées $(0 ; -26)$, $(7 ; -54e^7)$ et $(-2 ; -\frac{126}{e^2})$.

102. 1. $g'(x) = \frac{2\sqrt{x} + 3x}{x}$ et $g''(x) = \frac{-\sqrt{x}}{x^2} < 0$.

2. Comme $g''(x)$ ne change jamais de signe, $\mathcal{C}_g$ n'admet pas de point d'inflexion.

103. f' est croissante sur $]-3 ; -2] \cup [0 ; 1]$ donc f est convexe sur cet intervalle. f' est décroissante sur $]-2 ; 0]$ donc f est concave sur cet intervalle.

104. f'' est positive sur $]-\infty ; -7] \cup [-1 ; 3]$ donc f est convexe sur cet intervalle. f'' est négative sur $[-7 ; -1] \cup [3 ; +\infty[$ donc f est concave sur cet intervalle.

105. $f''(x) = m^2 e^{mx} \geq 0$ donc f est convexe quelque soit la valeur de m .

106. 1. $f''(x) = e^{-x+1} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses sécantes.

107. 1. $g''(x) = \frac{-8\sqrt{x} - x^2}{4x^3\sqrt{x}} \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc g est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. La courbe représentative de g est au-dessus de ses sécantes et en dessous de ses tangentes.

108. Après présentation d'une courte biographie de Newton et de Leibniz, discussion concernant la paternité du calcul infinitésimal (regroupant calcul différentiel et calcul intégral) et ses conséquences sur les mathématiques anglais (division entre les mathématiciens partisans de Newton avec ceux du reste de l'Europe).

109. Ensemble convexe : objet géométrique tel que, pour tous points A et B de cet ensemble, le segment [AB] est aussi situé en intégralité dans cet ensemble.

Epigraphe : portion du plan située au-dessus du graphe d'une fonction. Dans le cas d'une fonction convexe, cet ensemble est convexe.

Hypographe : portion du plan située en dessous du graphe d'une fonction. Dans le cas d'une fonction concave, cet ensemble est convexe.

110. Thèmes pouvant être abordés (liste non exhaustive) :

- aspect graphique : courbes, sécantes, tangentes
- aspect algébrique : croissance de la dérivée, positivité de la dérivée seconde
- vitesse de production
- coût moyen
- accélération de croissance.

Exercices bilan

p. 160

111. Étude d'une fonction composée

1. La fonction $x \mapsto \frac{20}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction $x \mapsto 7e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc $D_f = \mathbb{R}^*$.

$$2. a) f'(x) = 7 \left(-\frac{20}{x^2} \right) e^{\frac{20}{x}} = -\frac{140}{x^2} e^{\frac{20}{x}}.$$

b) $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante.

$$3. a) f''(x) = \frac{280(x+10)}{x^3} e^{\frac{20}{x}}.$$

b) f'' change de signe pour $x = -10$. $f''(x) \geq 0$ ssi $x \geq -10$ donc f est convexe sur $[-10; 0[\cup]0; +\infty[$ et concave sur $]-\infty; -10]$.

```
c) import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.linspace(1, 30)
y=7*np.exp(20/x)
plt.ylim(0, 1000)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

112. Composition de fonctions et limites

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $f'(2) = 0$.

2. a) $f'(x) = -x(x-2)e^{-x+1}$ $f'(x) \geq 0$ ssi $x \in [0; 2]$. Donc f est croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$.

x	0	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+		-
Variations de f	0	$\frac{4}{e}$	0

$$c) \mathcal{T}_4 : y = f'(4)(x-4) + f(4)$$

$$\mathcal{T}_4 : y = -8e^{-3}(x-4) + 16e^{-3}$$

$$\mathcal{T}_4 : y = -8e^{-3x} + 48e^{-3}$$

$$3. a) f''(x) = (x - \sqrt{2} - 2)(x + \sqrt{2} - 2)e^{-x+1}$$

$$f''(x) \geq 0 \text{ ssi } x \in [0; -\sqrt{2} + 2] \cup [\sqrt{2} + 2; +\infty[.$$

Donc f est convexe sur $[0; -\sqrt{2} + 2] \cup [\sqrt{2} + 2; +\infty[$

et concave sur $[-\sqrt{2} + 2; \sqrt{2} + 2]$.

b) $f''(x)$ change de signe pour $x \in \{-\sqrt{2} + 2; \sqrt{2} + 2\}$ donc les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sont ceux d'abscisses $-\sqrt{2} + 2$ et $\sqrt{2} + 2$.

$$4. g'(x) = -f'(x)e^{-f(x)} = x(x-2)e^{-x+1}e^{x^2e^{-x+1}}.$$

$g'(x) \leq 0$ ssi $x \in [0; 2]$. Donc g est décroissante sur $[0; 2]$ et croissante sur $[2; +\infty[$.

x	0	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-		+
Variations de g	1	$\frac{1}{\frac{4}{e^e}}$	1

$$5. h(x) = \sqrt{f(x)} = xe^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} \text{ et } h'(x) = \frac{1}{2}(-x+2)e^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}.$$

$$h'(x) \geq 0 \text{ ssi } -x+2 \geq 0 \text{ ssi } 2 \geq x.$$

x	0	2	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+		-
Variations de h	0	$2e^{-\frac{1}{2}}$	0

113. Domaine de définition

1. $x^3 + 8 \geq 0$ ssi $x^3 \geq -8$ ssi $x \geq -2$ donc $D_f = [-2; +\infty[$.

2. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 8 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty.$$

$$\text{De plus } f(-2) = \sqrt{(-2)^3 + 8} = 0.$$

$$3. f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 8}} \geq 0. \text{ Donc } f'(x) \geq 0 \text{ sur } [-2; +\infty[\text{ et } f \text{ est croissante sur } [-2; +\infty[.$$

$$4. a) f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 8}} \geq 0. \text{ Donc } f'(x) \geq 0 \text{ sur } [-2; +\infty[$$

et f est croissante sur $[-2; +\infty[$.

$$b) f''(x) = \frac{3(x^3 + 32)x\sqrt{x^3 + 8}}{4(x^3 + 8)^2}$$

c) $f''(x)$ change de signe pour $x = 0$

($x^3 + 32 > 0$ car par ensemble de définition, nous avons déjà $x^3 + 8 \geq 0$).

Or $f(0) = 2$ donc le point d'inflexion de la courbe représentative de f a pour coordonnées $(0; 2)$.

114. Exponentielle de fonctions

$$1. a) f'(0) = 3, f'(1) = 0 \text{ et } f'(3) = 0.$$

b) f semble concave sur $]-1; 2]$ et convexe sur $[2; +\infty[$.

c) f semble avoir pour point d'inflexion le point de coordonnées $(2; 0,6)$.

$$2. a) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0.$$

b) La fonction $\exp$ étant une fonction croissante, les variations de g sont celles de f .

x	-1	1	3	$+\infty$
Variations de g	0	e^2	$\frac{1}{e}$	$+\infty$

$$g'(1) = f'(1)e^{f(1)} = 0 \text{ et } g'(0) = f'(0)e^{f(0)} = 3e^1 = 3e.$$

115. Convexité d'une fonction

$$1. a) f'(x) = 1e^{x^2-1} + x(2x)e^{x^2-1} = (1 + 2x^2)e^{x^2-1}$$

b) $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$2. a) f'(x) = 4xe^{x^2-1} + (1 + 2x^2)(2x)e^{x^2-1} = (6x + 4x^3)e^{x^2-1} = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$$

b) $f''(x) \geq 0$ ssi $x \geq 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.

$$3. a) h(x) = x - f(x) = x - xe^{x^2-1} = x(1 - e^{x^2-1})$$

b) Sur $[-1; 1]$, $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ donc le signe de $h(x)$ est celui de x . Donc $h(x) \geq 0$ ssi $x \geq 0$. Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de D ssi $x \geq f(x)$ ssi $x \geq 0$. Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de D sur $[0; 1]$ et au-dessus de D sur $[-1; 0]$.

116. Tangente

$$1. f'(x) = 5x^4 + \frac{100}{3}x^3 + 20x^2 - 160x + 8 \text{ et } f''(x) = 20x^3 + 100x^2 + 40x - 160.$$

$$2. 20(x-1)(x+2)(x+4) = (20x-20)(x^2+6x+8) = 20x^3+100x^2+40x-160 = f''(x)$$

3. $f''(x) \geq 0$ ssi $x \in [-4; -2] \cup [1; +\infty[$ et $f''(x) \leq 0$ ssi $x \in]-\infty; -4] \cup [-2; 1]$.

$$\text{De plus } f(-4) = -\frac{1885}{3}, f(-2) = -287 \text{ et } f(1) = -55.$$

Donc les points d'inflexion ont pour coordonnées $\left(-4; -\frac{1885}{3}\right)$, $(-2; -287)$ et $(1; -55)$.

$$4. T_{-1}: y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$T_{-1}: y = \frac{479}{3}(x+1) - \frac{259}{3}$$

$$T_{-1}: y = \frac{479}{3}x + \frac{220}{3}$$

Préparer le BAC Je me teste

p. 162

117. B f est décroissante sur $]2; +\infty[$ et $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$118. B g(2) = e^{f(2)} = e^4.$$

$$119. D g'(x) = f'(x)e^{f(x)} \text{ donc } g'(-1) = f'(-1)e^{f(-1)} = 0e^{-3} = 0.$$

120. A f est décroissante sur $]2; +\infty[$, $x \mapsto x+5$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$121. C h'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+5}}$$

$$122. A f'(x) = 0,2xe^{0,2x} \text{ et } f''(x) = \frac{x+5}{25}e^{0,2x}.$$

123. D Comme $f''(x) \geq 0$ ssi $x \geq -5$ alors f' est croissante sur $[-5 ; 10]$ et décroissante sur $[-10 ; -5]$.

124. D Comme $f''(x) \geq 0$ ssi $x \geq -5$ alors f est convexe sur $[-5 ; 10]$ et concave sur $[-10 ; -5]$.

125. A et D f est convexe sur $[0 ; 5]$.

126. D f est convexe sur $[-5 ; 10]$ et concave sur $[-10 ; -5]$ donc admet un point d'inflexion pour $x = -5$.

Préparer le BAC Je révise

p. 163

127. Image d'un nombre

$$1. g \circ u(-1) = g(u(-1)) = g(2) = -1$$

$$\text{et } u \circ g(2) = u(g(2)) = u(-1) = 2.$$

2. Sur $]-\infty ; -1]$, la fonction u est décroissante et cet intervalle a pour image l'intervalle $[2 ; 4]$. Or sur $[2 ; 4]$, la fonction g est croissante. Donc la fonction $g \circ u$ est décroissante sur $]-\infty ; -1]$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(u(x)) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} g(X) = +\infty$ et on conclut par théorème sur les limites de composée.

128. Étudier une fonction trigonométrique

1. Les fonctions $x \mapsto mx$ et $x \mapsto \cos(x) + x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Donc $D_{g_m} = \mathbb{R}$.

$$2. g_m(1) = \cos(m) + m \text{ et } g_m(-1) = \cos(-m) - m = \cos(m) - m$$

Donc, pour $m > 0$; $g_m(-1) \neq g_m(1)$ et,

pour $m \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $g_m(-1) \neq -g_m(1)$. Donc la fonction g_m n'est ni paire ni impaire.

La fonction $x \mapsto \cos(mx)$ est périodique de période $\frac{2\pi}{m}$ mais la fonction $x \mapsto mx$ n'est pas périodique.

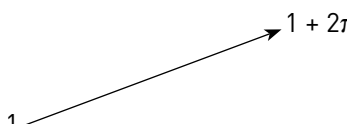
Donc g_m n'est pas périodique. On ne peut restreindre l'intervalle d'étude de cette fonction.

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \cos(mx) + mx = \cos(0) + 0 = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{m}} \cos(x) + mx = \cos(2\pi) + 2\pi = 1 + 2\pi.$$

$$g'_m(x) = -m \sin(mx) + m = m(1 - \sin(mx)) \geq 0$$

Donc g_m est croissante sur $\left[0 ; \frac{2\pi}{m}\right]$.

x	0	$\frac{2\pi}{m}$
Variations de g_m		

129. Points d'inflexion

$$1. f(x) = (-5x^2 + 5)e^x$$

$$\text{donc } f'(x) = (-10x)e^x + (-5x^2 + 5)e^x = (-5x^2 - 10x + 5)e^x.$$

$$\text{Par suite, } f''(x) = (-10x - 10)e^x + (-5x^2 - 10x + 5)e^x = -(5x^2 + 20x + 5)e^x.$$

$$2. \Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times 5 \times 5 = 400 - 100 = 300 > 0$$

$$\text{d'où } x_1 = -2 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = -2 + \sqrt{3}.$$

Donc $5x^2 + 20x + 5 \geq 0$ ssi

$$x \in]-\infty ; -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3} ; +\infty[.$$

Or $-e^x < 0$ pour tout réel x . Donc $f''(x) \leq 0$ ssi

$$x \in]-\infty ; -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3} ; +\infty[\text{ et } f''(x) \geq 0 \text{ ssi}$$

$$x \in]-2 - \sqrt{3} ; -2 + \sqrt{3}[.$$

3. Les abscisses des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sont donc : $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.

4. f est concave sur $]-\infty ; -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3} ; +\infty[$ et convexe sur $[-2 - \sqrt{3} ; -2 + \sqrt{3}]$.

130. Étudier une fonction composée

1. $-x + 1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$ et la fonction $x \mapsto xe^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$2. \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x + 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{-x+1}} = e^0 = 1 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty. \text{ Un raisonnement analogue en } -\infty \text{ conduit à } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 1) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{-x + 1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{-x+1}} = 0 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0.$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{-x+1} = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty. \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{-x+1} = +\infty \end{cases}$$

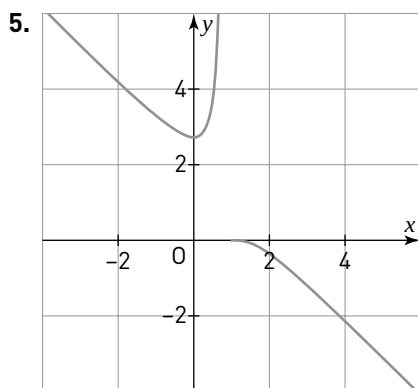
3. $f'(x) = -\frac{x}{x-1} e^{\frac{1}{-x+1}}$. Or $-e^{\frac{1}{-x+1}} < 0$ pour tout réel de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Donc le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $\frac{x}{x-1}$. Or $\frac{x}{x-1} > 0$ ssi $x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ et négatif sinon. Donc f est décroissante sur $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$ et croissante sur $]0; 1[$.

La fonction possède deux extrema locaux à savoir :

- un minimum local pour $x = 0$: $A(0; e)$.
- un maximum local pour $x = 1$: $B(1; 0)$.

4. On obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	e	0	$-\infty$



131. Étudier la convexité d'une fonction

$$\begin{aligned} 1. f'(x) &= 0 + 14e^{\frac{x}{5}} + (14x + 42) \left(-\frac{1}{5}\right) e^{\frac{x}{5}} \\ &= \left(14 - 14x - \frac{42}{5}\right) e^{\frac{x}{5}} = \frac{1}{5}(-14x + 28) e^{\frac{x}{5}}. \end{aligned}$$

2. $\frac{1}{5}e^{\frac{x}{5}} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend seulement de celui de $-14x + 28$. $-14x + 28 \geq 0$ ssi

$$28 \geq 14x \text{ ssi } \frac{28}{14} \geq x \text{ ssi } 2 \geq x.$$

x	0	2	60
Variations de f	112	$70 + 70e^{-9/4}$	$70 + 882e^{-12}$

3. a) $f''(7) = 0$. Le point A est un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.

b) $\frac{14}{25}e^{\frac{x}{5}} > 0$ pour tout réel x donc

$f''(x) \geq 0$ ssi $x - 7 \geq 0$ ssi $x \geq 7$. Donc f est convexe sur $[7; 60]$ et concave sur $[0; 7]$.

c) L'abscisse pour laquelle la dérivée admet un extremum est 7 et correspond au point d'inflexion précédemment cité.

Exercices vers le supérieur p. 164-165

132. Courbe de Lorenz

$$\begin{aligned} 1. a) f'(x) &= \frac{3}{2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{3(x^2 + 2x + 1) - 2}{2(x+1)^2} \\ &= \frac{3x^2 + 6x + 1}{2(x+1)^2} = \frac{\left(x + \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)(3x + 3 - \sqrt{6})}{2(x+1)^2} \end{aligned}$$

b) $f'(x) \geq 0$ sur $[0; 1]$ donc f est croissante sur $[0; 1]$.

x	0	1
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f	0	1

$$f(0) = \frac{3}{2} \times 0 + \frac{1}{0+1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} c) x - f(x) &= x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1 \\ &= \frac{2x(x+1) - 3x(x+1) + 2(x+1)}{2(x+1)} \\ &= \frac{-x^2 + x}{2(x+1)} = \frac{-x(x-1)}{2(x+1)} \end{aligned}$$

Sur $[0; 1]$, $-x$ et $x-1$ sont négatifs, 2 et $x+1$ donc positifs donc $x - f(x) \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq f(x)$ sur $[0; 1]$.

2. [ERRATUM] la première édition du manuel comporte une erreur. Il est inscrit :

$$g(x) = e^x - (e - 2)x + 1.$$

Il faut utiliser l'expression :

$$g(x) = e^x - (e - 2)x - 1.$$

Cette erreur est corrigée dans les éditions suivantes du manuel.

a) $g'(x) = e^x - (e - 2) = e^x - e + 2$. Or pour $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ donc $e^x - e + 2 \geq 1 - e + 2 = 3 - e$. Or $3 - e \geq 0$ donc $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[0 ; 1]$.

b) $g(0) = e^0 - (e - 2) \times 0 - 1 = 0$

$g(1) = e^1 - (e - 2) \times 1 - 1 = e - e + 2 - 1 = 1$

c)

x	0	$\ln(e - 1)$	1
Signe de $h'(x)$	+	0	-
Variations de h	$ \begin{array}{c} \nearrow h(\ln(e - 1)) \searrow \\ 0 \qquad \qquad \qquad 0 \end{array} $		

$$\begin{aligned}
 h(\ln(e - 1)) &= \ln(e - 1) - e^{\ln(e-1)} + (e - 2) \ln(e - 1) + 1 \\
 &= (e - 1) \ln(e - 1) - (e - 1) + 1 \\
 &\approx 0,2
 \end{aligned}$$

Donc $h(x) \geq 0$ donc $x - g(x) \geq 0$ c'est-à-dire, pour tout réel $x \in [0 ; 1]$, $g(x) \leq x$.

3. Chaque fonction (f ou g) vérifie les trois conditions énoncées plus haut dans l'activité. Ce sont donc bien toutes deux des courbes de Lorenz.

133. Composition avec l'opposé

1. $g'(x) = -f'(-x)$

2. Si f est paire alors $f(-x) = f(x)$ pour tout réel $x \in I$ alors :

$$-f'(-x) = f'(x)$$

Donc f' est impaire.

3. Si f est impaire alors $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel $x \in I$ alors :

$$-f'(-x) = -f'(x) \text{ c'est-à-dire } f'(-x) = f'(x).$$

Donc f' est paire.

4. Si f' est impaire alors pour tout réel $x \in I$:

$$-f'(-x) = f'(x).$$

En cherchant des primitives à gauche et à droite on obtient :

$$f(-x) + k_1 = f(x) + k_2.$$

Or pour $x = 0$, on obtient $k_1 = k_2$ donc $f(x) = f(-x)$ donc f est paire.

5. Si f' est paire alors pour tout réel $x \in I$:

$$f'(-x) = f'(x).$$

En cherchant des primitives à gauche et à droite on obtient :

$$-f(-x) + k_1 = f(x) + k_2.$$

Or pour $x = 0$, $f(0) = 0$ donc on obtient $k_1 = k_2$ donc

$f(x) = -f(-x)$ donc f est impaire.

134. Étudier une fonction composée

1. $mx + 1 \neq 0$ c-à-d $x \neq -\frac{1}{m}$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{m} \right\}$.

Dans la suite de la correction on notera :

$x \rightarrow -\frac{1}{m}^-$ le fait que x tende vers $-\frac{1}{m}$ et que $x < -\frac{1}{m}$.

$x \rightarrow -\frac{1}{m}^+$ le fait que x tende vers $-\frac{1}{m}$ et que $x > -\frac{1}{m}$.

2. Si $m > 0$ alors :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (mx + 1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{mx + 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{mx+1}} = e^0 = 1 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Un raisonnement analogue en $-\infty$ conduit à

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \\
 &\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^+} (-x + 1) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^+} \frac{1}{-x + 1} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^+} f(x) = +\infty. \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^+} e^{\frac{1}{-x+1}} = +\infty \end{cases} \\
 &\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^-} (-x + 1) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^-} \frac{1}{-x + 1} = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^-} f(x) = 0. \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^-} e^{\frac{1}{-x+1}} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Si $m < 0$ alors :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (mx + 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{mx + 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{mx+1}} = e^0 = 1 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Un raisonnement analogue en $-\infty$ conduit à $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^+} (-x + 1) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^+} \frac{1}{-x + 1} = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^+} f(x) = 0. \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^+} e^{\frac{1}{-x+1}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^-} (-x + 1) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^-} \frac{1}{-x + 1} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^-} f(x) = +\infty. \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{m}^-} e^{\frac{1}{-x+1}} = +\infty \end{cases}$$

$$3. f'_m(x) = me^{\frac{1}{mx+1}} + \frac{(-m)(mx+1)e^{\frac{1}{mx+1}}}{(mx+1)^2} = \frac{m^2 x e^{\frac{1}{mx+1}}}{mx+1}$$

Or $m^2 e^{\frac{1}{mx+1}} > 0$ pour tout réel de $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{m} \right\}$.

Donc le signe de $f'_m(x)$ dépend de celui de $\frac{x}{mx+1}$.

Si $m > 0$ alors :

$$\frac{x}{mx+1} > 0 \text{ ssi } x \in \left] -\infty; -\frac{1}{m} \right[\cup] 0; +\infty[\text{ et négatif sinon. Donc } f \text{ est croissante sur } \left] -\infty; -\frac{1}{m} \right[\cup] 0; +\infty[$$

et décroissante sur $\left[-\frac{1}{m}; 0 \right]$.

La fonction possède deux extrema locaux à savoir :

- un minimum local pour $x = 0 : A(0 ; e)$.
- un maximum local pour $x = -\frac{1}{m} : B\left(-\frac{1}{m}; 0\right)$.

Si $m < 0$ alors :

$$\frac{x}{mx+1} < 0 \text{ ssi } x \in \left] -\infty; 0 \right[\cup \left] -\frac{1}{m}; +\infty \right[\text{ et négatif sinon.}$$

Donc f est décroissante sur $\left] -\infty; 0 \right[\cup \left] -\frac{1}{m}; +\infty \right[$ et croissante sur $\left[0; -\frac{1}{m} \right]$.

La fonction possède deux extrema locaux à savoir :

- un minimum local pour $x = 0 : A(0 ; e)$.
- un maximum local pour $x = -\frac{1}{m} : B\left(-\frac{1}{m}; 0\right)$.

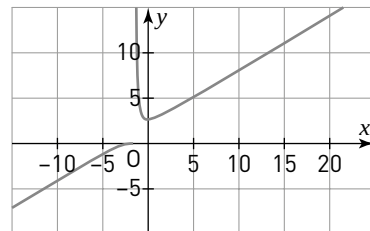
4. Si $m > 0$ alors on obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{m}$	0	$+\infty$
Signe de $f'_m(x)$	+	-	+	
Variations de f_m	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

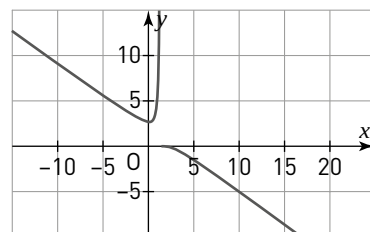
Si $m < 0$ alors on obtient le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	$-\frac{1}{m}$	$+\infty$
Signe de $f'_m(x)$	-	+	-	
Variations de f_m	$+\infty$	e	0	$-\infty$

5. Si $m > 0$:



Si $m < 0$:



135. Dérivée n -ième d'une fonction (1)

1. $f'(x) = nx^{n-1}$ et $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$
2. $f^{(n)}(x) = n(n-1) \dots 1x^{n-n} = n!x^0 = n!$

136. Dérivée n -ième d'une fonction (2)

1. $f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ et $f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$
2. $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$
3. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$:

Initialisation : pour $k = 1$

- d'une part $f^{(1)}(x) = f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- d'autre part $\frac{(-1)^1 1!}{x^{1+1}} = \frac{(-1)^1 1!}{x^{1+1}} = -\frac{1}{x^2}$

Donc $f^{(1)}(x) = \frac{(-1)^1 1!}{x^{1+1}}$ donc la relation est vérifiée au rang $k = 1$.

Hérédité : supposons la relation vérifiée à un rang k fixé et démontrons-la au rang $k + 1$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

$$\text{alors } f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! \times \frac{-(k+1)}{x^{k+1+1}} = \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{x^{k+2}}$$

donc la relation est vérifiée au rang $k + 1$.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$.

4. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(a+x)^{k+1}}$ (pour $a \in \mathbb{R}$).

Initialisation : pour $k = 1$

- d'une part $f^{(1)}(x) = f'(x) = -\frac{1}{(a+x)^2}$
- d'autre part $\frac{(-1)^1 1!}{(a+x)^{1+1}} = \frac{(-1)^1 1!}{(a+x)^{1+1}} = -\frac{1}{(a+x)^2}$

donc $f^{(1)}(x) = \frac{(-1)^1 1!}{(a+x)^{1+1}}$ donc la relation est vérifiée au rang $k = 1$.

Hérédité : supposons la relation vérifiée à un rang k fixé et démontrons-la au rang $k + 1$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(a+x)^{k+1}}$$

$$\text{alors } f^{(k+1)}(x) = (-1)^k k! \times \frac{-(k+1)}{(a+x)^{k+1+1}} = \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{(a+x)^{k+2}}$$

donc la relation est vérifiée au rang $k + 1$.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(a+x)^{k+1}}$.

5. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(a-x)^{k+1}}$ (pour $a \in \mathbb{R}$).

Initialisation : pour $k = 1$

- d'une part $f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{1}{(a-x)^2}$
- d'autre part $\frac{k!}{(a-x)^{k+1}} = \frac{1!}{(a-x)^{1+1}} = \frac{1}{(a-x)^2}$

donc $f^{(1)}(x) = \frac{1!}{(a-x)^{1+1}}$ donc la relation est vérifiée

au rang $k = 1$.

Hérédité : supposons la relation vérifiée à un rang k fixé et démontrons-la au rang $k + 1$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(a-x)^{k+1}}$$

$$\text{alors } f^{(k+1)}(x) = k! \times \frac{(-1)(-k+1)}{(a-x)^{k+1+1}} = \frac{(k+1)!}{(a-x)^{k+2}}$$

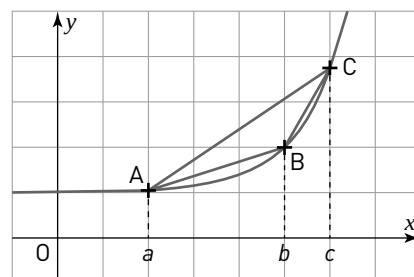
donc la relation est vérifiée au rang $k + 1$.

Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(a-x)^{k+1}}$.

137. Dérivée n -ième d'une fonction (3)

1. $f'(x) = ke^{kx}$ et $f''(x) = k^2 e^{kx}$
2. $f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$
3. $f^{(n)}(x)$ est du signe de k^n . Donc si k est positif alors $f^{(n)}(x)$ est positif quel que soit la valeur de n . Si k est négatif alors $f^{(n)}(x)$ est positif pour n pair et négatif pour n impair.

138. Théorème des pentes



Soit a, b et c trois réels tels que $a < b < c$. Soit f une fonction convexe et $A(a; f(a)), B(b; f(b))$ et $C(c; f(c))$ trois points de $\mathcal{C}_f$.

1^{re} inégalité :

soit $t = \frac{b-a}{c-a}$ alors $t \in [0; 1]$ et $b = tc + (1-t)a$.

Or f est convexe donc :

$$f(b) \leq tf(c) + (1-t)f(a)$$

$$c\text{-à-d } f(b) \leq \frac{b-a}{c-a}f(c) + \left(1 - \frac{b-a}{c-a}\right)f(a)$$

$$c\text{-à-d } f(b) \leq \frac{b-a}{c-a}f(c) + \frac{c-b}{c-a}f(a)$$

$$c\text{-à-d } (c1-a)f(b) \leq (b1-a)f(c) + (c1-b)f(a)$$

$$c\text{-à-d } (f(b)1-f(a))(c1-a) \leq (f(c)1-f(a))(b1-a)$$

$$c\text{-à-d, comme } c1-a \neq 0 \text{ et } b1-a \neq 0,$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

2^e inégalité :

soit $t = \frac{c-b}{c-a}$ alors $t \in [0; 1]$ et

$$t(c-a) = c-b \text{ c-à-d } tc - ta = c-b$$

$$c\text{-à-d } b = ta + (1-t)c.$$

Or f est convexe donc :

$$f(b) \leq tf(a) + (1-t)f(c)$$

$$c\text{-à-d } f(b) \leq \frac{c-b}{c-a}f(a) + \left(1 - \frac{c-b}{c-a}\right)f(c)$$

$$c\text{-à-d } f(b) \leq \frac{c-b}{c-a}f(a) + \frac{b-a}{c-a}f(c)$$

$$c\text{-à-d } (c-a)f(b) \leq (c-b)f(a) + (b-a)f(c)$$

$$c\text{-à-d } (c-a)(f(b)-f(c)) \leq (b-c)(f(c)-f(a))$$

$$c\text{-à-d } -(c-a)(f(c)-f(b)) \leq -(c-b)(f(c)-f(a))$$

$$c\text{-à-d } (c-b)(f(c)-f(a)) \leq (c-a)(f(c)-f(b))$$

$$c\text{-à-d, comme } c-a \neq 0 \text{ et } c-b \neq 0$$

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

Conclusion :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

139. Inégalité de convexité (1)

Ici $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ et la fonction $\ln$ est concave d'où :

$$\ln\left(\frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b}\right) \geq \frac{1}{a}\ln(x^a) + \frac{1}{b}\ln(y^b) = \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$$

D'où, par croissance de la fonction $\exp$,

$$\frac{x^a}{a} + \frac{y^b}{b} \geq xy.$$

140. Inégalité de convexité (2)

La fonction sinus est concave sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Donc sa

courbe est au-dessus de ses sécantes donc, pour tout $t \in [0; 1]$, on obtient :

$$\sin\left((1-t) \times 0 + t \frac{\pi}{2}\right) \geq (1-t)\sin(0) + t \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(t \frac{\pi}{2}\right) \geq t$$

$$\text{Pour } t = \frac{2x}{\pi}, \text{ on obtient } \sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}.$$

D'autre part, sa courbe est en dessous de ses tangentes, notamment de sa tangente à l'origine.

$$\mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$$

$$\text{D'où, pour tout } x \text{ de } \left[0; \frac{\pi}{2}\right] : \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x.$$

141. Inégalité arithmético-géométrique

La généralisation de la formule de convexité donne :

« soit n un entier naturel, soient x_i des réels, pour $t_i \in [0; 1]$ tel que $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, si f est une fonction convexe (resp. concave) alors :

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n)$$

$$(\text{resp. } f(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n)) \gg$$

Ici $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = 1$ et la fonction $\ln$ est concave

d'où :

$$\ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n\right) \geq \frac{1}{n}\ln(x_1) + \frac{1}{n}\ln(x_2) + \dots + \frac{1}{n}\ln(x_n)$$

c-à-d

$$\frac{1}{n}\ln(x_1) + \frac{1}{n}\ln(x_2) + \dots + \frac{1}{n}\ln(x_n) \leq \ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \frac{1}{n}x_2 + \dots + \frac{1}{n}x_n\right)$$

c-à-d

$$\ln\left(\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\right) \leq \ln \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

En opérant par la fonction exponentielle (strictement croissante sur $\mathbb{R}$), on obtient :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

142. Avec une exponentielle

Soit $t = \frac{1}{2} \in [0; 1]$. La fonction $\exp$ est convexe donc :

$$\exp\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \leq \frac{1}{2}\exp(a) + \frac{1}{2}\exp(b)$$

D'où $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b).$

143. Concavité de la fonction réciproque

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I . Alors pour tous a et b de I et pour tout $t \in [0; 1]$:

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

Comme f est strictement monotone de I vers J , f^{-1} est définie sur J vers I et il existe $x \in I$ et $y \in J$ tels que $a = f^{-1}(x)$ et $b = f^{-1}(y)$.

On obtient donc :

$$f(tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y)) \leq tf(f^{-1}(x)) + (1-t)f(f^{-1}(y))$$

c-à-d

$$f(tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y)) \leq tx + (1-t)y$$

Maintenant f et f^{-1} ont même monotonie

$$\left(\frac{(f^{-1})'(x)}{f'(f^{-1}(x))} \right), \text{ donc :}$$

i) si f est strictement croissante alors f^{-1} l'est aussi et donc :

$$f^{-1}(f(tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y))) \leq f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

c-à-d

$$tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y) \leq f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

autrement dit ceci montre que f^{-1} est concave.

ii) si f est strictement décroissante alors f^{-1} l'est aussi et donc :

$$f^{-1}(f(tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y))) \geq f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

c-à-d

$$tf^{-1}(x) + (1-t)f^{-1}(y) \geq f^{-1}(tx + (1-t)y)$$

autrement dit ceci montre que f^{-1} est convexe.

144. Avec un paramètre

1. $g_{\lambda}(-x) = e^{-\lambda(-x)^2} = e^{-\lambda x^2} = g_{\lambda}(x)$ donc g_{λ} est paire.

2. Si $\lambda > 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\lambda x^2} = 0.$

Si $\lambda < 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\lambda x^2} = +\infty.$

$$3. g'_{\lambda}(x) = -2\lambda x e^{-\lambda x^2}$$

Si $\lambda > 0$ alors on obtient le tableau suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'_{\lambda}(x)$	+	0	-
Variations de g'_{λ}	0	1	0

Si $\lambda < 0$ alors on obtient le tableau suivant.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'_{\lambda}(x)$	-	0	+
Variations de g'_{λ}	$+\infty$	1	$+\infty$

$$4. g''_{\lambda}(x) = -2\lambda e^{-\lambda x^2} + (-2\lambda x)^2 e^{-\lambda x^2} = 2\lambda(-1 + 2\lambda x^2)e^{-\lambda x^2}$$

5. Si $\lambda < 0$ alors $g''_{\lambda}(x)$ ne change pas de signe donc il n'y a pas de point d'inflexion.

Si $\lambda > 0$ alors $g''_{\lambda}(x)$ change de signe pour $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda}}$ donc il y a deux points d'inflexion donc deux points en lesquels la courbe traverse sa tangente.

145. Point d'inflexion (1)

$$1. a) f'(x) = \frac{(6x+15)(3x^2) - (3x^2+15x-10)(6x)}{(3x^2)^2} = \frac{-45x^2+60x}{9x^4} = \frac{-15x+20}{3x^3}$$

b)

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
Signe de $(-15x+20)$	+	+	-	-
Signe de $(3x^3)$	-	+	+	+
Signe de $f'(x)$	-	+	-	-
Variations de f	1	$-\infty$	$\frac{23}{8}$	1

$$\begin{aligned} 2. a) f''(x) &= \frac{(-15)(3x^3) - (-15x + 20)(9x^2)}{(3x^3)^2} \\ &= \frac{-45x^3 + 135x^3 - 180x^2}{9x^6} = \frac{10x - 20}{x^4} \end{aligned}$$

$$b) f''(x) \geq 0 \text{ ssi } 10x - 20 \geq 0 \text{ ssi } x \geq 2.$$

Donc f est convexe sur $[2; +\infty[$.

c) $f''(x)$ change de signe en 2, donc 2 est un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.

146. Convexité d'une fonction (1)

$f'(x) = 4ax^3 + b$ et $f''(x) = 12ax^2$ donc le signe de $f''(x)$ est le même que celui de a . Si a est positif alors f est convexe et si a est négatif alors f est concave.

147. Convexité d'une fonction (2)

$$1. f'(x) = 3e^{-x^2} + (3x)(-2x)e^{-x^2} = 3(1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

$$\text{Or } f'(x) \geq 0 \text{ ssi } 1 - 2x^2 \geq 0 \text{ ssi } \frac{1}{2} \geq x^2$$

$$\text{ssi } x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

$$2. f''(x) = 6xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$$

$f''(x)$ change de signe en 0. Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0 est un point d'inflexion.

$$3. \mathcal{T}_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0); \mathcal{T}_0 : y = 3x - 1$$

cherchons le signe de $g(x)$.

$$g(x) = f(x) - (3x - 1) = 3xe^{-x^2} - 3x = 3x(e^{-x^2} - 1)$$

Or pour tout réel x , $e^{-x^2} - 1 < 0$, donc le signe de $g(x)$ est celui de x . Donc $g(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_-$. Autrement dit $f(x) \geq 3x - 1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f(x) \leq 3x - 1$ sur $\mathbb{R}_-$ c-à-d $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}_0$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{T}_0$ sur $\mathbb{R}_-$.

$\mathcal{T}_0$ traverse $\mathcal{C}_f$ en le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.

On retrouve le fait que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.

148. Point d'inflexion (2)

$$1. f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ et } f''(x) = 6ax + 2b \text{ donc :}$$

i) si $a > 0$ alors : $f''(x) \geq 0$ ssi $6ax + 2b \geq 0$ ssi $x \geq -\frac{2b}{6a}$ ssi $x \geq -\frac{b}{3a}$. Donc f est convexe sur

$$\left[-\frac{b}{3a}; +\infty\right[\text{ et concave sur }]-\infty; -\frac{b}{3a}].$$

ii) si $a < 0$ alors : $f''(x) \geq 0$ ssi $6ax + 2b \geq 0$ ssi $x \leq -\frac{2b}{6a}$ ssi $x \leq -\frac{b}{3a}$. Donc f est concave sur

$$\left[-\frac{b}{3a}; +\infty\right[\text{ et convexe sur }]-\infty; -\frac{b}{3a}].$$

2. Quel que soit le signe de a , la dérivée seconde

$f''(x)$ change de signe en $-\frac{b}{3a}$, la courbe représentative de f admet donc un point d'inflexion d'abscisse

$$\alpha = -\frac{b}{3a}.$$

$$3. \text{ Ici } a = 2 \text{ et } b = 6 \text{ donc } \alpha = -\frac{b}{3a} = -\frac{6}{6} = -1.$$

La courbe représentative de f admet donc un point d'inflexion d'abscisse $\alpha = -1$.

149. Avec un logiciel de calcul formel

$$1. a) f(x) = \sqrt{x}e^{1-x} = \frac{x}{\sqrt{x}} \times \frac{e^1}{e^x} = \frac{x}{e^x} \times \frac{e}{\sqrt{x}} \text{ avec } x > 0.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{e}{\sqrt{x}} = 0 \times 0 = 0$$

$\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

$$\begin{aligned} 2. a) f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{1-x} + \sqrt{x}(-1)e^{1-x} \\ &= e^{1-x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = e^{1-x} \left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}} \right) \end{aligned}$$

b) Comme $e^{1-x} > 0$ et $2\sqrt{x} > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - 2x$. Donc $f'(x) \geq 0$ ssi $1 - 2x \geq 0$ ssi

$$1 \geq 2x \text{ ssi } \frac{1}{2} \geq x. \text{ Donc } f \text{ est croissante sur } \left]0; \frac{1}{2}\right] \text{ et}$$

$$\text{décroissante sur } \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[.$$

$$c) \mathcal{T}_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\mathcal{T}_1 : y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

d) Chaque facteur est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$ sauf

$$4x^2 - 4x - 1 = 4 \left(x - \frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) \left(x - \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\text{Donc } 4x^2 - 4x - 1 \text{ change de signe pour } x = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

et pour $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ qui sont donc les abscisses des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

f est donc convexe sur $\left]-\infty; \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$ et
 concave sur $\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

Travaux pratiques

p. 166-167

TP 1. Des composées particulières

- **Durée estimée** : 35 min
- **Objectif** : Étudier certaines fonctions particulières et pour certaines leurs réciproques.

A. Fonctions réciproques l'une de l'autre

1. On remarque que les deux courbes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. a) $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$$b) g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

Ces deux fonctions sont égales sur $\mathbb{R}_+$ mais pas sur $\mathbb{R}$ tout entier (sur $\mathbb{R}_-$, la fonction $g \circ f$ n'est pas définie).

3. $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$.

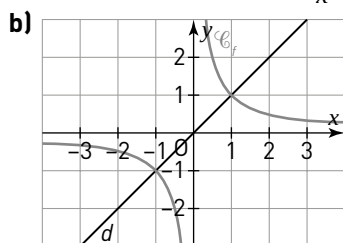
$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\ln(x)) = e^{\ln(x)} = x$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g(e^x) = \ln(e^x) = x$$

Ces deux fonctions sont égales sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$ tout entier (sur $\mathbb{R}_-$, la fonction $g \circ f$ n'est pas définie).

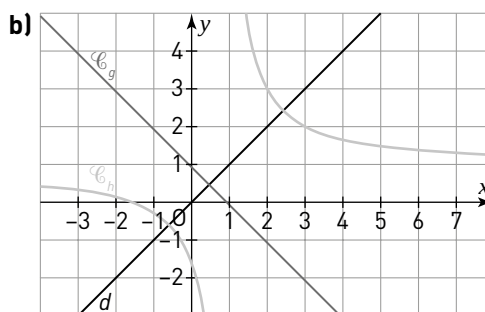
B. Fonctions involutives

$$1. a) f \circ f(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$



$\mathcal{C}_f$ est son propre symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. g est affine donc définie sur $\mathbb{R}$. h est homographique et définie pour $x \neq a$ donc est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.



$\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ admettent la droite d'équation $y = x$ comme axe de symétrie.

$$c) g \circ g(x) = g(g(x)) = g(a - x) = a - (a - x) = x$$

$$h \circ h(x) = h(h(x)) = h\left(\frac{b}{x-a} + a\right) = \frac{b}{\frac{b}{x-a} + a - a} + a$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{\frac{b}{x-a} + a - a} + a = \frac{1}{\frac{1}{x-a}} + a = x - a + a = x$$

À chaque calcul on obtient x d'où : $g \circ g = h \circ h = Id$ chacune de ces fonctions est sa propre réciproque.

C. Fonctions idempotentes

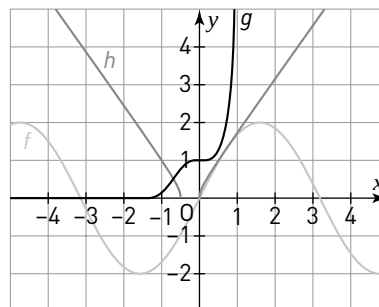
i) Si $x \geq 0$ alors $abs(abs(x)) = abs(x) = x$.

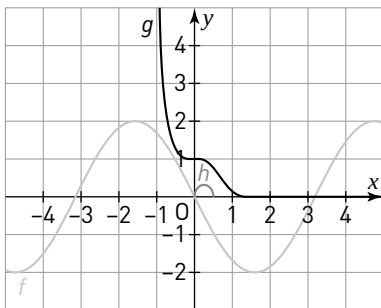
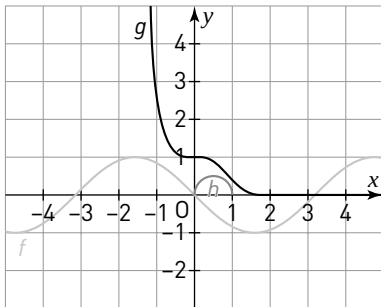
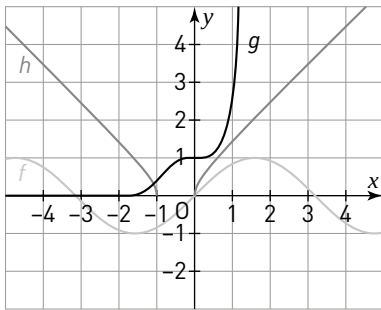
ii) Si $x \leq 0$ alors $abs(abs(x)) = abs(-x) = x = abs(x)$.

iii) Dans les deux cas, $abs(abs(x)) = abs(x)$, la fonction valeur absolue est dite idempotente.

TP 2. Étude d'une fonction à paramètre

- **Durée estimée** : 25 min
- **Objectif** : Étudier l'incidence d'un paramètre sur certaines fonctions.





A. Étude d'une fonction trigonométrique

1. Voir courbe gris clair sur les graphiques ci-dessus.

2. Quel que soit le réel t , f est définie sur $\mathbb{R}$ et est périodique de période 2π . On remarque que, si t est de signe constant, seule l'amplitude de la courbe varie.

Étudions les variations sur $[0; 2\pi]$:

i) Si $t > 0$ alors f est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Variations de f					

ii) Si $t < 0$ alors f est décroissante sur

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Variations de f					

iii) Si $t = 0$ alors f est constante égale à 0.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Variations de f					

B. Étude d'une fonction exponentielle

1. Voir courbe noire sur les graphiques ci-dessus.

2. Quel que soit le réel t , g est définie sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto tx^3$ est une fonction polynomiale (définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$) et exp est définie sur $\mathbb{R}$.

Étudions les variations sur $\mathbb{R}$:

i) Si $t > 0$ alors g est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de g			

ii) Si $t < 0$ alors g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de g			

iii) Si $t = 0$ alors g est constante égale à 1.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de g		

C. Étude d'une fonction racine carrée

1. Voir courbe gris moyen sur les graphiques ci-dessus.

2. $h(x) = \sqrt{tx^2 + x} = \sqrt{x(tx + 1)}$

i) Si $t > 0$, alors la fonction $x \mapsto x(tx + 1)$ est positive pour $x \in]-\infty; -\frac{1}{t}] \cup [0; +\infty[$ et négative pour $x \in [-\frac{1}{t}; 0]$. La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$D_h =]-\infty; -\frac{1}{t}] \cup [0; +\infty[.$$

De plus la fonction $x \mapsto x(tx + 1)$ est décroissante sur $]-\infty; -\frac{1}{t}]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. La fonction racine est également croissante donc la composition par cette fonction conserve la monotonie.

Donc la fonction h est décroissante sur $]-\infty; -\frac{1}{t}]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{t}$	0	$+\infty$
Variations de h	$+\infty$ ↘ 0			0 ↗ $+\infty$

ii) Si $t < 0$, alors la fonction $x \mapsto x(tx + 1)$ est négative pour $x \in]-\infty; 0] \cup [-\frac{1}{t}; +\infty[$ et positive pour $x \in [0; -\frac{1}{t}]$. La fonction racine est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$D_h = [0; -\frac{1}{t}].$$

De plus la fonction $x \mapsto x(tx + 1)$ est croissante sur $[0; -\frac{1}{2t}]$ et décroissante sur $[-\frac{1}{2t}; -\frac{1}{t}]$. La fonction racine est également croissante donc la composition par cette fonction conserve la monotonie.

Donc la fonction h est croissante sur $[0; -\frac{1}{2t}]$ et décroissante sur $[-\frac{1}{2t}; -\frac{1}{t}]$.

$$h(-\frac{1}{2t}) = \sqrt{-\frac{1}{2t} \times \frac{-1}{2t} + 1} = \sqrt{-\frac{1}{4t}}$$

x	$-\infty$	0	$-\frac{1}{2t}$	$-\frac{1}{t}$	$+\infty$
Variations de f			$\sqrt{-\frac{1}{4t}}$ ↗ 0	0 ↘	

iii) Si $t = 0$ alors la fonction h est la fonction définie par $h(x) = \sqrt{x}$.

x	0	1	$+\infty$
Variations de h	0	1	$+\infty$

TP 3. Déterminer le lieu de vitesse maximale de la montagne russe

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Calculer.

$$1. f''(x) = \frac{1200\sqrt{3}(2x - 27)}{(4x^2 - 108x + 1029)^2}$$

2. $f''(x)$ change de signe pour $x = \frac{27}{2} = 13,5$. Donc le point d'inflexion a pour coordonnées $(13,5; f(13,5))$.

3. En ce point, $f'(13,5) = -\sqrt{3}$. Il s'agit du coefficient directeur de la tangente en ce point. Si $\tan(\alpha) = -\sqrt{3}$ alors $\alpha \approx -\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire à un angle géométrique de 60° .

4. La vitesse est maximale pour $x = 13,5$.

CHAPITRE 6 Fonction logarithme népérien

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Dans ce chapitre nous étudierons une nouvelle fonction introduite pour la première fois pour les élèves au programme de Terminale, la fonction logarithme népérien.

Dans un premier temps, il s'agit d'aborder une approche en se reposant sur les acquis des élèves de 1^{ère}, à savoir l'utilisation de la fonction exponentielle et le fait que cette nouvelle fonction soit la fonction réciproque de celle qu'ils ont découvert en classe de 1^{ère}. Ainsi les élèves s'appuieront sur les images mentales des courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme.

Puis, dans un deuxième temps, il s'agira d'exploiter les propriétés algébriques de cette nouvelle fonction.

Enfin dans un dernier temps, nous étudierons cette fonction et des composées de cette fonction, tant d'un point de vue variations que limites.

Objectifs

- Résoudre des équations, inéquations avec $\ln$ ou $\exp$.
- Résoudre des équations, inéquations du type $\ln u \leq \ln v$.
- Utiliser les propriétés algébriques de $\ln$.
- Résoudre des inéquations du type $q^n < a$.
- Déterminer des tangentes, la position relative de courbes.
- Étudier des fonctions avec $\ln$.
- Déterminer des limites, notamment dans le cas de formes indéterminées.
- Dériver et étudier des fonctions avec $\ln u$.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 169

1. Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

a) e^{-2x}

b) e^{3x}

c) e^{5x-1}

d) $\frac{e^{-x}}{e^{-x}} - \frac{ex}{e^{-x}} = 1 - e^{2x}$

2. Résoudre des équations du type $e^x = k$

1. Une seule solution pour $k \in \mathbb{R}_+^*$; et aucune solution pour $k \in \mathbb{R}_-^*$.

2. a) $S = \emptyset$

b) $S = \{0\}$

c) $S = \{1\}$

d) $S = \{-1\}$

3. Résoudre des équations et des inéquations simples avec la fonction exponentielle

1. a) $e^{4x+1} = e^0 ; S = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$

b) $e^4 = e ; S = \{\emptyset\}$

c) $S = \{\emptyset\}$

2. a) $e^{-x} \leq e^1 ; S = [-1 ; +\infty[$

b) $x + 1 > 3 - 2x \Leftrightarrow 3x > 2$

donc $S = \left] \frac{2}{3} ; +\infty \right[$.

c) $e^{-2x} < e^{x-3} \Leftrightarrow -2x < x - 3$

Soit $S =]1 ; +\infty[$.

4. Calculer des fonctions dérivées

a) $f'(x) = -5e^{-5x+3}$

b) $f'(x) = 3e^x + 3xe^x = 3(1+x)e^x$

c) $f'(x) = 5 \times \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$

5. Savoir déterminer une équation de tangente

a) $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$
d'où $y = e(x - 1) - 3$ soit $y = ex - e - 3$.

b) $y = f'(0)x + f(0)$ avec $f'(x) = 5e^x + 2$ d'où $y = 7x$.

6. Déterminer des limites

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x - 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x-1} = 0$.

b) $\frac{e^x}{x-2} = \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{x-2}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ par crois-

sance comparée et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} = 1$

donc par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-2} = +\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1)e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ avec $f(x) = e^x$ d'où

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = e^0 = 1$.

7. Déterminer des réels vérifiant des conditions

a) $x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\cap \left] -\infty; \frac{5}{3} \right[$ donc $x \in \left] \frac{1}{2}; \frac{5}{3} \right[$.

b) $x \in]-\infty; 1[\cap]-4; 1[$ donc $x \in]-4; 1[$.

A. Transformation du plan

1. A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ .

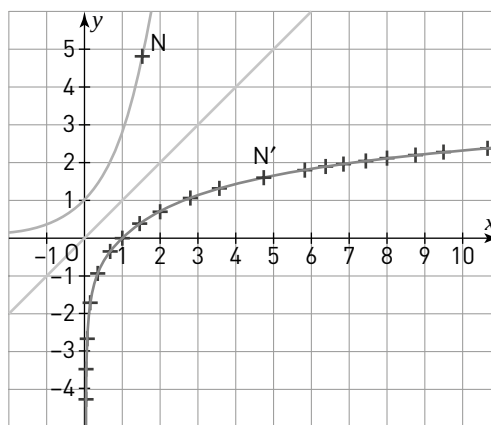
2. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} y-x \\ x-y \end{pmatrix}$ et soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur direc-

teur de Δ ; $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$; les droites (AB) et Δ sont donc perpendiculaires. Soit I le milieu de [AB] ; $I \left(\frac{x+y}{2}; \frac{y+x}{2} \right)$.

On remarque que I appartient à Δ ; par conséquent Δ est la médiatrice de [AB] ce qui signifie que A et B sont effectivement symétriques par rapport à Δ .

B. Construction de la courbe de la fonction logarithme népérien

1. 2. et 3.



C. Conséquences et conjectures

1. $e^{\ln(1)} = 1$ or $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$; $e^{\ln(e)} = e$ or $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$.

2. Puisque $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ sont des fonctions réciproques, on en déduit que $e^{\ln(x)} = x$ et $\ln(e^x) = x$.

3. $]0; +\infty[$ est l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien qui correspond à l'intervalle image de la fonction exponentielle.

4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

b) La fonction $\ln$ semble strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) La fonction $\ln$ semble strictement négative sur $]0; 1[$, strictement positive sur $]1; +\infty[$ et s'annule en 1.

Activités

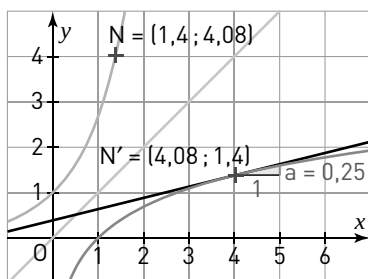
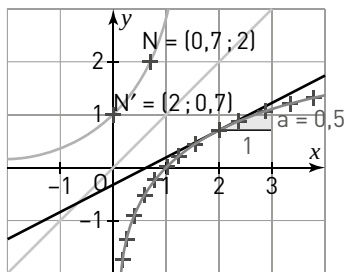
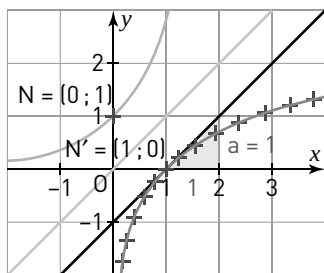
p. 170

1 Approcher graphiquement une nouvelle fonction

• **Durée estimée** : 35 min

• **Objectif** : Permettre l'obtention pas à pas de la courbe représentative de la fonction $\ln$.

5. a)



b) Soit a l'abscisse du point N' , et m le coefficient directeur de la tangente à la courbe en N' , le lien qui semble exister entre a et m semble être : $n = \frac{1}{a}$.

6. Conjecture : $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

2 Répondre à des besoins pratiques de calculs au XVI^e siècle : les logarithmes

- **Durée estimée** : 35 min
- **Objectifs** : Introduire la fonction $\ln$ d'un point de vue historique, permettant de répondre à un problème de l'époque : faciliter les calculs dans les domaines tels que l'astronomie, la navigation...

1. a) $m \times n = 6$ et $x + y = 0,6931 + 1,0986 = 1,7917 \approx 1,792$ arrondi au millièmes près : le principe est vérifié.

b) $2 \times 4 = 8$ et $x + y = 0,6931 + 1,3863 = 2,0794$.

c) $1 \times 1 = 1$ et $x + x = 2x$ or on doit avoir $2x = x$ donc $x = 0$ d'où : le nombre à écrire en face de 1 doit être 0.

d) Il faut ajouter les nombres en face de 27 et 91 soit $3,2958 + 4,5109 = 7,8067$ et le nombre en face de 7,8067 est 2 457 donc $27 \times 91 = 2\,457$.

2. a) En faisant $x - y = 2,3026 - 1,6094 = 0,6932$ au millièmes près on remarque qu'il s'agit du nombre écrit en face de 2. Il semblerait donc qu'à $m \div n$ il faille associer $x - y$.

Test avec $9 \div 3 = 3$ et $x - y = 2,1972 - 1,0986 = 1,0986$; la conjecture se confirme.

Test avec $6 \div 3 = 2$ et $x - y = 1,7918 - 1,0986 = 0,6932$ qui au millièmes près correspond au nombre écrit en face de 2 ; la conjecture se confirme de nouveau.

b) $2 \div 10 = 0,2$ et $x - y = 0,6931 - 2,3026 = -1,6095$ au millièmes près : le nombre à écrire devant 0,2 serait -1,609.

$3 \div 2 = 1,5$ et $x - y = 1,0986 - 0,6931 = 0,4055$; le nombre à écrire en face de 1,5 serait 0,4055.

3. a) $2,1972 - 1,0986 = 1,0986$

$$3,2958 - 2,1972 = 1,0986$$

$$4,3944 - 3,2958 = 1,0986$$

La suite de la colonne de droite pour les nombres respectivement associés semble être arithmétique de raison 1,0986.

b) $3^{-1} \times 3 = 1$ donc on obtient le nombre à écrire en face de 3^{-1} en effectuant le calcul $0 - 1,0986 = -1,0986$

$81 = 3^4$ or $3^{10} = 3^4 \times 3^6$ par conséquent on obtient le nombre à écrire en face de 3^{10} en effectuant le calcul $4,3944 + 6 \times 1,0986 = 10,986$.

4. a) $m \times n = a \times a = a^2$ et $x + x = 2x$ on peut donc énoncer $\ln(a^2) = 2\ln(a)$.

$\ln(3^2) = \ln(9) = 2,1972$ et on vérifie $2\ln(3) = 2 \times 1,0986 = 2,1972$.

b) $m \times n = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ et $\ln((\sqrt{a})^2) = 2\ln(\sqrt{a})$ soit $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

$\ln(\sqrt{16}) = \ln(4) = 1,3863$ et $\frac{1}{2}\ln(16) = \frac{1}{2} \times 2,7726 = 1,3863$

À vous de jouer

p. 173

1. a) $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

b) $e^{2x} = -1$; $S = \{\emptyset\}$

c) Conditions d'existence :

il faut que $4 - 2x > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 2[$,

$$\ln(4 - 2x) > 1 \Leftrightarrow 4 - 2x > e^1, \text{ et}$$

$$x \in I \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; 2 - \frac{e}{2} \right[.$$

$$\text{d) } e^{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow x + 1 \geq \ln 2 \\ \Leftrightarrow x \in [\ln 2 - 1; +\infty[$$

2. a) Conditions d'existence : $5x - 1 > 0$.

$$\text{Soit } x \in I = \left] \frac{1}{5}; +\infty \right[; \ln(5x - 1) = 2 \Leftrightarrow \ln(5x - 1)$$

$$= \ln(e^2) \Leftrightarrow 5x - 1 = e^2 \text{ et } x \in I.$$

$$S = \left\{ \frac{e^2 + 1}{5} \right\}$$

$$\text{b) } e^{-x} = 5 \Leftrightarrow -x = \ln 5 \text{ d'où } S = \{-\ln 5\}.$$

c) Conditions d'existence : $3x - 1 > 0$ soit

$$x \in I = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[\text{ et } \ln(3x - 1) < \ln 1 \Leftrightarrow 3x - 1 < 1$$

$$\text{avec } x \in I; S = \left] \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right[.$$

$$\text{d) } e^{5-x} \leq 2 \Leftrightarrow e^{5-x} \leq e^{\ln 2} \Leftrightarrow 5 - x \leq \ln 2 \text{ soit } \\ S = [5 - \ln 2; +\infty[.$$

3. a) Conditions d'existence : $x \in]-1; +\infty[$ et

$$x \in]-\infty; 0[\text{ d'où } x \in I =]-1; 0[.$$

$$\ln(x + 1) = \ln(-x) \Leftrightarrow x + 1 = -x$$

$$\text{et } x \in I \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

b) Conditions d'existence : $x^2 - 1 > 0$ soit

$$x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$$

$$\ln(x^2 - 1) \leq \ln 5 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 5 \text{ et } x \in I \text{ donc}$$

$$S = [-\sqrt{6}; -1[\cup]1; \sqrt{6}].$$

4. a) Conditions d'existence : $x^2 - x + 1 > 0$ or $\Delta < 0$ donc le polynôme est toujours du signe de a , ici 1 donc le polynôme est toujours strictement positif, donc $x \in \mathbb{R}$.

$$\ln(x^2 - x + 1) = \ln 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 5; S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

b) Conditions d'existence : $2x > 0$ soit $x > 0$ et $x^2 - 2x + 1 > 0$ or $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ s'annule en 1 et strictement positif sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Donc } x \in I =]0; 1[\cup]1; +\infty[.$$

Il s'agit alors de résoudre :

$$2x > x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 < 0$$

$$\Delta = 12; x_1 = 2 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$x \in]2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}[\cup I \text{ soit :}$$

$$x \in]2 - \sqrt{3}; 1[\cup]1; 2 + \sqrt{3}[.$$

$$\text{5. a) } 2\ln 5 + \frac{1}{2}\ln(125) = 2\ln 5 + \frac{3}{2}\ln 5 = \frac{7}{2}\ln 5$$

$$\text{b) } 3\ln 5 + 2\ln 7$$

$$\text{c) } 4 - 2\ln 5$$

$$\text{d) } -\frac{4}{5} - \ln 5$$

$$\text{6. a) } 4\ln 12 - 4\ln 36 = 4\ln(2^2 \times 3) - 4\ln(2^2 \times 3^2) \\ = 8\ln 2 + 4\ln 3 - 8\ln 2 - 8\ln 3 = -4\ln 3$$

$$\text{b) } \ln\left(\frac{1}{9}\right) + \ln 81 = -\ln 3^2 + \ln 3^4 = -2\ln 3 + 4\ln 3 = 2\ln 3$$

$$\text{c) } \ln \frac{\sqrt{3}}{3} - \ln 27 = \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3 - 3\ln 3 = -\frac{7}{2}\ln 3$$

$$\text{d) } e^{-2\ln 2} + \ln(9e^2) = e^{\ln(2^{-2})} + \ln 9 + \ln(e^2) \\ = 2^{-2} + 2\ln 3 + 2 = \frac{9}{4} + 2\ln 3$$

$$\text{7. a) } n\ln\left(\frac{5}{9}\right) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}$$

$$\text{soit : } n \geq 8.$$

$$\text{b) } 2^{n-1}(2 - 7) > -3 \Leftrightarrow 2^{n-1} < \frac{3}{5} \Leftrightarrow n < \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{\ln(2)} + 1$$

$$\text{soit : } n = 0.$$

$$\text{8. a) } 3^{2n} > 10^8 \Leftrightarrow \ln(3^{2n}) > \ln(10^8) \Leftrightarrow 2n\ln 3 > \ln(10^8) \\ \Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^8)}{2\ln 3}$$

$$\text{soit : } n \geq 9.$$

$$\text{b) } 5^n \times 9^{-n-1} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n \times \frac{1}{9} \leq 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n \leq 9 \times 10^{-4} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{9}\right) \leq \ln(9 \times 10^{-4})$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(9 \times 10^{-4})}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}$$

soit : $n \geq 12$.

9. $T_e : y = f'(e)(x - e) + f(e)$ soit $y = \frac{1}{e}x$.

10. $T_e : y = f'(e)(x - e) + f(e)$ or $f'(x) = \frac{1}{x}$ d'où

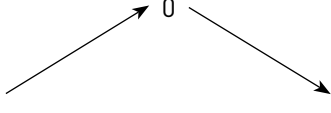
$$T_e : y = \frac{1}{e}(x - e) \text{ soit } y = \frac{1}{e}x - 1.$$

$$f(x) - \left(\frac{1}{e}x - 1\right) = \ln x - 1 - \frac{1}{e}x + 1 = \ln x - \frac{1}{e}x$$

Il faudrait étudier le signe de $\ln x - \frac{1}{e}x$.

On pose $h(x) = \ln x - \frac{1}{e}x$.

$$h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} \text{ et } h'(x) > 0 \Leftrightarrow]0; e[.$$

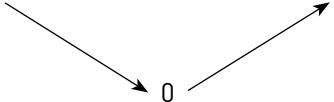
x	0	e	$+\infty$
Signe de $h'(x)$		+	-
Sens de variation de h			

D'après le tableau de variations, on remarque que la fonction h admet un maximum nul, la fonction est donc toujours négative, d'où $\ln x \leq \frac{1}{e}x$ ce qui signifie que la courbe est en-dessous de sa tangente T_e .

11. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{-1-x}{x^2}$, sur $]0; +\infty[$; $-1-x < 0$ et $x^2 > 0$ donc $f'(x) < 0$ d'où f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

12. $f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$

sur $]0; +\infty[$ le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x^2 - x - 1$; $\Delta = 9$ et $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 1$.

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f			

13. $x^2 \ln x - x^2 = x^2(\ln x - 1)$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 1 = +\infty$ donc par produit des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x - x^2 = +\infty$.

14. $\frac{(x-1)\ln(x-1)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{(x-1)\ln(x-1)}{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = \frac{x^2 \ln(x-1)}{x-1}$

or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$

donc par produit des limites $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\ln(x-1)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = -\infty$

15. $f'(x) = \frac{1 \times x^2 - (1+x) \times 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x}{x^2(1+x)}$

16. $f'(x) = 2x \ln\left(\frac{1}{2x}\right) + (x^2 - 4) \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{2x}}$
 $= 2x \ln\left(\frac{1}{2x}\right) - \frac{x^2 - 4}{x} = 2x \ln\left(\frac{1}{2x}\right) - x + \frac{4}{x}$

$$\begin{aligned}
 17.1. f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} \\
 &= \frac{\ln(x) - 2}{x^2} + \frac{x - 1}{x^2} = \frac{\ln(x) - 2 + x - 1}{x^2} \\
 &= \frac{\ln(x) + x - 3}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$2. u'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} \text{ pour } x \in [e; +\infty[, u'(x) > 0$$

par conséquent u est croissante sur $[e; +\infty[$, or $u(e) = e - 2 > 0$ donc u est positive sur $[e; +\infty[$.

3. f' est donc positive sur $[e; +\infty[$ donc f est croissante sur $[e; +\infty[$.

$$18.1. f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Puisque $x^2 > 0$ sur $\mathcal{D}_f$, le signe de $f'(x)$ est le même que celui de g .

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \text{ sur } [1; +\infty[.$$

x	1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+
Sens de variation de g		
Signe de $g(x)$ = signe de $f'(x)$		+
Sens de variation de f		

$$2. f(x) - x = x - \frac{\ln x}{x} - x = -\frac{\ln x}{x}$$

Or sur $]1; +\infty[, x > 0$ et $\ln x > 0$ donc $f(x) - x < 0$ par conséquent la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours en dessous de la droite $\mathcal{D}$.

$$19. f'(x) = \frac{-4x}{-2x^2 + 13,5}$$

x	-2,5	0	2,5
$-4x$	+	0	-
$-2x^2 + 13,5$		+	
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Sens de variation de f			

$$\begin{aligned}
 20.1. g'(x) &= \frac{e-1}{1+(e-1)x} - 1 = \frac{e-1-1-(e-1)x}{1+(e-1)x} \\
 &= \frac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x}
 \end{aligned}$$

2. Sur $[0; 1]$, $1 + (e-1)x > 0$ le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $(e-2) - (e-1)x$.

$$\text{Or } (e-2) - (e-1)x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{e-2}{e-1}.$$

x	0	$\frac{e-2}{e-1}$	1
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Sens de variation de g			

g admet donc un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$ dont une valeur arrondie est 0,12.

3. Sur l'intervalle $\left[0; \frac{e-2}{e-1}\right]$, la fonction g est strictement croissante et continue, de plus $g(0) < 0,05$ et $g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) > 0,05$; donc d'après le

théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0,05$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[0; \frac{e-2}{e-1}\right]$ de même on démontre que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\frac{e-2}{e-1}; 1\right]$; par conséquent l'équation admet bien deux solutions sur $[0; 1]$.

Exercices

apprendre à démontrer

p. 182

Pour s'entraîner

1. $P(n) : \{\ln(a^n) = n \ln(a)\}$

Initialisation : pour $n = 0$; $\ln(a^0) = \ln 1 = 0$ et

$0 \times \ln a = 0$, $P(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ soit vraie et montrons que $P(k+1)$ est encore vraie.

$\ln(a^{k+1}) = \ln(a^k \times a) = \ln(a^k) + \ln(a) = k \ln(a) + \ln(a)$ d'après $P(k)$.

On a donc $\ln(a^{k+1}) = (k+1) \ln a$.

$P(k+1)$ est donc vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

2. Posons $v(x) = \ln(x)$

or $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

d'où $(\ln(x))' = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exercices

calculs et automatismes

p. 183

21. Équations, inéquations (1)

1. d)

$$\ln \sqrt{2} + \ln 8 - 5 \ln 4 = \frac{1}{2} \ln 2 + 3 \ln 2 - 10 \ln 2 = -\frac{13}{2} \ln 2$$

2. c)

$$f(x) = \ln((6x+2)(6x-2)) - \ln 4$$

$$= \ln\left(\frac{36x^2 - 4}{4}\right) = \ln(9x^2 - 1)$$

3. c)

Condition d'existence : $x \in]1; +\infty[$. Cela revient

à résoudre sur cet intervalle $4x = x - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$;

mais $-\frac{1}{3} \notin]1; +\infty[$ donc il n'y a pas de solution.

4. b)

Condition d'existence : $]-\infty; 0[$. Cela revient à résoudre sur cet intervalle $\ln(-x) \leq \ln(e)$

$\Leftrightarrow x \in [-e; +\infty[\cup]-\infty; 0[$ donc $x \in [-e; 0[$.

22. Dérivées

$$1. f'(x) = \frac{3}{x} - 2x$$

$$2. g'(x) = -\frac{2}{4-2x} = \frac{1}{x-2}$$

23. Python

1. La valeur envoyée par la fonction Python représente l'image de x obtenue par la fonction f définie par $f(x) = \ln(4-2x)$ pour tout $x > 2$.

2.

```
def solution_inequa(x):
    if x <= 0:
        return "ce nombre n'est pas solution de l'inéquation"
    else:
        if log(x)+x-1 < 0:
            return "ce nombre est solution de l'inéquation"
        else:
            return "ce nombre n'est pas solution de l'inéquation"
```

24. Fonction ln

a) Faux contre-exemple : $x = 0,5$ et

$$\ln(0,5^2) = \ln(0,25) < 0.$$

b) Faux c'est $\ln(10 \times 2) = \ln(10) + \ln(2)$.

c) Vrai car $f'(x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$; puisque $x \in]-\infty; 0[$;

$\frac{1}{x} < 0$ d'où $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur

$]-\infty; 0[$.

d) Faux $u_0 = 0$; $u_1 = \ln(3)$ et $u_2 = 2 \ln(3)$ puisque le 1^{er} terme est nul. Suite arithmétique de raison $\ln(3)$:
 $u_{n+1} - u_n = \ln(3^{n+1}) - \ln(3^n) = (n+1) \ln(3) - n \ln(3) = \ln(3)$.

25. Limites (1)

a) Faux car $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissance compa-

rée et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} = -\infty$ donc par somme des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x - \frac{3}{x} = -\infty.$$

b) Vrai par croissance comparée.

c) Vrai car $x \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} x \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissance comparée.

d) Faux car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}$
 or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée et
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$.

26. Lectures graphiques

a) Faux c'est $f(4) \approx 3$.

b) Faux car une seule tangente horizontale en -5 environ.

c) Vrai, la fonction est croissante pour $x > -\frac{1}{2}$.

d) Vrai la fonction semble concave donc $f''(x) < 0$.

27. Équations, inéquations (2)

1. Il faut d'abord rechercher les conditions d'existence, à savoir pour quelles valeurs de x , $2x+1 > 0$ et $4-x > 0$ et $2x > 0$.

2. Il faudra étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

28. Limites (2)

1. b) car $x^2 \ln x - 3x + 5 = x(x \ln x - 3) + 5$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x \ln x - 3) = +\infty$ par produit des limites.

2. b) car $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^3} = +\infty$ par croissance comparée,

d'où $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-2)}{(x-2)^3} = -\infty$.

Exercices d'application

p. 184-185

Équations/inéquations avec ln ou exp

29. 1) a) Condition d'existence : $x \in \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$;

$2x-1=1 \Leftrightarrow x=1 \in I$.

b) Condition d'existence : $x \in I =]e; +\infty[$;

$x-e=e \Leftrightarrow x=2e \in I$.

c) $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$

d) $5-2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{\ln 2}{2}$

2) a) Condition d'existence : $x \in I =]-\infty; 1[$;
 $1-x > 1$ et $x \in I \Leftrightarrow x < 0$ et $x \in I \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[$.

b) Condition d'existence : $x \in I = \left] -\infty; \frac{3}{2} \right[; 3-2x \leq e$

et $x \in I \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-e}{2}; +\infty \right[$ et $x \in I \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-e}{2}; \frac{3}{2} \right[$.

c) $e^x < 3 \Leftrightarrow x < \ln 3$

d) $e^x(e^x - 3) \geq 0$ or $e^x > 0$ pour tout x , cela revient donc à résoudre $e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 3$.

30. a) $5 - \ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 3$ d'où $S = \{e^3\}$.

b) $e^{4x+1} = 5 \Leftrightarrow 4x+1 = \ln 5$ d'où $S = \left\{ \frac{\ln 5 - 1}{4} \right\}$.

c) Conditions d'existence : $2x + e > 0$

$\Leftrightarrow x \in I = \left] -\frac{e}{2}; +\infty \right[$.

$\ln(2x+e) = \ln e \Leftrightarrow 2x+e = e$ et $x \in I$ donc $S = \{0\}$.

d) Conditions d'existence : $x^2 + x - 6 > 0$

$\Delta = 25$; $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$; il faut donc

$x \in I =]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$.

$\ln(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x - 6) = \ln(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 1$
 et $x \in I$.

$\Delta = 29$, $x_1 = \frac{-1-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$

$S = \{x_1; x_2\}$.

31. a) Conditions d'existence :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	2	$+\infty$
$5x+1$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$\frac{5x+1}{x-2}$	+	0	-	+

$x \in I = \left] -\infty; -\frac{1}{5} \right[\cup]2; +\infty[$

$\ln\left(\frac{5x+1}{x-2}\right) \leq \ln(1) \Leftrightarrow \frac{5x+1}{x-2} \leq 1$ et $x \in I$

$\Leftrightarrow \frac{5x+1-(x-2)}{x-2} \leq 0$ et $x \in I$

$\Leftrightarrow \frac{4x+3}{x-2} \leq 0$ et $x \in I$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
$4x+3$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{4x+3}{x-2}$	$+$	0	$-$	$+$

$$S = \left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{5} \right]$$

b) Conditions d'existence :

$$x^2 + 2x > 0 \text{ soit } x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$$

$$\ln(x^2 + 2x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x) > \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - e > 0 \text{ et } x \in I$$

$$S =]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[\text{ avec } x_1 = \frac{-2 - \sqrt{2+2e}}{2} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{2+2e}}{2}.$$

$$\text{c) } 6e^x - 1 \geq 3 - 4e^x \Leftrightarrow S = \left[\ln\left(\frac{2}{5}\right); +\infty \right[$$

d) $3e^{2x} - 9e^x < 0 \Leftrightarrow 3e^x(e^x - 3) < 0$ or $3e^x > 0$ il suffit d'étudier le signe de $e^x - 3$.

$$S =]-\infty; \ln 3[$$

$$\text{32. a) } (\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$$

$$\text{Avec } X = \ln x \text{ on a } X^2 - 4X - 5 = 0$$

$$\Delta = 36; X_1 = -1 \text{ et } X_2 = 5$$

$$\text{soit } \ln x = -1 \text{ et } \ln x = 5.$$

$$S = \{e^{-1}; e^5\}$$

b) Soit $X = e^x$; il s'agit alors de résoudre l'équation $X^2 - 2X - 8 = 0$.

$$\Delta = 36; X_1 = -2 \text{ et } X_2 = 4.$$

$$e^x = -2 : \text{impossible.}$$

$$e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4; S = \{\ln 4\}.$$

$$\text{33. 1. } \Delta = 9; X_1 = 5 \text{ et } X_2 = 2.$$

$$S =]2; 5[$$

2. On pose $X = \ln x$, l'équation devient alors :

$$-X^2 + 7X - 10 > 0$$

$$\text{on a alors } 2 < \ln x < 5 \text{ soit } e^2 < x < e^5$$

$$S =]e^2; e^5[.$$

34. [ERRATUM] La première édition du manuel utilise une équation dans cet exercice. C'est une erreur, qui est corrigée dans les éditions suivantes du manuel. La correction ci-dessous prend en compte cette correction, et utilise l'inéquation du nouvel énoncé : $-X^2 + 3X - 4 \geq 0$.

$$\text{1. } \Delta = 25; X_1 = -4 \text{ et } X_2 = 1$$

$$S =]-\infty; -4] \cup [1; +\infty[$$

2. En posant $X = \ln x$ on a alors $\ln x \leq -4$ ou $\ln x \geq 1$ c'est-à-dire $x \leq e^{-4}$ ou $x \geq e$.

$$S =]0; e^{-4}] \cup [e; +\infty[$$

35. 1. Soit $X = \ln x$ l'équation devient alors

$$X^2 - 2X - 3 = 0.$$

$$\Delta = 16; X_1 = -1 \text{ et } X_2 = 3.$$

$$\text{Soit } \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \text{ ou } \ln x = 3 \Leftrightarrow x = e^3; S = \left\{ \frac{1}{e}; e^3 \right\}.$$

2. $\ln x(2\ln x - 1) = 0$; c'est une équation produit nul : $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$; d'où $S = \{1; \sqrt{e}\}.$

3. Soit $X = \ln x$ cela revient alors à résoudre $X^2 + X + 1 = 0$, $\Delta = -3$ l'équation n'a donc pas de solution. $S = \{\emptyset\}.$

Équations / inéquations avec $\ln u$

36. 1. a) Condition d'existence : $x > 2$ et $x < 4$ donc $x \in I =]2; 4[.$

$$3x - 6 = 4 - x \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

b) Condition d'existence : $x \in I =]5; +\infty[.$

$$\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln(x-5) \text{ et } x \in I \Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} = x-5 \text{ et}$$

$$x \in I \Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 = 0 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{14}.$$

$$\text{2. a) } x > \frac{1}{2} \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{e}{40} \right[.$$

b) Condition d'existence : $x \in I =]1; 5[;$

$$5 - x \geq x - 1 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \leq 3 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \in]1; 3].$$

37. a) Conditions d'existence : $2x - 1 > 0$ et $x > 0$

$$\text{donc } x \in I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

$$\ln(2x-1) = \ln(x^2) \Leftrightarrow 2x-1 = x^2 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow (x-1)^2 \text{ et } x \in I \text{ donc } S = \{1\}.$$

b) Conditions d'existence : $x+1 > 0$ et $x-1 > 0$ et $4-2x > 0$ donc $x \in I =]1; 2[$.

$$\ln((x+1)(x-1)) = \ln(4-2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 4 - 2x \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Delta = 24; x_1 = -1 - \sqrt{6} \text{ et } x_2 = -1 + \sqrt{6}$$

$$\text{donc } S = \{-1 + \sqrt{6}\}.$$

38. a) Conditions d'existence : $x^2 - 4x + 4 > 0$ et $x-2 > 0$ et $8-x > 0$ soit $x \in I =]2; 8[$.

$$\ln\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x-2}\right) < \ln(8-x) \text{ et } x \in I$$

$\Leftrightarrow \ln(x-2) < \ln(8-x)$ et $x \in I$ car $x^2 - 4x + 2 = (x-2)^2$ ce qui revient à résoudre $x-2 < 8-x$ et $x \in I$; d'où $S =]2; 5[$.

b) [ERRATUM] La première édition du manuel utilise l'inéquation $\ln(2x+4) + \ln(1-x) - \ln 2 \geq \ln(e^{-x}) - 1$. C'est une erreur et les éditions suivantes ainsi que la correction ci-dessous utilisent l'inéquation suivante :

$$\ln(2x+4) + \ln(1-x) - \ln 2 \geq \ln(-x).$$

Conditions d'existence : $2x+4 > 0$ et $1-x > 0$ et $-x > 0$ soit $x \in I =]-2; 0[$.

$$\ln\left(\frac{(2x+4)(1-x)}{2}\right) \geq \ln(-x) \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(1-x) \leq -x \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow 2 - x^2 \leq 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[\text{ et } x \in I$$

$$\text{d'où } S =]-2; \sqrt{2}].$$

Propriétés algébriques de $\ln$

39. 1. a) $\ln 25 - \ln 15 = \ln\left(\frac{25}{15}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

b) $\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln 16 - \ln 5 = \ln\left(\frac{16}{15}\right)$

2. a) $4\ln 5 + 2\ln 5 + 3\ln 5 = 9\ln 5$

b) $3\ln 5 - \ln 5 - 2\ln 5 - 2\ln 5 = -2\ln 5$

40. 1. $3\ln 2 - \ln 9 + \ln 5 = \ln 2^3 - \ln 9 + \ln 5$

$$= \ln\left(\frac{8}{9} \times 5\right) = \ln\left(\frac{40}{9}\right)$$

2) $\ln 8 - 3\ln 4 + \ln \sqrt{2} = \ln 2^3 - \ln(2^2)^3 + \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$

$$= \ln\left(\frac{2^3}{2^6} \times 2^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(2^{-\frac{5}{2}}\right) = -\frac{5}{2}\ln(2)$$

41. a) $e^{2\ln 3 + \ln 4} = e^{\ln(3^2 \times 4)} = 36$

b) $e^{3\ln 2 - \ln 4} = e^{\ln\left(\frac{2^3}{4}\right)} = 2$

c) $\frac{e^{\ln 6 + 1}}{e^{\ln 9 + 2}} = e^{\ln 6 + 1 - \ln 9 - 2} = e^{\ln\left(\frac{6}{9}\right) - 1} = \frac{6}{9} \times \frac{1}{e} = \frac{2}{3e}$

d) $\frac{e^{2\ln 5 + \ln 3}}{e^{2\ln 3}} = \frac{e^{\ln(5^2 \times 3)}}{e^{\ln 3^2}} = \frac{5^2 \times 3}{3^2} = \frac{25}{3}$

42. $S = \sum_{k=1}^{100} \ln(k) - \ln(k+1)$

$$= \sum_{k=1}^{100} \ln(k) - \sum_{k=1}^{100} \ln(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \ln(k) - \sum_{k=2}^{101} \ln(k)$$

$$= \ln(1) + \sum_{k=2}^{100} \ln(k) - \sum_{k=2}^{100} \ln(k) - \ln(101)$$

$$= -\ln(101)$$

43. $\ln(e^x + 1) = \ln(e^x(1 + e^{-x}))$

$$= \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-x})$$

44. $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$ et $\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{a}\right)$ d'où

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a).$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$= \ln(a) - \ln(b)$$

45. $D_f = \{4 - x^2 > 0 \text{ et } 2 - x > 0\}$

$= \{-2 < x < 2 \text{ et } x < 2\} =]-2 ; 2[$

$D_g = \{2 + x > 0\} =]-2 ; +\infty[$

Les deux fonctions f et g n'ont pas le même ensemble de définition, elles ne sont donc pas égales.

Inéquations du type $q^n < a$

46. a) $n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln(10^{-4}) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-4})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ soit $n \geq 23$.

b) $n \ln\left(\frac{9}{7}\right) \geq \ln(10^6) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10^6)}{\ln\left(\frac{9}{7}\right)}$ soit $n \geq 55$.

c) $\left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{5}\right) \leq \ln(0,001)$
 $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$ soit $n \geq 14$.

d) $\ln(0,004) > 2n \ln\left(\frac{8}{9}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,004)}{2 \ln\left(\frac{8}{9}\right)}$ soit $n \geq 24$.

47. a) $\left(\frac{1}{5}\right)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{5}\right) \leq \ln(0,001)$
 $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$ soit $n \geq 5$.

b) $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n > 0,999999 \Leftrightarrow 10^{-6} > \left(\frac{2}{5}\right)^n$
 $\Leftrightarrow \ln(10^{-6}) > n \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-6})}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$ soit $n \geq 16$.

c) $1,2^{2n} > 10^5 \Leftrightarrow 2n \ln(1,2) > \ln(10^5)$
 $\Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^5)}{2 \ln(1,2)}$ soit $n > 32$.

d) $0,02 > \left(\frac{10}{11}\right)^n \Leftrightarrow \ln(0,02) > n \ln\left(\frac{10}{11}\right)$
 $\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,02)}{\ln\left(\frac{10}{11}\right)}$ soit $n \geq 42$.

48. $u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$
 On veut déterminer n tel que $2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n > 10^6$

$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{2}\right) > \ln\left(\frac{10^6}{2}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{10^6}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$ soit à partir de
 $n = 33$.

Tangentes, position relative de courbes

49. 1. $T_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1) ; y = 2x - 1$.

2. a) Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de T_1 revient à étudier le signe de
 $2 \ln x + 1 - (2x - 1) = 2 \ln x - 2x + 2$
 $= 2(\ln x - x + 1)$.

b) $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$; sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$.

$g'(x)$ est du signe de $1 - x$ qui est positif sur $]0 ; 1[$ et négatif sur $]1 ; +\infty[$; d'où g est croissante sur $]0 ; 1[$ et décroissante sur $]1 ; +\infty[$.

c) $g(1) = 0$, g admet un maximum nul, ce qui signifie que pour tout $x \in]0 ; +\infty[$; $g(x) \leq 0$.

d) La courbe $\mathcal{C}_f$ est alors en dessous de sa tangente $\mathcal{C}_1$.

50. 1. $T_e : y = g'(e)(x - e) + g(e)$ or $g'(x) = -\frac{3}{x} + 2$

d'où $T_e : y = \left(-\frac{3}{e} + 2\right)(x - e) + 2e - 7$ soit

$y = \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x + 3 - 2e + 2e - 7$

$y = \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x - 4$

$$2. \text{ a) } g(x) - \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x + 4 = -3\ln x + \frac{3}{e}x = 3\left(\frac{x}{e} - \ln x\right)$$

d'où étudier la position relative de $\mathcal{C}_g$ et de T_e revient bien à étudier le signe de $h(x)$.

$$\text{b) } h'(x) = 3\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{x}\right) = \frac{3(x-e)}{ex} \text{ puisque } 3 > 0 \text{ et } ex < 0$$

sur $]0; +\infty[$, étudier le signe de $h'(x)$ revient à étudier le signe de $x - e$.

x	0	e	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	-	0	+
Sens de variation de h			

c) On en déduit que le minimum de h sur $\mathbb{R}_+^*$ est 0 ce qui signifie que la fonction h est positive sur $]0; +\infty[$.

d) Puisque le signe de h correspond au signe de $g(x) - \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x - 4$ cela signifie que

$$g(x) - \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x - 4 \geq 0 \text{ donc } \mathcal{C}_g \text{ est au-dessus}$$

de T_e .

51. Il s'agit d'étudier le signe de

$$f(x) - g(x)\ln(2x+1) \geq \ln(4-x) \text{ et } x \in I = \left]-\frac{1}{2}; 4\right[$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 \geq 4-x \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in [1; 4[$$

la courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur

$$]1; 4[\text{ et strictement en dessous de } \mathcal{C}_g \text{ sur } \left]-\frac{1}{2}; 1\right[.$$

52. Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

$$\ln(x^2 + 2x + 1) \geq \ln(-3x + 15) \text{ et } x \in I =]-1; 5[$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq -3x + 15 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 14 \geq 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Delta = 81; x_1 = -7 \text{ et } x_2 = 2$$

On a alors :

$$x \in]-\infty; -7] \cup [2; +\infty[\text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \in [2; 5[.$$

Ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[2; 5[$ et strictement en-dessous sur l'intervalle $] -1; 2[$.

Étude de fonction avec ln

$$53. \text{ a) } f'(x) = \frac{1}{x}(x-2) + (\ln x + 3) \times 1$$

$$= 1 - \frac{2}{x} + \ln x$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)(3\ln x + 1) - (x - \ln x)\left(\frac{3}{x}\right)}{(3\ln x + 1)^2}$$

$$= \frac{3\ln x - 2 - \frac{1}{x}}{(3\ln x + 1)^2} = \frac{3x\ln x - 2x - 1}{x(3\ln x + 1)^2}$$

$$\text{c) } f'(x) = 3(\ln(x) - 2x + 1)^2 \times \left(\frac{1}{x} - 2\right)$$

$$= \frac{3(1 - 2x)(\ln(x) - 2x + 1)^2}{x}$$

$$\text{d) } f'(x) = \frac{3 - 1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{2\sqrt{3x - x\ln(x)}} = \frac{2 - \ln x}{2\sqrt{3x - x\ln(x)}}$$

$$54. 1. \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{4}{x} = -\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

par somme de limites.

$$2. f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}; f'(x) \text{ est positif comme somme}$$

de termes positifs sur $]0; +\infty[$. Par conséquent la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$55. g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - (\ln x + 1) \times \frac{1}{x}}{(\ln x - 1)^2}$$

$$= \frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x - 1)^2} = -\frac{2}{x(\ln x - 1)^2}$$

sur D_g , $x > 0$ et $(\ln x - 1)^2 > 0$ donc $g'(x) < 0$. La fonction g est donc strictement décroissante sur D_g .

$$56. 1. g'(x) = 2(\ln x) \times \frac{1}{x} - \frac{6}{x} = \frac{2\ln x - 6}{x}$$

Sur $]0 ; +\infty[$, $x > 0$: le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $2\ln x - 6$.

$$2\ln x - 6 > 0 \Leftrightarrow x \in [e^3 ; +\infty[$$

x	0	e^3	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Sens de variation de g			

2. a) Sur l'intervalle $]0 ; e^3[$, la fonction g est strictement décroissante, continue et pour tout $x \in]0 ; e^3[$; $g(x) \in I =]-4 ; +\infty[$. Or $0 \in I$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0 ; e^3[$. De même on montre que sur l'intervalle $]e^3 ; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution. Par conséquent l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $]0 ; +\infty[$.

b) $X = \ln x$

L'équation $g(x) = 0$ devient alors $X^2 - 6X + 5 = 0$

$$\Delta = 16 ; X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 5 \text{ soit}$$

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e \text{ et } \ln x = 5 \Leftrightarrow x = e^5.$$

$$S = \{e ; e^5\}$$

Limites simples et indéterminées

57. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

donc par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln(x) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln(x) - 4 = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissance comparée

et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} = +\infty$ donc par somme des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) + \frac{3}{x} = +\infty.$$

c) $5x^2 \ln(x) - 4x^2 = x^2(5\ln(x) - 4)$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5\ln(x) - 4 = +\infty$ donc par produit des limites

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(5\ln(x) - 4) = +\infty$ d'où

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 \ln(x) - 4x^2 + 1 = +\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow 3} x - 3 = 0^+$

d'où $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-3)}{x-3} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X)}{X} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3} 3x = 9$ donc

par somme des limites on a $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x-3)}{x-3} + 3x = -\infty$.

58. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - 4x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} 3 - 4x = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}} f(x) = -\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} 2 - x = 3$ et $\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0^+$ donc par quotient

de limites $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2-x}{x+1} = +\infty$ or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 2} 2 - x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3$ donc par quotient de

limites $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x+1} = 0$

or $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$.

59. a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -5\ln x = +\infty$ donc par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 - 5\ln x + 1 = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ par croissance comparée et

$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} = -\infty$ donc par somme des limites

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x - \frac{1}{x} = -\infty$.

c) $\frac{\ln x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\ln x \left(1 - \frac{4}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{4}{x}}$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{4}{x} = 1$ donc par quotient des

limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2}{\ln x - 4} = 1$.

$$d) \frac{\frac{1}{2} \ln x}{\ln 2 + \ln x} = \frac{\frac{1}{2} \ln x}{\ln x \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln x}\right)} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln x}\right)}$$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{\ln x} = 0$ d'où par somme des limites :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln 2}{\ln x} = 1$ et par quotient des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\ln(2x)} = \frac{1}{2}.$$

e) [ERRATUM] L'expression utilisée dans la première édition du manuel est fautive et a été corrigée sur les éditions suivantes, les éditions suivantes et la correction ci-dessous utilisent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 + 2 \ln x$$

$$\ln x (\ln x + 2)$$

or $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x + 2 = -\infty$ donc par produit des

limites $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 + 2 \ln x = +\infty$.

f) $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} X^2 \ln X = 0$ par croissance comparée donc $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \ln(x - 1) = 0$.

$$60. 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \text{ avec}$$

$$f(x) = \ln(1+x). \text{ Or } f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\text{donc } f'(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{\ln(5x)}{5x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{\ln((5x - 1) + 1)}{5x - 1} \text{ or } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} 5x - 1 = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(X+1)}{X} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{5}} \frac{\ln(5x)}{5x - 1} = 1.$$

Dérivées de fonctions du type $\ln u$

$$61. a) D_f = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[; f'(x) = \frac{8}{8x - 4} = \frac{2}{2x - 1}$$

$$b) D_f = \mathbb{R}; f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$c) D_f =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[;$$

$$f'(x) = \frac{1 \times (2x + 4) - (x - 1) \times 2}{\frac{(2x + 4)^2}{x - 1}} = \frac{6}{(2x + 4)(x - 1)}$$

$$d) D_f =]0; +\infty[; f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$62. a) D_f =]-\infty; 4[$$

$$\text{et } f'(x) = \frac{\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}}{(\sqrt{4-x})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}(4-x)}$$

$$b) D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \ln 2x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x > 1\} = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\text{et } f'(x) = \frac{\frac{2}{2x}}{\ln 2x} = \frac{1}{x \ln 2x}.$$

$$c) D_f = \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 2x \ln(e^x + 1) + x^2 \frac{e^x}{e^x + 1} = 2x \ln(e^x + 1) + \frac{x^2 e^x}{e^x + 1}$$

$$d) D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0 \text{ et } x^2 - 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\cup]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[\}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}(x^2 - 1) - \ln(x^2 - 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x(1 - \ln(x^2 - 1))}{(x^2 - 1)^2}$$

$$e) D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

$$f'(x) = \frac{2(4x - 1) \times 4}{(4x - 1)^2} = \frac{8}{4x - 1}$$

$$f) D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0\} =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$f'(x) = 3(\ln(x^2 - 1))^2 \times \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{6x(\ln(x^2 - 1))^2}{x^2 - 1}$$

Exercices d'entraînement p. 186-191

La fonction $\ln$

63. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -(1+e)\ln x = +\infty$

donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$f(x) = \ln x (\ln x - (1+e)) + e$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - (1+e)) = +\infty$ donc par pro-

duit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) $f'(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x} - \frac{1+e}{x} = \frac{2\ln x - 1 - e}{x}$

b) Sur $]0 ; +\infty[$; $x > 0$ le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $2\ln x - 1 - e$.

$2\ln x - 1 - e > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1+e}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1+e}{2}}$

x	0	$e^{\frac{1+e}{2}}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$+\infty \swarrow \quad \searrow \quad \nearrow +\infty$ $-\frac{(e-1)^2}{4}$		

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1+e}{2}\right) &= \frac{(1+e)^2}{4} - \frac{(1+e)^2}{2} + e \\ &= \frac{-(1+e)^2 + 4e}{4} \\ &= \frac{-e^2 + 2e - 1}{4} \\ &= -\frac{(1+e)^2}{4} \end{aligned}$$

c) Sur l'intervalle $\left]0 ; \frac{1+e}{2}\right]$, f est une fonction strictement décroissante et continue, de plus pour tout $x \in \left]0 ; \frac{1+e}{2}\right]$, $f(x) \in \left]-\frac{(e-1)^2}{4} ; +\infty\right[$; or $0 \in \left]-\frac{(e-1)^2}{4} ; +\infty\right[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left]0 ; \frac{1+e}{2}\right]$. De même,

on montre que sur l'intervalle $\left]\frac{1+e}{2} ; +\infty\right[$,

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. Conclusion : f admet deux antécédents de 0 sur $]0 ; +\infty[$.

d) Il s'agit de résoudre l'équation

$(\ln x)^2 - (1+e)\ln x + e = 0$.

On pose $X = \ln x$, l'équation revient alors à résoudre : $X^2 - (1+e)X + e = 0$

$\Delta = (1+e)^2 - 4e = 1 - 2e + e^2 = (1-e)^2$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(1-e)^2} = |1-e| = e-1$

D'où $X_1 = \frac{1+e-(e-1)}{2} = 1$ et $X_2 = \frac{1+e+(e-1)}{2} = e$.

Soit $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ ou $\ln x = e \Leftrightarrow x = e^e$.

Conclusion : on retrouve bien deux antécédents pour 0 dont les valeurs exactes sont e et e^e .

64. A. 1. $g'(x) = 6x^2 + \frac{2}{x}$; sur $]0 ; +\infty[$, $g'(x)$ est strictement positive comme somme de termes positifs, la fonction g est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x^3 - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

La fonction g est donc strictement croissante et continue sur $]0 ; +\infty[$, de plus pour tout $x \in]0 ; +\infty[$; $g(x) \in \mathbb{R}$; or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

À l'aide de la calculatrice on a : $\alpha \approx 0,86$.

3.

x	0	α	$+\infty$
Sens de variation de g	$\nearrow$ 0		
Signe de g	-	0	+

B. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln x}{x^2} = +\infty$ donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée, donc par somme des limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - 2x = -\frac{\ln x}{x^2}$; or pour tout $x \in]0 ; +\infty[$; $x^2 > 0$. Le signe de cette différence ne dépend donc que du signe de $-\ln x$. Sur $]0 ; 1[$, $-\ln x > 0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est donc strictement au-dessus de Δ . Sur $]1 ; +\infty[$, $-\ln x < 0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est donc strictement en-dessous de Δ .

$$\begin{aligned}
 3. f'(x) &= 2 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = 2 - \frac{x - 2x \ln x}{x^4} \\
 &= 2 - \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{2x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}
 \end{aligned}$$

Or sur $]0 ; +\infty[$, $x^3 > 0$, le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $g(x)$.

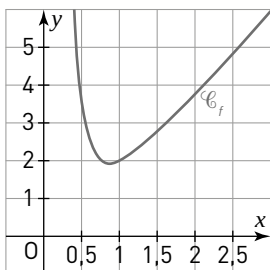
4.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

Avec $f(\alpha) = \frac{6\alpha^3 - 1}{2\alpha^2}$ car $2\alpha^3 - 1 + 2 \ln \alpha = 0$ soit

$$\ln \alpha = \frac{1}{2} - \alpha^3.$$

5.



65. 1. $g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$; sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $g'(x)$

est strictement positive comme somme de termes positifs, donc la fonction g est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

Or $g(1) = 0$; le minimum de g étant nul cela signifie que la fonction g est positive sur $[1 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 2. a) f'(x) &= 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} \\
 &= \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}
 \end{aligned}$$

b) Puisque la fonction g est positive sur $[1 ; +\infty[$; et que $x^2 > 0$; alors $f'(x) \geq 0$ sur $[1 ; +\infty[$; par conséquent la fonction f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

c) Il s'agit d'étudier le signe de $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$.

Sur $[1 ; +\infty[$, $x > 0$ et $-\ln x < 0$ par conséquent $f(x) - x < 0$ sur $[1 ; +\infty[$, ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite D sur $[1 ; +\infty[$.

$$3. a) M_k \left(k ; k - \frac{\ln k}{k} \right) \text{ et } N_k(k ; k)$$

$$\text{d'où } M_k N_k = k - \left(k - \frac{\ln k}{k} \right) = \frac{\ln k}{k}.$$

b)

```

N ← 2
D ← ln 2 / 2
Tant que D > 10^-2
    N ← N + 1
    D ← ln N / N
Fin du Tant que
    
```

On trouve $k_0 = 648$.

66. A. 1. $f(1) = 3$; $f'(1) = 2$ et $f(2) = 4 \ln 2 + 1$.

$$2. f(1) = 3 \Leftrightarrow b + c = 3$$

$$f'(x) = \frac{a}{x} + b \text{ d'où}$$

$$f'(1) = 2 \Leftrightarrow a + b = 2$$

$$f(2) = 4 \ln 2 + 1 \Leftrightarrow a \ln 2 + 2b + c = 4 \ln 2 + 1$$

Par identification : $a = 4$ et $2b + c = 1$.

On doit alors résoudre :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ b + c = 1 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

on a alors : $f(x) = 4 \ln x - 2x + 5$.

$$3. S = [1 ; 3,5]$$

B. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -2x + 5 = 5$ donc par somme des limites $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

$$g(x) = x \left(\frac{4 \ln x}{x} - 2 \right) + 5$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissance comparée donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln x}{x} - 2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ d'où par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2. et 3. $g'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$ sur $]0; +\infty[$ $x > 0$ donc

le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $2-x$.

x	0	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	0 -
Sens de variation de g			

4. $g(1) = 2 \ln 1 - 1 + 1 = 0$

1 est donc bien solution de l'équation $g(x) = 0$.

5. La fonction g est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$ et continue ; de plus pour tout $x \in [2; +\infty[$ on a $g(x) \in]-\infty; 2 \ln 2 - 1]$ or $x \in I$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

$\alpha \approx 3,51$

6.

x	0	1	2	$+\infty$
Sens de variation de g				
Signe de g	-	0	+	0 -

7. $f(x) \geq 3 \Leftrightarrow 4 \ln x - 2x + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2 \ln x - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0$

$S = [1; \alpha]$

67. 1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -2 \ln x = +\infty$

donc par somme des limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$f(x) = \ln x (\ln x - 2)$; or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 2 = +\infty$,

donc par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale, l'axe des ordonnées.

2. a) $f'(x) = 2 \ln x \times \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2 \ln x - 2}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$

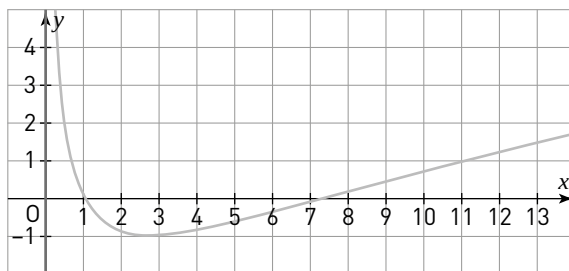
b) Sur $]0; +\infty[$, $x > 0$ et $2 > 0$: le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $\ln x - 1$.

$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		-	0 +
Sens de variation de f			

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x (\ln x - 2) = 0$; il s'agit d'une équation produit nul ; $\ln x = 0$ ou $\ln x - 2 = 0$; $S = \{1; e^2\}$.

4.



68. 1. $e^x - x^n = 0$ avec $x \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow e^x = x^n$; $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow x = n \ln x$; $x \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \frac{x}{n} = \ln x$; $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\Leftrightarrow \ln x - \frac{x}{n} = 0$; $x \in \mathbb{R}_+^*$

2. $f(x) = \ln x - \frac{x}{n}$; on a $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n}$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{n} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{n} \Leftrightarrow x < n$

x	0	n	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0 -
Sens de variation de f			

pour la limite de f en $+\infty$: $f(x) = x \left(-\frac{1}{n} + \frac{\ln x}{x} \right)$.

Afin que l'équation (E_1) admette deux solutions il faut que $\ln n - 1 > 0$ afin que le théorème des valeurs intermédiaires puisse être appliqué.
 $\ln n > 1 \Leftrightarrow n > e$ soit $n \geq 3$.

69. 1. a) $f(1) = 2$; $f'(1) = 0$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{(b-a) - b \ln x}{x^2}$$

$$\text{c) } f(1) = 2 \Leftrightarrow a = 2$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow (b-a) = 0 \text{ avec } a = 2$$

$$\text{on a alors } b = 2 ; f(x) = \frac{2 + 2 \ln x}{x}$$

$$\text{2. a) } f'(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} ; \text{ puisque } \frac{2}{x^2} > 0 \text{ sur }]0 ; +\infty[;$$

$f'(x)$ a alors le même signe que $-\ln x$ c'est-à-dire $f(x) > 0$ pour $x \in]0 ; 1[$ et $f(x) < 0$ pour $x \in]1 ; +\infty[$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} 2 + 2 \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+ \text{ donc par quotient}$$

$$\text{des limites } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 2 \ln x}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

donc par somme des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

c)

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Sens de variation de f			

3. a) Sur l'intervalle $]0 ; 1[$; la fonction f est strictement croissante et continue, de plus pour tout $x \in]0 ; 1[$; $f(x) \in]-\infty ; 2[$ or $0 \in]-\infty ; 2[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0 ; 1[$.

b) À l'aide de la calculatrice, en traçant la courbe $\mathcal{C}_f$ et en cherchant la valeur de l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 1$; on détermine : $5 < \beta < 6$.

4. a) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur à la 5^e ligne du programme, les éditions suivantes sont corrigées et on lit : $a = 0$.

Cette fonction Python permet de calculer l'image de x par f .

b) Ce programme permet de déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.

c) Il faudrait changer :

$$b - a > 0,1 \text{ en } b - a > 0,01$$

et l'instruction if serait à changer sous la forme :

```

if f(m) > 1 :
    a = m
else :
    b = m
    
```

$$\begin{aligned} \text{70. 1. } g'(x) &= -\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{\frac{2}{x} \times x - 2 \ln x \times 1}{x^2} \\ &= -\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} \\ &= \frac{-3x - 2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{-3x - 2 \ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{2. a) } h'(x) = -3 - \frac{2}{x} ; \text{ puisque } x \in]0 ; +\infty[\text{ alors}$$

$h'(x) < 0$ comme somme de termes négatifs.

La fonction h est donc décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} -3x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} -2 \ln x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

par somme des limites.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln x = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$$

par somme des limites.

Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ la fonction h est strictement décroissante et continue, de plus pour tout $x \in]0 ; +\infty[$; $f(x) \in \mathbb{R}$; or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α .

c)

x	0	α	$+\infty$
Sens de variation de h	$+\infty$	0	$-\infty$
Signe de h	+	0	-

3. a) Le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $h(x)$ puisque $x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Sens de variation de g			

La fonction g est donc strictement croissante sur $]0; \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

$$\text{b) } h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -3\alpha - 2\ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = -\frac{3}{2}\alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Or } g(\alpha) &= 3 - 3\ln \alpha + \frac{2}{\alpha} + \frac{2\ln \alpha}{\alpha} \\ &= 3 - 3 \times \left(-\frac{3}{2}\alpha\right) + \frac{2}{\alpha} + \frac{\left(2 \times \left(-\frac{3}{2}\alpha\right)\right)}{\alpha} \\ &= 3 + \frac{9}{2}\alpha + \frac{2}{\alpha} - 3 = \frac{4,5\alpha^2 + 2}{\alpha}. \end{aligned}$$

D'après le tableau de variation, on en déduit donc que la fonction g admet un maximum en α valant

$$g(\alpha) = \frac{4,5\alpha^2 + 2}{\alpha}.$$

Fonctions du type $\ln(u(x))$

71. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur. Les éditions suivantes sont corrigées et on utilise l'ensemble de définition $[1; +\infty[$, ainsi que la fonction g utilisant $\ln\left(\frac{1}{x^2 + x - 1}\right)$.

1. Pour que les deux courbes s'interceptent il faut que $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x^2 + 50x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x^2 + x - 1}\right)$
 $\Leftrightarrow \ln(x^2 + 50x) = \ln(x^2 + x - 1)$
 $\Leftrightarrow x^2 + 50x = x^2 + x - 1$ et $x \in [1; +\infty[$
 $\Leftrightarrow 49x = -1$ et $x \in [1; +\infty[$
 $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{49}$ et $x \in [1; +\infty[$ ce qui est

impossible ; par conséquent il n'existe pas de point de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en lequel les deux courbes s'interceptent.

2. a) La distance AB tend vers 0.

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 50x}\right) \\ \text{or } \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 50x} &= \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{50}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{50}{x}} \end{aligned}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{50}{x} = 1 \text{ donc par quotient}$$

$$\text{des limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 50x} = 1.$$

Or $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$ ce qui signifie que cette distance AB tend vers 0.

72. 1. La fonction $\mathcal{C}_g$ passe par le point A(0 ; 1) : cela signifie que $g(0) = 1 \Leftrightarrow \ln(b) = 1 \Leftrightarrow b = e$. Le fait que la courbe $\mathcal{C}_g$ admette au point d'abscisse 1 la droite d comme tangente signifie que $g'(1) = 2$.

$$\text{Or } g'(x) = \frac{a}{ax + b} \text{ d'où } g'(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{a + b} = 2$$

$$\text{or } b = e \text{ d'où } \frac{a}{a + e} = 2 \Leftrightarrow a = 2a + 2e \Leftrightarrow a = -2e.$$

On a alors

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(-2ex + e) = \ln(e(-2x + 1)) \\ &= \ln e + \ln(-2x + 1) = 1 + \ln(-2x + 1). \end{aligned}$$

$$\text{2. } D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid -2x + 1 > 0\} = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[= I$$

$$g'(x) = -\frac{2e}{-2ex + e} = \frac{2}{2x - 1}; \text{ le signe de } g'(x) \text{ est donc}$$

le même que celui de $2x - 1$.

$$\text{Or sur l'intervalle } \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[, 2x - 1 < 0 \text{ soit}$$

$g'(x) < 0$: par conséquent la fonction g est strictement décroissante sur I .

73. 1. Afin que f soit bien définie sur $\mathbb{R}$, il faut que $e^{-x} + 1 > 0$ or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc $e^{-x} + 1 > 0$ sur tout $\mathbb{R}$.

$$\text{2. a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + 1 = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

b) $\mathcal{C}_f$ admet donc l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

3. a) $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $e^{-x} + 1 > 0$ donc $f'(x) < 0$, la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. a) $f(x) = \ln(e^{-x}(1 + e^x)) = \ln(e^{-x}) + \ln(1 + e^x)$
 $= -x + \ln(1 + e^x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et

$\lim_{x \rightarrow -1} \ln X = 0$.

Par conséquent $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = 0$ donc la droite d

d'équation $y = -x$ est asymptote à la courbe en $-\infty$.

c) $f(x) - (-x) = \ln(1 + e^x)$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x > 1$ alors $\ln(1 + e^x) > 0$ ce qui signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite d sur $\mathbb{R}$.

74. 1. $\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0$ or $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$ d'où

$\lim_{x \rightarrow -1} -2\ln(x + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}$ donc par

somme des limites on a $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$.

$f(x) = (x + 1) \left(\frac{1}{2} - \frac{2\ln(x + 1)}{x + 1} \right) + \frac{1}{2}$ or $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ par

croissance comparée

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{2\ln(x + 1)}{x + 1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$ par pro-

duit on en déduit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x + 1} = \frac{x + 1 - 4}{2(x + 1)} = \frac{x - 3}{2(x + 1)}$

x	-1	3	$+\infty$	
$x - 3$	$-$	0	$+$	
$2(x - 1)$	0	$+$	$+$	
Signe de $f'(x)$	$ $	$-$	0	$+$
Sens de variation de f	$+\infty \searrow \frac{5}{2} - 2\ln 4 \nearrow +\infty$			

3. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur la droite d'équation $y = x$ est utilisée. Les versions suivantes ainsi que la correction ci-dessous utilisent la droite d'équation $y = -x$.

Il s'agit de résoudre l'équation :

$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{x - 3}{2(x + 1)} = -1 ; x \in]-1 ; +\infty[$

$\Leftrightarrow x - 3 = -2(x + 1) ; x \in]-1 ; +\infty[\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} ;$
 $x \in]-1 ; +\infty[$. Il existe donc une tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$, parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

$T_{\frac{1}{3}} : y = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$y = -\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6} - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right) = -x + \frac{3}{2} - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

4. $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = -2\ln(x + 1)$

Pour tout $x \in]-1 ; 0[$ on a $0 < x + 1 < 1$ donc $\ln(x + 1) < 0$ et pour tout $x \in]0 ; +\infty[$ on a $\ln(x + 1) > 0$ par conséquent la courbe $\mathcal{C}$ est strictement en-dessous de la droite d sur l'intervalle $]-1 ; 0[$ et strictement au-dessus sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

75. 1. $f(-1) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(a - b + c) = \ln 2$
 $\Leftrightarrow a - b + c = 2$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{7}{8}\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{16} - \frac{b}{4} + c\right) = \ln\left(\frac{7}{8}\right)$

$\ln\left(\frac{7}{8}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{2} - 2b + 8c = 7$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(c) = 0 \Leftrightarrow c = 1$

Il s'agit de résoudre

$\begin{cases} a - b + 1 = 2 \\ \frac{a}{2} - 2b + 8 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a - 4b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \text{ } L_1 - L_2 \\ a = 2 \end{cases}$

on a alors $f(x) = \ln(2x^2 + x + 1)$.

2. $f'(x) = \frac{4x + 1}{2x^2 + x + 1}$

Signe de $2x^2 + x + 1 : \Delta = -7$ ce qui signifie que le polynôme est toujours du signe de $a = 2$; donc toujours positif, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $4x + 1$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$+\infty \rightarrow \ln\left(\frac{7}{8}\right) \rightarrow +\infty$		

$$f(x) = x^2 \left(2 + \frac{1}{x} \right) + 1 \quad \text{or} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$$

donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + x + 1 = +\infty \quad \text{or} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty \quad \text{donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$f(-1) = \ln(2 \times 1 - 1 + 1) \ln 2$$

$$f(0) = \ln 1 = 0$$

76. [ERRATUM] Sur la première édition du manuel, la courbe affichée pour cet exercice n'est pas la bonne. Cette erreur est corrigée sur les éditions suivantes.

$$1. f(-x) = \ln\left(\frac{5+x}{5-x}\right) = -\ln\left(\frac{1}{\frac{5+x}{5-x}}\right) = -\ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right) \quad \text{on en}$$

déduit donc $f(-x) = -f(x)$ autrement dit la fonction f est impaire ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

$$2. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -5^+} 5+x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -5} 5-x = 10 \quad \text{or} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{10}{x} = +\infty$$

donc $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = +\infty$.

Ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ admet la droite $d : x = -5$ comme asymptote verticale.

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \frac{\frac{-(5+x) - (5-x)}{(5+x)^2}}{\frac{5-x}{5+x}} = \frac{-10}{(5+x)^2} \times \frac{5+x}{5-x} \\ &= \frac{-10}{(5+x)(5-x)} \end{aligned}$$

Sur $]-5; 0[$ on a $5-x > 0$; $5+x > 0$ donc $f'(x) < 0$; la fonction f est donc décroissante sur $]-5; 0[$.

$$\text{c) } T_0 : y = f'(0)x + f(0) = -0,4x.$$

3. a) sur l'intervalle $]-5; 0[$ la tangente semble être au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$ et sur l'intervalle $0; 5[$ la tangente semble être en dessous.

b) Il faut étudier le signe de

$$f(x) - 0,4x = \ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right) + 0,4x, \quad \text{il s'agit donc bien d'étudier le signe de } h.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } h'(x) &= \frac{-10}{(5+x)(5-x)} + \frac{2}{5} \\ &= \frac{-50 + 2(5+x)(5-x)}{5(5+x)(5-x)} = \frac{-2x^2}{5(5+x)(5-x)}. \end{aligned}$$

d)

x	-5	0	5
Signe de $-2x^2$	-	0	-
Signe de $5(5+x)(5-x)$	0	+	+
Signe de $h'(x)$	0	-	-
Sens de variation de h	$0 \rightarrow$		

e) Sur $]-5; 0[$, $h(x) > 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente. Sur $0; 5[$; $h(x) < 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de la tangente.

77. A. Il semble y avoir deux solutions α et β vérifiant $-1 < \alpha < 0$ et $0 < \beta < 1$.

$$\text{B. 1. a) } x^2 + x^3 = x^2(1+x)$$

Pour tout $x \in]-\infty; -1[$ on a $x^2 + x^3 < 0$. Sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ on a $x^2 + x^3 > 0$ et l'expression s'annule en -1 et 0 .

b) Sur l'intervalle $]-\infty; -1[$, puisque $3(x^2 + x^3)$ est négatif, l'équation n'a pas de solution car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$.

c) en 0 , le membre de droite $3(x^2 + x^3)$ est nul, tandis que le membre de gauche est strictement positif, donc 0 n'est pas solution de (E) .

2. Pour tout $x \in I =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$,

$$3(x^2 + x^3) > 0.$$

$$(E) \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3(x^2 + x^3)) \quad \text{et} \quad x \in I$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln(x^2(1+x)) \quad \text{et} \quad x \in I$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) \quad \text{et} \quad x \in I$$

$$\Leftrightarrow \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x = 0 \quad \text{et} \quad x \in I$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1+x) = -\infty$ donc par somme de limites

$$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2) = -\infty$ donc par somme des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty.$$

$$h(x) = x \left(\frac{2 \ln(x)}{x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x} - 1 \right) + \ln 3$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

$\frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x} = 1$ par produit et somme de limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$.

$$\begin{aligned} \text{b) } h'(x) &= \frac{2}{x} + \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{2(1+x) + x - (1+x)x}{x(1+x)} \\ &= \frac{2+3x-x-x^2}{x(1+x)} = \frac{-x^2+2x+2}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \Delta = 12; x_1 = 1 + \sqrt{3} \text{ et } x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

x	-1	x_2	0	x_1	$+\infty$
$-x^2+2x+2$	-	0	+	+	0
$x(x+1)$	0	-	-	0	+
Signe de $h'(x)$		+	0	-	+
Sens de variation de h		$\nearrow$ $-\infty$	$\searrow$ $-\infty$	$\nearrow$ $-\infty$	$\searrow$ $-\infty$

$$h(x_2) \approx -0,11 < 0 \text{ et } h(x_1) \approx 1,69 > 0.$$

d) Sur l'intervalle $]-1; 0[$, la fonction h est négative donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution. Sur l'intervalle $]0; x_1[$, la fonction h est strictement croissante et continue, de plus pour tout $x \in]0; x_1[$, on a $h(x) \in]-\infty; h(x_1)[$ or $0 \in]-\infty; h(x_1)[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle. De même on démontre que sur l'intervalle $]x_1; +\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution β .

$$\alpha \approx 0,62 \text{ et } \beta \approx 7,12.$$

e) La conjecture faite au A. ne pouvait pas être complète car la fenêtre graphique ne permet pas de voir les courbes pour $x > 6$, or la deuxième solution trouvée est supérieure à 7.

Quant à l'éventuelle solution sur $]-1; 0[$; il aurait fallu un pas plus précis sur l'axe des ordonnées afin de mieux voir que les deux courbes ne s'intersectent pas à cet endroit.

$$\text{78. 1. } D_f = \{x \in \mathbb{R}; 2x+1 > 0 \text{ et } x-4 > 0\}$$

$$=]4; +\infty[\text{ et } D_g = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{2x+1}{x-4} > 0 \right\}$$

$$=]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]4; +\infty[. \text{ Puisque } D_f \neq D_g \text{ les}$$

deux fonctions ne sont donc pas égales.

$$\text{2. a) } \lim_{x \rightarrow 4} x - 4 = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 4} 2x + 1 = 9 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 4} g(x) = +\infty.$$

$$g(x) = \frac{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{4}{x} \right)} = \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x}} \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{4}{x} = 1 \text{ donc par quotient et composée des}$$

$$\text{limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln 2.$$

$$\text{b) } g'(x) = f'(x) \text{ sur }]4; +\infty[\text{ soit}$$

$$g'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x-4} = \frac{-9}{(2x+1)(x-4)}.$$

$$\text{3. a) Il s'agit de résoudre l'équation } g'(x) = m$$

$$\Leftrightarrow \frac{-9}{(2x+1)(x-4)} = m \Leftrightarrow \frac{-9 - m(2x+1)(x-4)}{(2x+1)(x-4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2mx^2 + 7mx + 4m - 5}{(2x+1)(x-4)} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2mx^2 + 7mx + 4m - 5 = 0; x \in]4; +\infty[.$$

$$\Delta = (7m)^2 - 04 \times (-2m) \times (4m - 5)$$

$$= 81m^2 - 40m = m(81m - 40)$$

$$m_1 = 0 \text{ et } m_2 = \frac{40}{81}.$$

$$\text{Pour tout } m \in]-\infty; 0[\cup \left] \frac{40}{81}; +\infty \right[\text{ on a } \Delta > 0.$$

L'équation admet donc deux solutions distinctes, donc pour ces valeurs de m , il existe deux tangentes parallèles à la droite d_m .

$$\text{Pour } m = 0 \text{ ou } m = \frac{40}{81}; \Delta = 0 \text{ ce qui signifie que}$$

$$\text{l'équation n'a qu'une seule solution et donc il existe une seule tangente parallèle à } d_m \text{ pour ces}$$

$$\text{valeurs de } m. \text{ Pour tout } m \in \left] 0; \frac{40}{81} \right[\text{ on a } \Delta < 0$$

$$\text{ce qui signifie que l'équation n'a aucune solution, donc pour ces valeurs de } m \text{ il n'existe aucune}$$

$$\text{tangente parallèle à } d_m.$$

b) Les tangentes à $\mathcal{C}_g$ ont pour équation

$$y = g'(a)(x - a) + g(a)$$

$$\text{soit } y = \frac{-9}{(2a+1)(a-4)}(x-a) + \ln \frac{2a+1}{a-4}.$$

Afin que la tangente passe par l'origine du repère

$$\text{il faut que } \frac{9a}{(2a+1)(a-4)} + \ln \frac{2a+1}{a-4} = 0.$$

$$\text{Utilisons } h(x) = \frac{9x}{(x-4)(2x+1)} + \ln \frac{2x+1}{x-4}.$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{9(x-4)(2x+1) - 9x(4x-7)}{(x-4)^2(2x+1)^2} + \frac{-9}{(2x+1)(x-4)} \\ &= \frac{9(x-4)(2x+1) - 9x(4x-7) - 9(2x+1)(x-4)}{(x-4)^2(2x+1)^2} \\ &= \frac{-9x(4x-7)}{(x-4)^2(2x+1)^2} \end{aligned}$$

Le signe de $h'(x)$ ne dépend que du signe de $-9x(4x-7)$ qui est toujours négatif sur $]4; +\infty[$.

x	4	$+\infty$
Sens de variation de h	$\ln 2$	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 4} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{(x-4)(2x+1)} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln 2 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ln 2.$$

Sur l'intervalle $]4; +\infty[$ la fonction h est strictement croissante et continue, de plus pour tout $x \in]4; \infty[$, $h(x) \in]-\infty; \ln 2[$ or $0 \in]-\infty; \ln 2[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α . Il existe donc une tangente à $\mathcal{C}_g$ en α passant par l'origine du repère.

ln et suites

79. A. 1. a) $f(x) = (1+2x) \left(\frac{\ln(1+2x)}{1+2x} - \frac{x}{1+2x} \right)$

$$= (1+2x) \left(\frac{\ln(1+2x)}{1+2x} - \frac{1}{\frac{1}{1+2x} + 2} \right) \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1+2x = +\infty \text{ or}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{1+2x} = 0 \text{ par croissance comparée donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{1+2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{1+2x} + 2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1+2x = +\infty$$

d'où par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

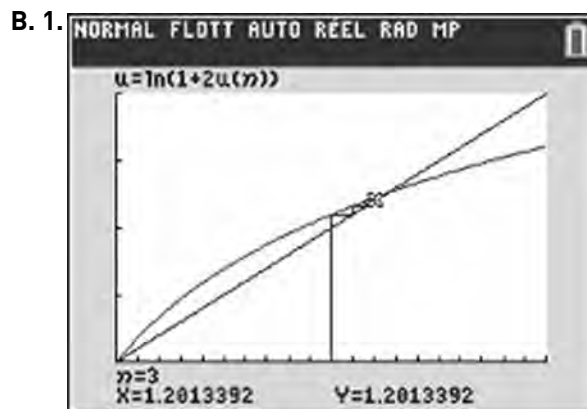
b) $f'(x) = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{1-2x}{1+2x}$

Sur $]0; +\infty[$, $1+2x > 0$ le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $1-2x$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-	-	-
Sens de variation de f	0	$\ln 2 - \frac{1}{2}$			$+\infty$

2. $f(1) = \ln 3 - 1 > 0$ et $f(2) = \ln 5 - 2 < 0$.

Sur l'intervalle $[1; 2]$, la fonction f est strictement décroissante et continue, de plus $f(1) > 0$ et $f(2) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 2]$, à l'aide de la calculatrice on détermine $\alpha \approx 1,26$.



La suite (u_n) semble croissante et converger vers $\ell \approx 1,2$.

2. $P(n) = \{n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2\}$

Initialisation : $u_1 = g(u_0) = g(1) = \ln 3 > 1$ et $\ln 3 > 2$ donc $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$ d'où $P(0)$ est vérifiée.

Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est encore vraie.

La fonction g est strictement croissante sur

$$[0 ; +\infty[\text{ car } g'(x) = \frac{2}{1+2x} > 0.$$

$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ d'après l'hypothèse de récurrence, or g est une fonction strictement croissante : $g(1) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(2)$ or $g(1) = \ln 3 > 1$ et $g(2) = \ln 5 < 2$ d'où $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$ d'où $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Puisque $u_n \leq u_{n+1}$ cela signifie que la suite (u_n) est croissante ; de plus elle est majorée par 2 donc la suite est convergente.

Soit ℓ la limite de cette suite, on montre alors que ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow \ln(1+2x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0$$

D'après la partie A, cette équation admet une unique solution α sur $[1 ; 2]$; donc $\ell = \alpha \approx 1,26$.

80. A. 1. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\ln(x^2 + 1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ donc par somme des limites on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

$$\text{b) } h'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

x	2	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	
Sens de variation de h	3	$+\infty$
Signe de $h(x)$	+	

Sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, $h(x) > 0$.

$$\text{c) } f(x) > x - \ln(x^3) \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) > x - \ln(x^3) \\ \Leftrightarrow \ln(x^3) - \ln(x^2 + 1) > 0$$

$$\text{Or } \ln(x^3) - \ln(x^2 + 1) = \ln\left(\frac{x^3}{x^2 + 1}\right) \text{ sur l'intervalle}$$

$I = [2 ; +\infty[$ cela revient alors à résoudre

$$\ln\left(\frac{x^3}{x^2 + 1}\right) > \ln(1) \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2 + 1} > 1 ; x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^3 > x^2 + 1 ; x \in I \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 1 > 0 ; x \in I.$$

Or sur I , $h(x) > 0$, on peut donc en déduire que pour tout $x > 2$, $f(x) > x - \ln(x^3)$.

$$\text{d) } x - \ln(x^3) = x - 3\ln x = x \left(1 - \frac{3\ln x}{x}\right)$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ par croissance comparée donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3\ln x}{x} = 1 ; \text{ de plus } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ par produit}$$

$$\text{des limites on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x^3) = +\infty. f(x) > x - \ln(x^3)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ par comparaison.}$$

2. $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \geq 0$ la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Sens de variation de f	$-\infty$	$+\infty$

$$\text{3. } f(x) = x \Leftrightarrow -\ln(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0$$

B. 1. Soit $P(n) = \{0 \leq u_n \leq 1\}$.

Initialisation : $u_0 = 1$ donc $P(0)$ vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie et montrons que $P(k+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence : $0 \leq u_k \leq 1$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$, $f(0) \leq f(u_k) \leq f(1)$ or $f(0) = 0$; $f(1) = 1 - \ln(2) < 1$ donc $0 \leq u_{k+1} \leq 1$ donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, l'hypothèse $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $H(n) = \{u_{n+1} \leq u_n\}$.

Initialisation : $u_1 = u_0 - \ln(u_0^2 + 1) = 1 - \ln(2) < 1$ donc $u_1 \leq u_0$.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $H(k)$ est vraie et montrons que $H(k+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence : $u_{k+1} \leq u_k$ or f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \Leftrightarrow u_{k+2} \leq u_{k+1}$ donc $H(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, l'hypothèse $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. La suite (u_n) est décroissante puisque $u_{n+1} \leq u_n$ et minorée par 0 donc la suite (u_n) est convergente. On montre que cette suite converge vers ℓ solution de l'équation $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$ d'après la partie A, d'où $\ell = 0$.

4. Rôle de ce programme : déterminer le rang n à partir duquel les termes de la suite (u_n) deviennent strictement inférieurs à 0,01.

81. 1. a) $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

b) $v_n = \ln(u_n) = \ln\left(3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \ln 3 + n \ln\left(\frac{1}{4}\right)$
 $= \ln 3 - n \ln 4$

$v_{n+1} - v_n = \ln 3 - (n+1) \ln 4 - \ln 3 + n \ln 4 = -\ln 4$
 La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\ln 4$.
 On pouvait aussi montrer que $v_n = an + b$ donc il s'agit d'une suite arithmétique de raison $r = a$.

2. a) $S_n = (n+1) \times \frac{v_0 + v_n}{2} = (n+1) \times \frac{\ln 3 + \ln 3 - n \ln 4}{2}$
 $= (n+1) \frac{2 \ln 3 - 2 \ln 2}{2} = (n+1)(\ln 3 - \ln 2)$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$ et $\ln 3 - \ln 2 > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

3. a) $e^{S_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n}$
 $= u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = P_n$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{S_n} = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = +\infty$.

82. 1. a) $v_{n+1} - v_n = \ln(u_{n+2}) - \ln(u_{n+1}) - \ln(u_{n+1}) + \ln(u_n)$
 $= \ln\left(\frac{u_{n+1}^2}{e \times u_n}\right) - 2 \ln(u_{n+1}) + \ln(u_n)$
 $= 2 \ln(u_{n+1}) - \ln e - \ln(u_n) - 2 \ln(u_{n+1}) + \ln(u_n) = -1$
 La suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$.

$v_0 = \ln(u_1) - \ln(u_0) = 1$

b) $v_n = v_0 + n \times (-1) = 1 - n$

2. a) $S_n = n \times \frac{v_0 + v_{n-1}}{2} = n \times \frac{1 + 1 + (n-1)}{2} = \frac{n(3-n)}{2}$

b) Soit $P(n) = \{S_n = \ln(u_n) ; n \in \mathbb{N}^*\}$

Initialisation : $S_1 = v_0 = 1 = \frac{1 \times (3-1)}{2}$, donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie et montrons que $P(k+1)$ est vraie.

$S_{k+1} = S_k + v_k = \ln(u_k) + \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)$
 $= \ln(u_{k+1})$ donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, l'hypothèse $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) D'après la question 2. on en déduit que

$\frac{n(3-n)}{2} = \ln(u_n) \Leftrightarrow u_n = e^{\frac{n(3-n)}{2}}$

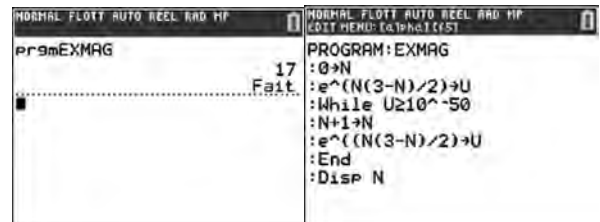
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(3-n)}{2} = -\infty$ or $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b)

```

N ← 0
U ← e $\frac{N(3-N)}{2}$ 

Tant que U ≥ 10-50
    N ← N + 1
    U ← e $\frac{N(3-N)}{2}$ 
Fin du Tant que
    
```



c) $e^{\frac{n(3-n)}{2}} < 10^{-50} \Leftrightarrow \frac{n(3-n)}{2} < \ln(10^{-50})$
 $\Leftrightarrow -n^2 + 3n + 100 \ln 10 < 0$

$\Delta = 9 + 400 \ln 10$

$n_1 = \frac{3 + \sqrt{9 + 400 \ln 10}}{2} \approx 16,7$

$n_2 = \frac{3 - \sqrt{9 + 400 \ln 10}}{2} \approx -13,7$

x	0	n_1	$+\infty$
signe de $-x^2 + x + 100 \ln 10$	+	0	-

Donc $e^{\frac{n(3-n)}{2}} < 10^{-50}$ à partir de $n = 17$.

83. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ et $\frac{x}{[x+1]} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$ ainsi par somme

des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{\frac{x+1-x}{x}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{-1}{(1+x)^2} + \frac{1}{x(x+1)}$
 $= \frac{-x + (x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}$

3. a) Pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

b) $f(1) = \frac{1}{2} - \ln 2 < 0$; sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, la fonction f est strictement croissante et continue, de plus pour tout $x \in [1 ; +\infty[$; $f(x) \in \left[\frac{1}{2} - \ln 2 ; 0 \right]$ donc la fonction f est strictement négative sur $[1 ; +\infty[$.

B. 1. Ce programme calcule la valeur de $U_N + \ln N$.

Pour $N = 3$ on aura : $u_3 + \ln 3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

```

2. N ← valeur saisie
   U = 0
   Pour i variant de 1 à N
       U = U + 1/i
   Fin Pour
   U ← U - ln N
   Afficher U
    
```

3. La suite semble décroissante.

	A	B
1	n	un
2	1	1
3	2	0,8068528194
4	3	0,7347210447
5	4	0,6970389722
6	5	0,6738954209
7	6	0,6582405308
8	7	0,6469469938
9	8	0,6384156012
10	9	0,6317436766
11	10	0,626383161
12	11	0,6219820721
13	12	0,6183040284
14	13	0,6151843977
15	14	0,6125049969
16	15	0,6101787921
17	16	0,608140271
18	17	0,6063391786
19	18	0,6047363203
20	19	0,603300678
21	20	0,6020073836
22	21	0,600836267
23	22	0,5997707969
24	23	0,5987972952
25	24	0,5979043474
26	25	0,5970823529
27	26	0,5963231782
28	27	0,5956198872
29	28	0,5949665288
30	29	0,5943579676

$$\begin{aligned}
 4. \quad u_{n+1} - u_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - 1 \\
 &\quad - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + \ln n \\
 &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n)
 \end{aligned}$$

Puisque f est négative sur $[1 ; +\infty[$ alors

$u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est donc décroissante.

$$84. \quad 1. \quad \frac{3x+1}{x+1} = \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \quad \text{or} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3$$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right) = \ln 3$. Cela signifie que $\mathcal{C}_f$

admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \ln 3$.

$$2. \quad a) \quad f'(x) = \frac{\frac{3(x+1) - (3x+1)}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

b) Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ on a $x+1 > 0$ et $3x+1 > 0$ donc $f'(x) > 0$, la fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

B. 1. Soit $P(n) = \left\{ \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \right\}$.

Initialisation : $u_1 = f(u_0) = f(3) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) < 3$ et

$\ln\left(\frac{5}{2}\right) > \frac{1}{2}$ par conséquent $\frac{1}{2} \leq u_1 \leq u_0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : d'après l'hypothèse de récurrence

$\frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq u_k$, puisque f est une fonction strictement croissante on a alors : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$

soit $\frac{1}{2} < \ln\left(\frac{5}{3}\right) \leq u_{k+2} \leq u_{k+1}$ donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, l'hypothèse $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Puisque $u_{n+1} \leq u_n$ la suite est alors décroissante et minorée par 0,5 ; la suite est donc convergente vers $\ell \geq 0,5 > 0$.

85. A. 1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$

Pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ on a $x > 0$ et $x+1 > 0$ donc $f'(x) > 0$; la fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. $f(0) = 0$; puisque la fonction est croissante sur $[0 ; +\infty[$ alors $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(x+1)$.

B. 1. a) $P(n) = \{u_n \geq 0\}$

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $P(k)$ est vraie et montrons que $P(k+1)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence :

$u_k \geq 0$ donc $f(u_k) \geq f(0)$ car f est croissante.

Soit $u_{k+1} \geq 0$, donc $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, l'hypothèse $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) $u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n)$ or $u_n \geq 0$ donc $1 + u_n \geq 1$ d'où $\ln(1 + u_n) \geq 0$ ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$ la suite (u_n) est donc décroissante.

On en déduit $u_n \leq u_0$ soit $u_n \leq 1$.

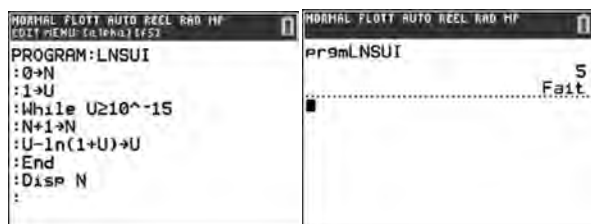
c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 ; elle est donc convergente.

2. $f(x) = x \Leftrightarrow -\ln(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$; d'où $\ell = 0$.

3. a)

```
P ← valeur saisie
N ← 0
U ← 1
Tant que U ≥ 10-p
    N ← N + 1
    U ← U - ln(1 + U)
Fin du Tant que
Afficher N
```

b)



À partir du rang $n = 5$, tous les termes de la suite seront inférieurs à 10^{-15} .

Modélisations

86. 1. Puisque $u_{n+1} = u_n \times 1,5$ cela signifie que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,5$ et de 1^{er} terme $u_0 = 10\,000$.

2. $u_n = u_0 \times q^n = 10\,000 \times 1,5^n$

3. $10\,000 \times 1,5^n > 1\,000\,000 \Leftrightarrow 1,5^n > 100$

$$\Leftrightarrow n \ln 1,5 > \ln 100 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 100}{\ln 1,5}$$

Soit $n \geq 12$; ce qui signifie qu'au bout de 12h, le nombre de bactéries aura dépassé le million.

87. Soit A l'événement : « obtenir au moins une boule blanche », on a alors $\bar{A}$: « n'obtenir aucune boule blanche ».

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\text{On veut } P(A) \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,999$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,001)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

soit $n \geq 38$; cela signifie qu'il faut effectuer au moins 38 tirages afin que la probabilité d'obtenir au moins 1 boule blanche soit supérieure à 0,999.

88. Soit C_n le capital obtenu au bout de la n -ième année, on a $C_0 = 2\,500$ et $C_n = C_0 \times 1,0175^n$. La suite (C_n) est géométrique de raison $q = 1 + \frac{1,75}{100} = 1,0175$

car pour passer du capital d'une année à l'autre on augmente ce dernier de 1,75 %.

On veut déterminer n tel que

$$C_n \geq 5\,000 \Leftrightarrow 2\,500 \times 1,0175^n \geq 5\,000$$

$$\Leftrightarrow 1,0175^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,0175}$$

soit $n \geq 40$. Il faudra donc attendre 40 ans pour doubler le capital.

89. 1. $u_{n+1} = u_n \times 1,02$ il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 1,02 et de 1^{er} terme 1 200.

2. On veut déterminer n tel que $u_n \geq 3\,600 \Leftrightarrow 1\,200 \times 1,02^n \geq 3\,600 \Leftrightarrow 1,02^n \geq 3 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3}{\ln 1,02}$ soit $n \geq 56$.

Au bout de 56 ans, le capital aura triplé.

90. A. 1. $h(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$

$$h'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x) - 1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$$

Pour tout $x \geq 0$ on a $1+x > 0$ et $-x^2 \leq 0$ donc $h'(x) \leq 0$: la fonction h est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ d'où pour tout $x \geq 0$: $h(x) \leq h(0)$.

Soit $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

$g(x) = x - \ln(1+x)$; $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$; pour

tout $x \geq 0$: $g'(x) \geq 0$. La fonction g est donc croissante sur $[0; +\infty[$ soit $g(x) \geq g(0)$ d'où $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln(1+x)$.

On en déduit : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

2. On a $C_n = C \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$ on veut

$$C_n \geq 3C \Leftrightarrow C \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geq 3C$$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(1 + \frac{t}{100}\right) \geq \ln 3 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3}{\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right)}$$

or pour de petites valeurs de t on peut considérer

$$\ln\left(1 + \frac{t}{100}\right) \approx \frac{t}{100} \text{ d'où } n \geq \frac{\ln 3}{\frac{t}{100}} \text{ soit } n \geq \frac{100 \ln 3}{t} \text{ soit}$$

environ $n \geq \frac{110}{t}$.

B. 1. Placement en composition annuelle, au bout d'un an : $1\,500 \times 1,05 = 1\,575$.

Placement en composition mensuelle, au bout

$$\text{d'un an : } 1500 \times \left(1 + \frac{\frac{5}{12}}{100}\right)^{12} \approx 1576,74.$$

Le 2^e placement est meilleur avec ces conditions initiales.

2. a) $C \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^m = C \times \left(1 + \frac{\frac{t}{100}}{m}\right)^m$ puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \text{ alors } \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\frac{t}{100}}{m}\right)^m = e^{\frac{t}{100}} \text{ ainsi}$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} C \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^m = C e^{\frac{t}{100}}$$

b) On veut déterminer t tel que

$$C e^{\frac{t}{100}} = 2C \Leftrightarrow e^{\frac{t}{100}} = 2 \Leftrightarrow \frac{t}{100} = \ln 2$$

$$\Leftrightarrow t = 100 \ln 2.$$

Il faudrait un pourcentage d'environ 69,31 %.

91. 1. $5\,730 = -k \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \frac{5\,730}{\ln 2} \approx 8\,267$

2. a) $A(x) = -8\,267 \ln 0,25 \approx 11\,460$

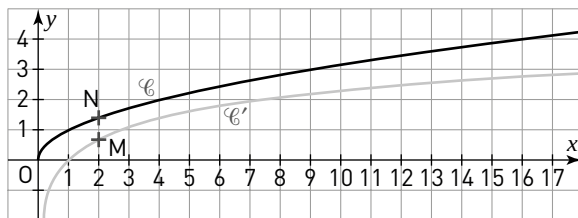
l'âge de cette coquille est d'environ 11 460 ans.

b) $2\,183 = -8\,267 \ln x \Leftrightarrow \ln x = -\frac{2\,183}{8\,267}$

$$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{2\,183}{8\,267}} \approx 0,78$$

La proportion de carbine 14 est d'environ 0,78.

92. Groupe 1 :



La limite de MN semble être $+\infty$.

Groupe 2 :

	A	B	C	D
1	x	y_M	y_N	MN
2	1	0	1	1
3	100	4,605170186	10	5,394829814
4	199	5,293304825	14,10673598	8,813431155
5	298	5,697093487	17,2626765	11,56558302
6	397	5,983936281	19,92485885	13,94092256
7	496	6,206575927	22,27105745	16,06448152
8	595	6,388561406	24,39262184	18,00406043
9	694	6,542471961	26,34387974	19,80140778
10	793	6,675823222	28,16025568	21,48443246
11	892	6,793466133	29,86636905	23,07290291
12	991	6,898714534	31,48015248	24,58143794
13	1090	6,993932975	33,01514804	26,02121506
14	1189	7,080867897	34,4818793	27,4010114
15	1288	7,160845907	35,88871689	28,72787098
16	1387	7,23489842	37,2424489	30,00755048
17	1486	7,303843225	38,54867053	31,24482731
18	1585	7,368339686	39,81205847	32,44371879
19	1684	7,428927195	41,03656906	33,60764186
20	1783	7,486052618	42,22558466	34,73953204
21	1882	7,54009032	43,38202393	35,84193361
22	1981	7,591357047	44,50842617	36,91706912
23	2080	7,640123173	45,607017	37,96689383
24	2179	7,686621335	46,67976007	38,99313873
25	2278	7,731053144	47,72839826	39,99734511
26	2377	7,773594467	48,75448697	40,98089251
27	2476	7,814399634	49,75942122	41,94502158
28	2575	7,853604813	50,74445783	42,89085301
29	2674	7,891330758	51,7107339	43,81940314
30	2773	7,927685046	52,65928218	44,73159714

La limite semble être $+\infty$.

Groupe 3 :

```

N ← 1
D ← √N - ln N
Pour i variant de 1 à 107
    N ← N + 1
    D ← √N - ln N
Fin Pour
Afficher N
    
```

Sur Python :

```

from math import*
N=1
D=sqrt(N) - log(N)
for i in range(1,10**7):
    N=N+1
    D=sqrt(N) - log(N)
print (D)
    
```

On obtient alors sur la console :

```

>>>
3146.159564517421
    
```

La limite semble effectivement être $+\infty$.

Groupe 4 :

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - \ln x &= \sqrt{x} \left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right) = \sqrt{x} \left(1 - \frac{\ln((\sqrt{x})^2)}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \sqrt{x} \left(1 - \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right)\end{aligned}$$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ par croissance com-

parée d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$ ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1$

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(1 - \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$ par produit des limites.

Exercices bilan

p. 192

93. Calcul d'aire et étude de $\ln$

1. Soit g la fonction associée à l'aire du rectangle

$$\text{OPMQ. } g(x) = x \times f_g(x) = ax - x \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$g'(x) = a - \ln\left(\frac{x}{a}\right) - x \times \frac{1}{\frac{x}{a}} = a - \ln\left(\frac{x}{a}\right) - 1$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{a}\right) < a - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{a} < e^{a-1}; x < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < ae^{a-1}$$

x	0	ae^{a-1}	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Sens de variation de g	$-\infty \nearrow g'(ae^{a-1}) \searrow -\infty$		

$$g(ae^{a-1}) = ae^{a-1}$$

$$M(ae^{a-1}; ae^{a-1})$$

2. Il s'agit de résoudre $ae^{a-1} = a \Leftrightarrow e^{a-1} = 1$

$$\Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Il existe une seule valeur : $a = 1$.

94. Avec une fonction auxiliaire

A. 1. $v : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$; de plus $w : x \mapsto x - 3$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par conséquent la

fonction u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions croissantes sur cet intervalle.

2. $u(2) = \ln 2 - 1 < 0$ et $u(3) = \ln 3 > 0$; par conséquent la fonction u est strictement croissante et continue sur $]0; +\infty[$, de plus $u(2) < 0$ et $u(3) > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α .

3.

x	0	α	$+\infty$
Sens de variation de u	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de u	-	0	+

B. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) - 2 = -\infty$ par produit des limites on a alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$\begin{aligned} 2. a) f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + 1 - \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{\ln x - 2 + x = 1}{x^2} = \frac{\ln x + x - 3}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2} \end{aligned}$$

b) Pour tout $x \in]0; +\infty[: x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $u(x)$.

La fonction f est donc décroissante sur $]0; \alpha[$ et croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

$$\begin{aligned} C. 1. f(x) - \ln x &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2 - \ln x \\ &= -\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2 - \ln x}{x} \end{aligned}$$

$$2. 2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow x < e^2$$

Donc sur l'intervalle $]0; e^2[: f(x) - \ln x > 0$ ce qui signifie que C est au-dessus de C' et sur l'intervalle $]e^2; +\infty[: f(x) - \ln x < 0$ donc la courbe C est en dessous de C' .

95. Limite et taux d'accroissement

$$1. D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 > 0\}$$

$$=]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[= D_f'$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) \text{ car } f(2) = 0 ; \text{ or}$$

$$f'(2) = 4 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 4.$$

Il s'agit de résoudre l'équation

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 - 3} = 1 \Leftrightarrow 2x = x^2 - 3 ; x \in D_f$$

il s'agit de résoudre $x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Delta = 16 ; x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 3.$$

Il existe donc deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = x + 5$ aux points d'abscisse -1 et 3 .

96. Modélisation

$$\begin{aligned} A. 1. f'(x) &= \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 3 \\ &= \ln(x+1) + 1 - 3 = \ln(x+1) - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \ln(x+1) - 2 > 0 &\Leftrightarrow \ln(x+1) > 2 \\ &\Leftrightarrow x+1 > e^2 \Leftrightarrow x > e^2 - 1 \end{aligned}$$

x	0	$e^2 - 1$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$\searrow$	$\nearrow$	

$$3. f'(0) = -2$$

```

B.
from math import*
def f(x):
    y = (x+1)*log(x+1) - 3*x+7
    return y
S = 0
for k in range (20):
    S = S + sqrt(1+(f(k+1)-f(k))**2)*10
print (S)
    
```

La console affiche :

```

>>>
245.20431466337828
    
```

97. $\ln u$ et tangente

$$1. f(2) = 2 \ln 1 - 2 + 2 = 0 \text{ d'où } l(2; f(2)) \text{ donc } l \in \mathcal{C}_f.$$

$$f(2e) = 2e \ln \left(\frac{2e}{2} \right) - 2e + 2 = 2e \ln e - 2e + 2 = 2$$

d'où $B(2e; f(2e))$ donc $B \in \mathcal{C}_f$.

$$f'(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \times \frac{1}{\frac{x}{2}} - 1 = \ln\left(\frac{x}{2}\right) + 1 - 1$$

$$= \ln \frac{x}{2}$$

Or $f'(2) = \ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0$ ce qui signifie que la tangente

à $\mathcal{C}_f$ en 1 est horizontale autrement dit parallèle à l'axe des abscisses.

2. $T_{2e} : y = f'(2e)(x - 2e) + f(2e)$

$$f'(2e) = \ln\left(\frac{2e}{2}\right) = \ln e = 1 \text{ d'où } y = (x - 2e) + 2 \text{ soit}$$

$$y = x - 2e + 2.$$

3. Il s'agit de résoudre l'équation $x - 2e + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2e - 2$. Le point D a pour coordonnées $(2e - 2 ; 0)$.

98. Position relative et croissance comparée

$$1. f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

pour tout $x \in]1 ; +\infty[$ et $(x-1)^2 > 0$: le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $x-2$.

x	1	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f	$+\infty \swarrow \quad \searrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad +\infty$ 1		

$$f(x) = \frac{1}{x-1}(1 + (x-1)\ln(x-1))$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 1} x - 1 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} X \ln X = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)\ln(x-1) = 0$$

$$\text{ainsi } \lim_{x \rightarrow 1} 1 + (x-1)\ln(x-1) = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = +\infty \text{ donc par produit des limites}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \text{ donc par somme}$$

$$\text{des limites } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

2. a) $f(x) - 1 = \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} - 1 \geq 0$ car d'après le tableau de variations, f admet un minimum

valant 1 ; par conséquent la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de la droite d'équation $y = 1$.

b) Il s'agit d'étudier le signe de

$$f(x) - g(x) = \ln(x-1) + \frac{1}{x-1} - (\ln(x-1))^2 - \frac{3-2x}{x-1}$$

$$= \ln(x-1) - (\ln(x-1))^2 + 2$$

On pose $X = \ln(x-1)$.

Il s'agit alors d'étudier le signe de : $-X^2 + X + 2$.

$$\Delta = 9 ; X_1 = 2 \text{ et } X_2 = -1$$

$$\text{soit } \ln(x-1) = 2 \Leftrightarrow x-1 = e^2 \Leftrightarrow x = e^2 + 1$$

$$\text{et } \ln(x-1) = -1 \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} + 1.$$

x	1	$\frac{1}{e} + 1$	$e^2 + 1$	$+\infty$
Signe de $f(x) - g(x)$	-	0	+	-

Par conséquent la courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur les intervalles

$\left[1; \frac{1}{e} + 1\right]$ et sur $]e^2 + 1; +\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ est strictement en

dessous de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{e} + 1; e^2 + 1\right[$.

Préparer le BAC Je me teste

p.194

99. c

100. c

101. c

102. d

103. B

104. d

105. c

Préparer le BAC Je révise

p. 195

106. Retrouver l'expression de la fonction

$$1. A(0 ; 1) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

Graphiquement on voit que $f'(0) = -1$ or

$$f'(x) = 2ax + b - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{d'où } f'(0) = -1 \Leftrightarrow b - 1 = -1 \Leftrightarrow b = 0 ;$$

$$f'(1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2a - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

$$\text{d'où } f(x) = x^2 + 1 - \ln(x+1).$$

$$2. f'(x) = 2x - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x+1} \text{ sur }]-1; +\infty[\text{ et}$$

$x+1 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x^2 + 2x - 1$.

x	-1	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Sens de variation de f	$+\infty \swarrow \quad \searrow +\infty$ $f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \approx 1,82$		

$\lim_{x \rightarrow -1} x+1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln(x) = +\infty$, de plus $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 1 = 2$ donc par somme des limites on a $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$.

$$f(x) = x^2 - \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 1 \text{ pour}$$

$$x \neq 0; f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \times \frac{(x+1)^2}{x^2} \right) + 1; \text{ or}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ et donc}$$

par produit des limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Cela revient à résoudre $f'(x) \times f'(0) = -1$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{1}{x+1} \times (-1) = -1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 = 0 \text{ avec}$$

$x \in]-1; +\infty[\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$, il existe donc une tangente à $\mathcal{C}_f$ perpendiculaire à T_0 .

$$4. f(x) - g(x) = -4 - \ln(x+1) < 0$$

$\Leftrightarrow x \in]e^{-4} - 1; +\infty[$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]e^{-4} - 1; +\infty[$ et au-dessus sur $]-1; e^{-4} - 1[$.
 $f(x) - h(x) = -\ln(x+1) + \ln(x^2 + 6x + 5) > 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 4}{x+1} > 0$ avec $x \in]-1; +\infty[$ ce qui est toujours le cas sur $]-1; +\infty[$ par conséquent la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathcal{C}_h$ sur $]-1; +\infty[$.

$h(x) - g(x) = -4 - \ln(x^2 + 6x + 5) < 0$ avec $x \in]-1; +\infty[$
 $\Leftrightarrow x \in]-1; -3 + \sqrt{4 + e^{-4}}[$ donc la courbe $\mathcal{C}_h$ est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur $]-1; -3 + \sqrt{4 + e^{-4}}[$ et au-dessus sur $]-3 + \sqrt{4 + e^{-4}}; +\infty[$.

107. Avec une fonction auxiliaire

$$1. a) \lim_{x \rightarrow 0} 5x^2 - 2 + 2\ln x = -\infty$$

et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 = 0^+$ donc par quotient de limites on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty.$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 5 - \frac{2}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}}{2x^2} = \frac{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}}{2}$$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée et par

$$\text{somme des limites } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{5}{2}.$$

$$b) g'(x) = \frac{10x + \frac{2}{x} (2x^2) - (5x^2 - 2 + 2\ln x) \times 4x}{4x^4} = \frac{3 - 2\ln x}{x^3}$$

x	0	$\alpha(\sqrt{e})^3$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$	0	$-$
Sens de variation de g	$-\infty \swarrow \quad \searrow \frac{5}{2}$ $\frac{5e^3 + 1}{2e^3}$		
Signe de $g'(x)$	$-$	0	$+$

c) Sur l'intervalle $]0,5; 1[$, g est une fonction continue, strictement croissante telle que $g(0,5) < 0$ et $g(1) > 0$, donc d'après le T.V.I. l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0,5; 1[$. Sur $]0; 0,5[$, la fonction g est négative donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur $]1; +\infty[$ la fonction g est positive donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution.

d) Voir tableau.

2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} 5x^2 - 2\ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0^+$ donc par quotient de limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$f(x) = \frac{x^2 \left(5 - \frac{2\ln x}{x^2} \right)}{2x} = \frac{x \left(5 - \frac{2\ln x}{x^2} \right)}{2} \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ par croissance comparée donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(5 - \frac{2\ln x}{x^2} \right)}{2} = +\infty$$

par produit et quotient des limites, soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$b) f'(x) = \frac{10x - \frac{2}{x} \times 2x - (5x^2 - 2\ln x) \times 2}{4x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$ = signe de g	+	0	-
Sens de variation de f	$+\infty \swarrow \searrow +\infty$ $f(\alpha)$		

c) D'après le tableau de variations, on déduit que f admet un minimum en α valant $f(\alpha) = \frac{5\alpha^2 - 2\ln\alpha}{2\alpha}$

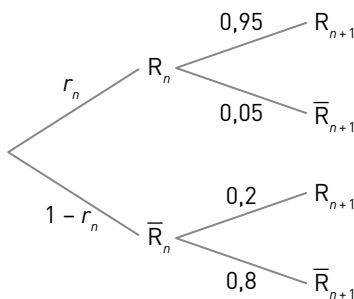
or on a $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\ln\alpha = 2 - 5\alpha^2$ d'où

$$f(\alpha) = \frac{5\alpha^2 - 2 + 5\alpha^2}{2\alpha} = \frac{5\alpha^2 - 1}{\alpha}$$

d) $\alpha > 0,5$ donc $5\alpha^2 - 1 > 0$ d'où $\frac{5\alpha^2 - 1}{\alpha} > 0$, le minimum de f étant positif, f est donc toujours positive sur $]0; +\infty[$.

108. Probabilités et ln

1.



$P(R_{n+1}) = r_{n+1} = 0,95r_n + 0,2(1 - r_n)$ d'après la loi des probabilités totale, d'où $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.

2. Soit (H_n) l'hypothèse de récurrence :

$$\{r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8\}.$$

Initialisation : $r_1 = 0,9$ or $0,1 \times 0,75^0 + 0,8 = 0,9$

L'hypothèse est donc bien vérifiée pour $n = 1$.

Hérédité : on suppose qu'il existe un entier k tel que (H_k) est vraie et montrons que (H_{k+1}) est encore vraie.

$$r_{k+1} = 0,75r_k + 0,2$$

$$= 0,75 \times (0,1 \times 0,75^{k-1} + 0,8) + 0,2$$

$$r_{k+1} = 0,1 \times 0,75^k + 0,8$$

(H_{k+1}) est donc vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence on a donc bien $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

3. a)

```

R ← 0,9
N ← 1
Tant que R > 0,800 01
    N ← N + 1
    R ← 0,75 * R + 0,2
Fin du Tant que
    
```

$$b) 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8 \leq 0,80001$$

$$\Leftrightarrow 0,7^{n-1} \leq 0,0001$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,7)} + 1 \text{ donc c'est vérifié à partir de}$$

$$n = 27.$$

109. ln(u), limites et variations

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x^2} > 0$ et $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ donc $g(x) > 0$

d'où $\ln(g(x))$ est toujours bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

$$2. h(x) = \ln \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) = -2\ln x - \frac{1}{x} = \frac{-2x\ln x - 1}{x}$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissance comparée donc

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\infty$ par somme et quotient de limites.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \ln(g(x)) = -\infty \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Exercices vers le supérieur p. 196-197

110. Relation fonctionnelle

1. Si la fonction était définie en 0, on aurait :

$$f(0) = f(0 \times 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$$

et donc nécessairement $f(0) = 0$.

Or $f(a) + f(0) = f(a)$ si $f(0) = 0$, par ailleurs d'après la définition de f :

$f(a) + f(0) = f(a \times 0) = f(0) = 0$, ce qui serait donc contradictoire avec le fait que la fonction f soit non nulle.

Une telle fonction n'est donc pas définie en 0.

2. $f(1) = f(1 \times 1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$.

3. $f\left(y \times \frac{x}{y}\right) = f(x)$ et $f\left(y \times \frac{x}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$; donc

$$f(x) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y).$$

$$\begin{aligned} 4. a) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{f\left(\frac{x+h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \\ &= \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x} \times x} \quad \text{car } f(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x} \times x} \\ &= \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x} \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \right) \times \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} = f'(1) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \text{ puisque } f'(1) = 1.$$

5. Puisque $x \in]0; +\infty[$ et $\frac{1}{x} > 0$ donc $f'(x) > 0$ d'où la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Puisque $f(1) = 0$ et que la fonction f est croissante, on en déduit que la fonction f est strictement négative sur $]0; 1[$ et strictement positive sur $]1; +\infty[$.

 111. Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$

1. $f_0(x) = x^0 = 1$, f_0 est donc la fonction constante égale à 1.

$f_1(x) = x^1 = x$, f_1 est la fonction linéaire $f(x) = x$.

2. Puisque $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}$, la fonction f_α est alors dérivable comme composée de fonctions dérivables avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = \alpha \ln x$.

$f(x) = u(v(x))$ donc $f'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$

$$= e^{\alpha \ln x} \times \left(\alpha \times \frac{1}{x} \right) = \frac{\alpha}{x} x = \alpha x^{\alpha-1}.$$

3. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln x = +\infty$ si $\alpha < 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = +\infty$.

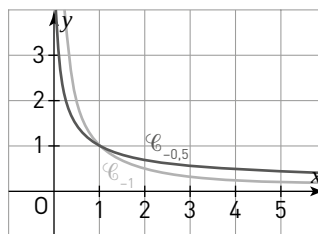
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln x = -\infty$ car $\alpha < 0$, or $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ d'où

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = 0$.

b) Puisque $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ alors $f'_\alpha(x) < 0$ puisque $\alpha < 0$ et $x > 0$; la fonction f_α est donc strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
Sens de variation de f_α	$+\infty$	0

c)



4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln x = -\infty$ si $\alpha > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc

$\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln x = +\infty \text{ car } \alpha > 0, \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x) = +\infty.$$

b) Puisque $f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ alors $f'_\alpha(x) > 0$ puisque $\alpha > 0$ et $x > 0$; la fonction f_α est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
Sens de variation de f_α	0	$+\infty$

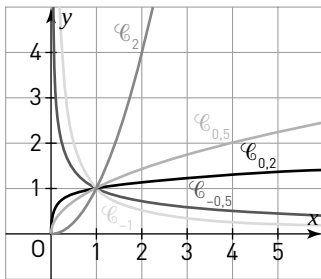
c) $\lim_{x \rightarrow 0} h_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = 0$ et $h_\alpha(0) = 0$, la fonction h_α est donc continue en 0.

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h_\alpha(x) - h_\alpha(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1}$$

• si $0 < \alpha < 1$: $\alpha - 1 < 0$ il s'agit du cas de figure illustré en 3. donc $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = +\infty$, la fonction h_α ne serait donc pas dérivable en 0 pour $0 < \alpha < 1$.

• si $\alpha > 1$: $\alpha - 1 > 0$, il s'agit du cas de figure illustré en 4. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha-1} = 0$; par conséquent la fonction h_α serait dérivable en 0 et $h'_\alpha(0) = 0$.

e)



112. Une autre approche de e^x

1. Si $a > 0$; $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n > 0$ donc $\ln(u_n)$ défini.

Si $a < 0$; $-a > 0$, puisque $n > -a > 0$ alors $\frac{1}{n} < -\frac{1}{a}$; $\frac{a}{n} > -1$ car $a < 0$ donc $1 + \frac{a}{n} > 0$ et

$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n > 0$ donc $\ln(u_n)$ est défini. Finalement, quelque soit $a \in \mathbb{R}$, la suite $(\ln(u_n))$ est bien définie.

$$\text{2. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} \text{ or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} = a.$$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = a$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(u_n)} = e^a$ ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

113. Logarithme décimal et grands nombres

$$\text{A. 1. A) } \log(10^n) = \frac{\ln 10^n}{\ln 10} = \frac{n \ln 10}{\ln 10} = n$$

$$\text{b) } \log(x^n) = \frac{\ln(x^n)}{\ln 10} = \frac{n \ln(x)}{\ln 10} = n \log(x).$$

$$\text{2. } (\log x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 10}\right)' = \frac{1}{\ln 10} \times \frac{1}{x} > 0$$

La fonction $\log$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln 10} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln 10} = +\infty.$$

x	0	$+\infty$
Sens de variation de $\log$	$-\infty$	$+\infty$

3. a) N est alors constitué de $n + 1$ chiffres.

$$\text{b) } \log(10^n) \leq \log(N) \leq \log(10^{n+1})$$

soit $n \leq \log(N) \leq n + 1$ d'où $E(\log(N)) = n$.

Ainsi N est constitué de $E(\log(N)) + 1$ chiffres.

B. Le nombre de chiffres de $2^{82\,589\,933}$ correspond à $E(\log(2^{82\,589\,933})) = E(82\,589\,933 \log 2) = 24\,662\,047$, qui correspond alors au nombre de chiffres du 51^e nombre de Mersenne.

114. Vrai ou faux ?

a) Vrai $D_f = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} - \sin(3x) > 0\}$

or $1 - \sin(3x) > 0 \Leftrightarrow \sin(3x) < 1$ or pour tout $X \in \mathbb{R}$: $\sin X \leq 1$ il suffit de résoudre $\sin(3x) \neq 1$.

$$\sin(3x) = 1 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{b) Faux } f'(x) = \frac{[1 - \sin(3x)]'}{1 - \sin(3x)} = \frac{-3\cos(3x)}{1 - \sin(3x)}$$

c) Faux il y a une infinité d'asymptotes verticales donc pas de limite en $+\infty$ pour la fonction f .

$$\text{d) Vrai } f(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow \ln(1 - \sin(3x)) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin(3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(3x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ sur un intervalle d'amplitude 2π , cette équation admet donc 6 solutions (3 de chaque solution type).

115. Logique ?

Le raisonnement est faux car l'expression $3 + x$ s'annule en -3 , valeur interdite de $\frac{15 + 2x - x^2}{x^2 + 10x + 21}$; par conséquent $D_f =]-7; -3[\cup]-3; 5[$.

116. Étude d'une fonction

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ par croissance comparée et $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 = 1$ donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

$$g(x) = x^2(1 - 2\ln x) + 1$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2\ln x = -\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit et somme des limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty.$$

$$g'(x) = 2x - 4x \ln x - 2x^2 \times \frac{1}{x}$$

$$= 2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$; $4x > 0$ donc le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $-\ln x$. Pour $x \in]0; 1[$, $-\ln x > 0$ et pour $x \in]1; +\infty[$, $-\ln x < 0$.

x	0	1	$+\infty$
Sens de variation de g	1	2	$-\infty$

b) Pour tout $x \in]0; 1[$ et $g(x) > 1$ par conséquent l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $]0; 1[$.

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, g est une fonction strictement décroissante et continue, de plus $g(x) \in]-\infty; 2]$ et $0 \in]-\infty; 2]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

x	0	1	α	$+\infty$
Signe de g		+	0	-

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 = 1$ donc par quotient des limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{x^2}{1 + x^2} = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0 \text{ par}$$

croissance comparée et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$ donc par

produit des limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (1 + x^2) - \ln x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} + x - 2x \ln x}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1 + x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1 + x^2)^2}$$

or pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$; $x(1 + x^2)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $g(x)$.

x	0	1	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	-
Sens de variation de f	$-\infty$	$\frac{1}{2\alpha^2}$		0

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2} \text{ et}$$

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1 + \alpha^2} = \frac{1 + \alpha^2}{2^2} \times \frac{1}{1 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

117. Suite et ln

1. $u_1 = 2 \ln 2$; $u_2 = \ln(2 \ln 2 + 1) + \ln 2$

2. Soit $P(n) = \{1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2\}$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 2 \ln 2$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : on suppose qu'il existe un réel $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ est vraie et montrons que $P(k+1)$ est encore vraie.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x+1) + \ln 2$, f est une fonction croissante sur $] -1 ; +\infty[$ comme composée de fonctions croissantes.

D'où si $1 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 2$

on a $f(1) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(2)$

soit $2 \ln 2 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \ln 3 + \ln 2$

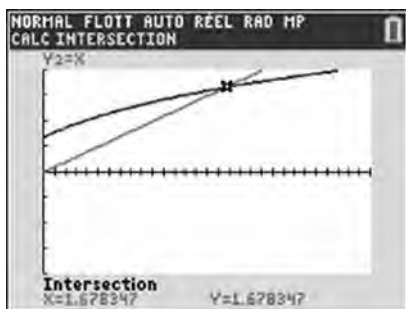
or $1 < 2 \ln 2$ et $\ln 3 + \ln 2 < 2$

donc $1 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 2$, d'où $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : en vertu du principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Puisque $u_n \leq u_{n+1}$ cela signifie que la suite (u_n) est croissante, de plus elle est majorée par 2, donc la suite (u_n) est convergente vers un réel α dont on montre qu'il est solution de l'équation $f(x) = x$. Il s'agit donc de résoudre : $\ln(x+1) + \ln 2 = x$. À l'aide de la calculatrice on détermine $1,6 < \alpha < 1,7$.

Remarque : pour justifier rigoureusement que $\alpha \in]1,6 ; 1,7[$, il suffit de mentionner le fait que sur cet intervalle, la fonction h définie par $h(x) = f(x) - x$ est strictement décroissante et continue ($h'(x) = -\frac{x}{x+1}$), et $h(1,6) > 0$; $h(1,7) < 0$.



4. α est solution de l'équation $f(x) = x$ donc $f(\alpha) = \alpha$
 $\Leftrightarrow \ln(\alpha+1) + \ln 2 = \alpha$

$\Leftrightarrow -\alpha + \ln(\alpha+1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$, on a alors :

$e^{-\alpha + \ln(\alpha+1)} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $e^{-\alpha} \times (\alpha+1) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

118. QCM

1. b) démonstration par récurrence pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \geq u_{n+1}$ en utilisant la fonction f définie par $f(x) = \ln(1+x)$, qui est croissante sur $] -1 ; +\infty[$.

2. b) transformer l'équation donnée en l'équation produit nul suivante : $x^2(\ln 2 - x \ln 3) = 0$.

3. c) il faut que $e^{-x} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 2$

$\Leftrightarrow -x > \ln 2 \Leftrightarrow x < -\ln 2$.

119. Points d'intersection

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -(\ln x)^2 = -\infty$ donc par somme des limites $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

$f(x) = \ln x(2 - \ln x)$ or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \ln x = -\infty$

donc par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. $f'(x) = \frac{2}{x} - 2 \times \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2(1 - \ln x)}{x}$ pour tout $x \in]0 ; +\infty[$: $\frac{2}{x} > 0$ le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $1 - \ln x$.

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Sens de variation de f			

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x(2 - \ln x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\ln x = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e^2$ on a alors $x_A = 1$ et $x_B = e^2$.

120. Dérivées et limites

1. Pour que $\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$ soit défini il faut que

$\frac{x-1}{3-x} > 0$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$3-x$	+	+	0	-
$\frac{x-1}{3-x}$	-	0	+	-

Il faut donc dans un 1^{er} temps que $x \in I =]1 ; 3[$.
Afin que f soit définie il faut que

$$\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3-x} \geq 1 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1-(3-x)}{3-x} \geq 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-4}{3-x} \geq 0 \text{ et } x \in I.$$

x	1	2	3
$2x-4$	-	0	+
$3-x$	+		+
$\frac{2x-4}{3-x}$	-	0	+

$$D_f = [2 ; 3[$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \text{ avec } u(x) = \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$$

$$\text{or } u'(x) = \frac{(3-x) - (x-1) \times (-1)}{(3-x)^2} \times \frac{3-x}{x-1}$$

$$= \frac{2}{(3-x)^2} \times \frac{3-x}{x-1}$$

$$= \frac{2}{(3-x)(x-1)}$$

$$\text{d'où } f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)}} = \frac{1}{(3-x)(x-1)\sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)}}.$$

2. Soit $g(x) = x - \sin x$; $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	+
Sens de variation de g			
Signe de g		-	0

D'où pour tout $x \geq 0$: $x \geq \sin x$ et pour tout $x \leq 0$: $x \leq \sin x$.

$$\text{Soit } h(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x, h'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$$

$$h''(x) = -x + \sin x = -g(x).$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $h''(x)$	+	0	-
Sens de variation de h'			
Signe de $h'(x)$		-	
Sens de variation de h			
Signe de h		+	-

D'où pour tout $x \geq 0$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ et pour tout

$x \leq 0$: $x - \frac{x^3}{6} \geq \sin x$.

Pour tout $\sqrt{6} \geq x \geq 0$:

$$0 \leq x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x : \frac{1}{x - \frac{x^3}{6}} \geq \frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x}$$

de plus pour tout $x > 0$; $\frac{1}{1+x} < 1$ d'où $\ln\left(\frac{1}{1+x}\right) < 0$ ainsi :

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x - \frac{x^3}{6}} \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sin x} \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x}$$

$$\text{or } \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x} = \frac{-\ln(1+x)}{x}$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \text{ avec}$$

$$f(x) = \ln(1+x) ; f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ d'où } f'(0) = 1 \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x} = -1.$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x - \frac{x^3}{6}} = -\frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6}} \text{ or } \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln(1+x)}{x} = -1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6}} = 1 \text{ donc par produit des limites}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{x - \frac{x^3}{6}} = -1, \text{ donc d'après le théorème des } gendarmes$$

$$\text{on en déduit } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sin x} = -1.$$

On démontre de la même façon que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sin x} = -1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\sin x} = -1.$$

121. Déterminer f

$$f(1) = 0,5 \Leftrightarrow a + b = 0,5$$

$$f'(x) = 2ax - \frac{2b}{x^3} - 2\ln x \times \frac{1}{x}, f'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = b$$

$$\text{or } a + b = 0,5 \text{ donc } 2a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} = b$$

$$\text{ainsi } f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2.$$

122. Fonction et suite

1. a) $x \mapsto 1 + \frac{a}{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[: X \mapsto \ln X$

dérivable sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto x$ dérivable sur tout $\mathbb{R}$; la fonction f est donc dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) + x \times \frac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \frac{a}{x}} \\ &= \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{\frac{a}{x}}{\frac{a+x}{x}} = \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{a+x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f''(x) &= \frac{-\frac{a}{x^2}}{1 + \frac{a}{x}} - a \times \frac{-1}{(x+a)^2} \\ &= \frac{-a}{x(x+a)} + \frac{a}{(x+a)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-a(x+a) + xa}{x(x+a)^2} = \frac{-a^2}{x(x+a)^2}$$

Pour tout $x > 0 : x(x+a)^2 > 0$ et $-a^2 < 0$ donc $f''(x) < 0$, la fonction f' est donc décroissante sur $]0; +\infty[$.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{a}{x} = 1 \text{ or } \lim_{X \rightarrow 1} \ln X = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{x+a} = 0 \text{ donc par somme des limites}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

Puisque la fonction f' est décroissante, cela signifie que $f'(x) > 0$, la fonction f est donc croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{2. a) } v_n &= \ln(u_n) = \ln\left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n\right) \\ &= n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = f(n) \end{aligned}$$

Or f est croissante donc (v_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n \leq v_{n+1}$ soit $\ln(u_n) \leq \ln(u_{n+1})$ d'où $u_n \leq u_{n+1}$ la suite (u_n) est donc croissante.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \text{ avec } f(x) = \ln(1+x).$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ d'où } f'(0) = 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\begin{aligned} v_n &= n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \\ &= \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} \times a \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0 \text{ d'où} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} &= 1 \text{ ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a, \text{ ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^a. \end{aligned}$$

Travaux pratiques

p. 198-201

 TP 1. Approximation de $\ln 2$ par dichotomie

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Déterminer une valeur approchée de $\ln 2$.

1. `def f(x):
 return (exp(x)-2)`

2. a) `from math import *
def f(x):
 return (exp(x)-2)
def Dichotomie(a,b,f,n):
 while b-a > 10**(-n):
 m = (a+b)/2
 if f(m) < 0:
 a = m
 else:
 b = m
 return (m)`

b. `from math import *
def f(x):
 return (exp(x)-2)
def Dichotomie(a,b,f,n):
 while b-a > 10**(-n):
 m = (a+b)/2
 if f(a)*f(m) > 0:
 a = m
 else:
 b = m
 return (m)`

3. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

b. La console affiche :

```
>>>  
0.6931533813476562
```

ce qui signifie qu'une valeur approchée à 10^{-5} près de $\ln 2$ est 0,69315.

TP 2. Algorithme de Briggs

- **Durée estimée** : 45 min
- **Objectif** : Découvrir une approche historique des logarithmes décimaux.

A. 1.

A = 1,000 000 ;	$\ell A = 0,000\ 000\ 0$;	soit $\sqrt{A}$
B = 10,000 000 ;	$\ell B = 1,000\ 000\ 0$;	C = $\sqrt{AB}$
C = 3,162 277 ;	$\ell C = 0,500\ 000\ 0$;	D = $\sqrt{BC}$
D = 5,623 413 ;	$\ell D = 0,750\ 000\ 0$;	E = $\sqrt{CD}$
E = 4,216 964 ;	$\ell E = 0,625\ 000\ 0$;	F = $\sqrt{DE}$
F = 4,869 674 ;	$\ell F = 0,687\ 500\ 0$;	G = $\sqrt{EF}$
G = 5,232 991 ;	$\ell G = 0,718\ 750\ 0$;	H = $\sqrt{FG}$
H = 5,048 065 ;	$\ell H = 0,703\ 125\ 0$;	I = $\sqrt{GH}$
I = 4,958 069 ;	$\ell I = 0,695\ 312\ 5$;	K = $\sqrt{HI}$
K = 5,002 865 ;	$\ell K = 0,699\ 218\ 7$;	L = $\sqrt{IK}$
L = 4,980 416 ;	$\ell L = 0,697\ 265\ 6$;	M = $\sqrt{KL}$
M = 4,991 627 ;	$\ell M = 0,698\ 242\ 1$;	N = $\sqrt{LM}$
N = 4,997 242 ;	$\ell N = 0,698\ 730\ 4$;	O = $\sqrt{NM}$
O = 5,000 052 ;	$\ell O = 0,698\ 974\ 5$;	P = $\sqrt{NO}$
P = 4,998 647 ;	$\ell P = 0,698\ 852\ 5$;	Q = $\sqrt{OP}$
Q = 4,999 350 ;	$\ell Q = 0,698\ 913\ 5$;	R = $\sqrt{OQ}$
R = 4,999 701 ;	$\ell R = 0,698\ 944\ 0$;	S = $\sqrt{OR}$
S = 4,999 876 ;	$\ell S = 0,698\ 959\ 2$;	T = $\sqrt{OS}$
T = 4,999 963 ;	$\ell T = 0,698\ 966\ 8$;	V = $\sqrt{OT}$
V = 5,000 008 ;	$\ell V = 0,698\ 970\ 7$;	W = $\sqrt{TV}$
W = 4,999 984 ;	$\ell W = 0,698\ 968\ 7$;	X = $\sqrt{VW}$
X = 4,999 997 ;	$\ell X = 0,698\ 969\ 7$;	Y = $\sqrt{WX}$
Y = 5,000 003 ;	$\ell Y = 0,698\ 970\ 2$;	Z = $\sqrt{XY}$
Z = 5,000 000 ;	$\ell Z = 0,698\ 970\ 0$;	

$$2. D = \sqrt{BC} = \sqrt{10 \times \sqrt{10}} \text{ et } \ell D = \frac{\ell B + \ell C}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

On retrouve bien les valeurs approchées comme celles données dans la table téléchargée.

3. À partir de G le calcul diffère car E et F sont tous deux inférieurs à 5, et il faut à chaque fois deux nombres qui encadrent 5.

4. Comme vu à l'exercice 113 : $\log 5 = \frac{\ln 5}{\ln 10}$ et

$$\ln \left(10^{\frac{69\ 897}{100\ 000}} \right) = \frac{69\ 897}{100\ 000} \ln 10$$

$$\text{soit } \frac{\ln \left(10^{\frac{69\ 897}{100\ 000}} \right)}{\ln 10} = \frac{69\ 897}{100\ 000} \approx \log 5 \text{ d'où } 10^{\frac{69\ 897}{100\ 000}} \approx 5.$$

B. 1. $x = 5$ et $p = 5$.

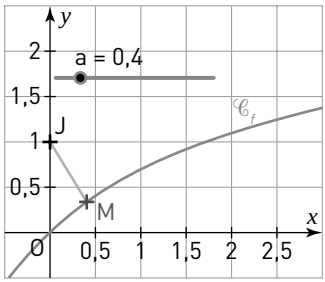
```
2. from math import*
A=1
B=10
lA=0
lB=1
while B-5>10**-5 :
    if sqrt (A*B) <=5 :
        A=sqrt (A*B)
        lA=(lA+lB)/2
    else :
        B=sqrt (A*B)
        lB=(lA+lB)/2
print (lB)
```

>>>
0.6989707946777344

TP 3. Distance d'un point à une courbe

- **Durée estimée** : 45 min
- **Objectif** : Résoudre un problème d'optimisation en conjecturant d'abord la réponse via un logiciel de géométrie dynamique, puis en faisant la démonstration reposant sur l'utilisation des propriétés de la fonction ln.

A. 1. 2. 3.



On conjecture : $x \approx 0,4$ et $JM \approx 0,77$.

B. 1. $g(x) = x^2 + (\ln(1+x) - 1)^2$
 $= x^2 + (\ln(1+x))^2 - 2 \ln(1+x) + 1$

2. $g'(x) = 2x + 2\ln(1+x) \times \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1+x}$
 $= 2 \times \frac{x(1+x) + \ln(1+x) - 1}{1+x}$
 $= 2 \times \frac{x^2 + x + \ln(1+x) - 1}{1+x}$
 $= 2 \times \frac{h(x)}{1+x}$ avec $h(x) = x^2 + x + \ln(1+x) - 1$.

3. $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + x - 1 = -1$ donc par somme des limites on

a $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x - 1 = +\infty$ donc par somme des limites on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

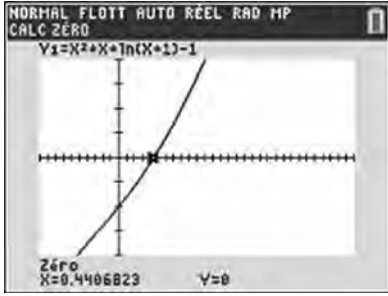
$$h'(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(2x+1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{2x^2 + 3x + 2}{x+1}$$

or pour tout $x \in]-1; +\infty[: x+1 > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est le même que celui de $2x^2 + 3x + 2$.

$\Delta = -7$ donc le polynôme $2x^2 + 3x + 2$ est toujours du signe de $a = 2$ soit positif.

x	-1	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	
Sens de variation de h		

4. Sur l'intervalle $]-1; +\infty[$, la fonction h est strictement croissante et continue, de plus pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $h(x) \in \mathbb{R}$ or $0 \in \mathbb{R}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α .



$\alpha \approx 0,44$

5.

x	-1	α	$+\infty$
Signe de $h(x)$ = signe de $g'(x)$	-	0	+
Sens de variation de g			

6. La fonction g admet donc un minimum atteint en α valant $g(\alpha) = \alpha^2 + (\ln(1 + \alpha))^2 - 2\ln(1 + \alpha) - 1$ or $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + \alpha) = 1 - \alpha^2 - \alpha$

d'où

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \alpha^2 + (1 - \alpha^2 - \alpha)^2 - 2(1 - \alpha^2 - \alpha) + 1 \\ &= \alpha^2 + (\alpha^4 + 2\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha + 1) - 2 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 1 \\ &= \alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2. \end{aligned}$$

7. On retrouve une valeur approchée de celle trouvée pour le curseur $a : a = 0,4$ et $\alpha \approx 0,44$ mais aussi pour la distance $JM = \sqrt{g(0,44)} \approx 0,77$ et $JM \approx 0,77$ sur le logiciel.

TP 4. Intensité sonore

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Découvrir une application du logarithme décimale permettant de répondre au problème d'ouverture du chapitre.

1. a)

l =	0,000005		L =	66,9897					
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
l' = k * l	0,00001	0,000015	0,00002	0,000025	0,00003	0,000035	0,00004	0,000045	0,00005
k * L	133,9794	200,9691	267,9588	334,9485	401,9382	468,9279	535,9176	602,9073	669,897
L'	70	71,76091259	73,010299	73,9794000	74,7712125	75,4406804	76,02059991	76,5321251	76,9897000

b) En B4 saisir : = B3 * \$B1.

c) En B5 saisir : = B3 * \$E1.

d) En B6 saisir : = 10*log10 $\left(\frac{B4}{10^{-12}}\right)$.

e) On remarque que $D6 \neq D5$, ce qui signifie que si on quadruple l'intensité sonore, le niveau d'intensité sonore quant à lui ne semble pas quadrupler.

2. a) $L' = 10 \times \log\left(\frac{4I}{I_0}\right)$ on applique simplement la définition donnée en 1.

$$\begin{aligned} \text{b) } L' &= 10 \times \log\left(4 \times \frac{I}{I_0}\right) \\ &= 10 \times \left(\log 4 + \log\left(\frac{I}{I_0}\right)\right) \\ &= 10\log 4 + 10\log \frac{I}{I_0} \approx 6 + L. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3. } L' &= 10 \times \log 0,2 \times \frac{I}{I_0} \\ &= 10 \times \log(0,2) + 10 \times \log \frac{I}{I_0} \approx -7 + L \end{aligned}$$

CHAPITRE 7 Primitives et équations différentielles

Manuel p. 202-237

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Dans ce chapitre est introduite la notion d'équation différentielle et les élèves y découvrent le concept d'équation où l'inconnue est une fonction.

L'équation $y' = f$ introduit la notion de primitive dont la pratique sera travaillée, à la fois sur les fonctions usuelles mais aussi sur les fonctions composées de la forme $(u' \circ v') \times v'$. Cette pratique doit permettre aux élèves d'installer des automatismes dans la recherche de primitives.

L'étude de l'équation $y' = ay + b$ est l'occasion de réinvestir les propriétés de la fonction exponentielle et les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien utiles dans la résolution d'équations et d'inéquations.

Ce chapitre sollicite les connaissances sur la continuité, la dérivabilité, les limites de fonctions, la résolution d'équations et d'inéquations. L'étude des équations différentielles développe les compétences pour prendre des initiatives et occupe une place centrale comme outil de modélisation.

L'algorithmique y occupe une part non négligeable notamment pour proposer une résolution approchée d'une équation $y' = ay + b$ par la méthode d'Euler.

Objectifs

- Montrer qu'une fonction y est solution d'une équation différentielle.
- Déterminer une primitive.
- Résoudre l'équation $y' = ay$ ou $y' = ay + b$.
- Étudier une fonction solution d'une équation $y' = ay + b$.
- Modéliser des phénomènes.
- Résoudre une équation $y' = ay + \varphi$ (a réel non nul, φ fonction).

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 203

1. Calculer des dérivées de fonctions usuelles

- a) $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x}$
- b) $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- c) $\mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin(x)$
- d) $]0 ; +\infty[\cup]-\infty ; 0[$, $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
- e) $]0 ; +\infty[\cup]-\infty ; 0[$, $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$
- f) $\mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^3$

2. Calculer des dérivées de fonctions

de la forme $u \times v$, $\frac{u}{v}$ ou $\frac{1}{v}$

- a) $]0 ; +\infty[\cup]-\infty ; 0[$, $f'(x) = \frac{(3x-1)e^{3x+1}}{x^2}$
- b) $\mathbb{R}$, $f'(x) = (x+2)e^x$
- c) $] -2 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$
- d) $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \ln x + 1$
- e) $] -\infty ; -5[\cup]-5 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{-2}{(x+5)^3}$
- f) $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$

3. Calculer des dérivées de fonctions composées

- a) $\mathbb{R}, f'(x) = -e^{-x+1}$ b) $\mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$
 c) $\mathbb{R}, f'(x) = 3\cos(3x + 1)$ d) $\mathbb{R}, f'(x) = 20(x + 1)^4$
 e) $\mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ f) $\mathbb{R}, f'(x) = 6xe^{3x^2-5}$

4. Identifier si deux fonctions ont la même dérivée

- a) Les fonctions sont égales à la constante $\ln 2$ près sur I . Leur dérivée est $f'(x) = \frac{2x + 6}{(x + 1)(x + 5)}$.
 b) $f'(x) = -2\sin(2x) - 2\cos(2x)$ et $g'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin(2x)$.
 Elles ne sont pas égales sur I .

5. Résoudre des équations

- a) $t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-3}$ b) Impossible.
 c) $x = \ln \frac{100}{7}$ d) $t = -2\ln 5$

Activités

p. 204-205

1 Découvrir la notion d'équation différentielle

- Durée estimée :** 10 min
- Objectif :** Introduire dans un contexte la notion d'équation différentielle et de fonction solution.
 Les fonctions $f : t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ sont deux fois dérivables et
 $f'(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$
 Et $f''(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)$.
 On vérifie que :
 $m f''(t) + k f(t) = m[-A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t)] + k[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$
 $= m\left(-A\frac{k}{m}\cos(\omega t) - B\frac{k}{m}\sin(\omega t)\right) + kA\cos(\omega t) + kB\sin(\omega t) = 0$.

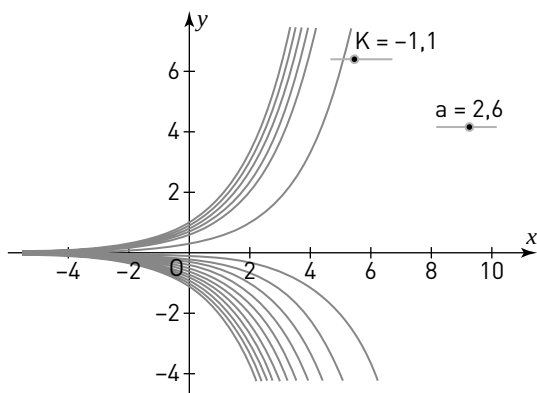
2 Découvrir la notion de primitive

- Durée estimée :** 30 min
- Objectif :** Déterminer une fonction primitive ou vérifier qu'une fonction est primitive d'une fonction donnée, en appliquant les règles de dérivation sur des exemples d'équations différentielles $y' = f$.
 1. a) $y(x) = e^x + 3x$ convient.
 b) $F(x) = 4\sqrt{x} - x$ convient.
 2. a) Ici on ne reconnaît pas directement des fonctions usuelles ou des formules de dérivation obtenues par opération sur des fonctions usuelles.
 b) $G(x) = (ax + b)e^x$ alors G est dérivable et $G'(x) = (a + ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$.
 Par identification avec $g(x) = (x + 2)e^x$, on arrive à $a = 1$ et $b = 1$.
 Ainsi $G(x) = (x + 1)e^x$.
 3. $H(x) = x\ln x - x$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $H'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.
 4. Si f et g ont la même dérivée sur I alors $f' - g' = 0$ sur I c'est-à-dire $(f - g)' = 0$, ainsi la fonction $f - g$ est constante sur I . Réciproquement s'il existe un réel k tel que $f - g = k$ alors $(f - g)' = 0$ soit $f' - g' = 0$ c'est-à-dire f et g ont la même dérivée sur I .

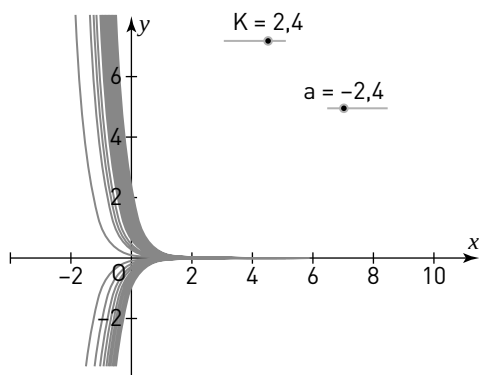
3 Introduire l'étude des équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$

- Durée estimée :** 30 min
 - Objectif :** À partir d'une fonction solution, découvrir un ensemble de fonctions solutions.
- A. L'équation $y' = y$**
- La fonction $x \mapsto e^x$.
 - Si on a $f' = f$ alors $(Kf)' = Kf' = Kf$ donc la fonction Kf est aussi solution de l'équation $y' = y$.
 - Les fonctions $x \mapsto Ke^x$, K réel.
- B. L'équation $y' = ay$ et les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ avec K et a réels**
- On dérive $f : x \mapsto e^{3x}$ et on obtient $f'(x) = 3e^{3x}$ donc $f' = 3f$.
 - Sur le modèle du 1. B et en appliquant le bilan du A on fournit :
 $x \mapsto Ke^{5x}$, K réel pour solutions de $y' = 5y$.
 $x \mapsto Ke^{-x}$, K réel pour solutions de $y' = -y$.

3. a positif et K positif puis négatif :



a négatif et K positif puis négatif :



4. a) Courbe 1 b) Courbe 5

c) Courbe 4 d) Courbe 3

e) Courbe 2

C. L'équation $y' = ay + b$

1. En effet $y + \frac{5}{3}$ et y ont la même dérivée.

On a : f solution de (E) si et seulement si

$$F' = 3f + 5 \Leftrightarrow \left(f + \frac{5}{3}\right)' = 3\left(f + \frac{5}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow f + \frac{5}{3} \text{ solution de } y' = 3y.$$

D'après la partie B, les fonctions $x \mapsto Ke^{3x}$, K réel, sont des solutions de $y' = 3y$.

Donc les fonctions $x \mapsto -\frac{5}{3} + Ke^{3x}$, K réel, sont des solutions de (E).

2. f solution de $y' = ay + b$

$$\Leftrightarrow \left(f + \frac{b}{a}\right)' = a\left(f + \frac{b}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow f + \frac{b}{a} \text{ solution de } y' = ay.$$

D'après la partie B, les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$, K réel, sont des solutions de $y' = ay$.

Donc les fonctions $x \mapsto -\frac{b}{a} + Ke^{ax}$, K réel, sont des solutions de $y' = ay + b$.

Exercices à vous de jouer

p. 207

1. a) $y'(x) = 5x^2 + 3x = f(x)$

b) $y'(x) = -\frac{3}{3x^4} = -\frac{1}{x^4} = f(x)$

2. a) $y(x) = e^{2x}$ donc $y'(x) = 2e^{2x}$ et on vérifie que $y' = 2y$.

b) $y(x) = \cos x \sin x$ donc :
 $y'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x$ ainsi $y''(x)$
 $= -2\cos x \sin x - 2\sin x \cos x$
 $= -4\cos x \sin x$
 donc $y'' = -4y$.

3. a) $y'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = f(x)$.

b) $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = f(x)$

c) $y'(x) = -\cos(x) = f(x)$

4. a) $F(x) = \frac{5}{12}x^4$

b) $F(x) = \frac{1}{4x^4}$

5. a) $F(x) = 2\sqrt{x}$ pour $I =]0 ; +\infty[$.

b) $F(x) = -\cos(x)$ pour $I = \mathbb{R}$.

6. 1. $F'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

2. L'ensemble des primitives sont les fonctions $x \mapsto x \ln(x) - x + K$, avec K réel.

3. La primitive F qui s'annule en 1 est telle que

$$F(1) = 0 \text{ soit } 1 \times \ln(1) - 1 + K = 0 \Leftrightarrow K = 1.$$

$$F(x) = x \ln(x) - x + 1$$

$$7. 1. F'(x) = 2 \times \left(-\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \right) = -2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$$

$$2. H(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + k \text{ et } H\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2 \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + k = 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(0) + k = 2 \Leftrightarrow k = 0$$

$$8. a) F(x) = e^{-x}$$

$$b) F(x) = e^{x^2}$$

$$c) F(x) = -\frac{\ln(x^3 + 5)}{3}$$

$$d) F(x) = \frac{(x^2 + x - 7)^6}{6}$$

$$9. a) F(x) = \frac{(x^4 + 3x)^3}{3}$$

$$b) F(x) = -\frac{1}{3x-1}$$

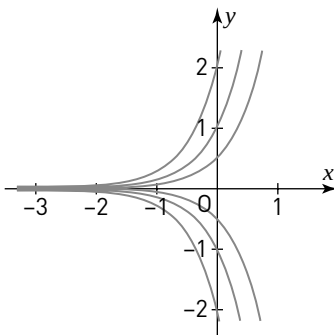
$$c) F(x) = \sqrt{x^2 + x - 5}$$

$$d) F(x) = \frac{-\cos(2x)}{4}$$

10. 1. L'ensemble des solutions sont les fonctions

$$y_K : x \mapsto Ke^{2x}, \text{ où } K \text{ est un réel.}$$

2. Si K est positif, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, si K est négatif la courbe est en dessous de cet axe.



$$11. 1. a) y' + \frac{1}{3}y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{3}y$$

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$$y_K : x \mapsto Ke^{-\frac{1}{3}x}, \text{ avec } K \text{ réel.}$$

$$b) 4y' + 5y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{4}y$$

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$$y_K : x \mapsto Ke^{-\frac{5}{4}x}, \text{ où } K \text{ est un réel.}$$

$$2. Ke^{-\frac{5}{4} \times 1} = 2 \Leftrightarrow K = 2e^{\frac{5}{4}}$$

$$\text{Donc } y : x \mapsto 2e^{\frac{5}{4}}e^{-\frac{5}{4}x}.$$

12. a) Une solution particulière est la fonction constante $-\frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$$y_K : x \mapsto -\frac{1}{2} + Ke^{2x}, \text{ avec } K \text{ réel.}$$

b) Une solution particulière est la fonction constante $\frac{2}{5}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$$y_K : x \mapsto \frac{2}{5} + Ke^{-5x}, \text{ avec } K \text{ réel.}$$

$$c) y' + y = 3 \Leftrightarrow y' = -y + 3$$

Une solution particulière est la fonction constante 3.

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$$y_K : x \mapsto 3 + Ke^{-x}, \text{ avec } K \text{ réel.}$$

$$d) 4y' + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y + \frac{5}{4}$$

Une solution particulière est la fonction constante 5.

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$$y_K : x \mapsto 5 + Ke^{-\frac{1}{4}x}, \text{ avec } K \text{ réel.}$$

13. Une solution particulière est la fonction constante -20.

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$$y_K : x \mapsto -20 + Ke^{0.5x}, \text{ avec } K \text{ réel.}$$

$$y_K(4) = -30 \Leftrightarrow -20 + Ke^{0.5 \times 4} = -30 \Leftrightarrow K = -10e^{-2}$$

$$y : x \mapsto -20 - 10e^{-2}e^{-5x}$$

$$14. 1. \text{ Une primitive est } x \mapsto \frac{1}{2} \sin^2(x).$$

$$2. \text{ Une primitive est } x \mapsto e^{x^2+2x}.$$

$$15. 1. \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} - \frac{(a+b+c)x^2 + (b-c)x - a}{x(x-1)(x+1)}$$

Par identification, $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$.

2. Une primitive est

$$G : x \mapsto -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1).$$

16. $h(x) = e^x + xe^x$

Une primitive est $H : x \mapsto xe^x$.

$$17. t(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$$

Une primitive est $T : x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{2}$.

$$18. 1. 3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{3}y$$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{-\frac{2}{3}x}$, K réel.

$$2. y_k(0) = e \Leftrightarrow Ke^{-\frac{2}{3} \cdot 0} = e \Leftrightarrow K = e.$$

$$\text{Donc } f : x \mapsto e \times e^{-\frac{2}{3}x} = e^{1-\frac{2}{3}x}.$$

$$3. f'(x) = -\frac{2}{3}e^{1-\frac{2}{3}x} < 0 \text{ pour tout réel } x.$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

$$5. f(x) = 5 \Leftrightarrow e^{1-\frac{2}{3}x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{3-3\ln(5)}{2}$$

$$19. 1. y' - 5y = 3 \quad y' = 5y + 3.$$

Une solution est la fonction constante $-\frac{3}{5}$.

Donc les solutions sont $y_k : x \mapsto -\frac{3}{5} + Ke^{5x}$, K réel.

$$2. y_k(0) = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow -\frac{3}{5} + Ke^{5 \cdot 0} = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow K = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Donc } f : x \mapsto -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{5x}.$$

3. $f'(x) = -3e^{5x} < 0$ pour tout réel x . Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3}{5} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

$$5. f(x) = -10 \Leftrightarrow -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{5x} = -10 \Leftrightarrow x = -\frac{\ln\left(\frac{47}{3}\right)}{5}$$

$$6. f(x) < -100 \Leftrightarrow -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{5x} < -100 \Leftrightarrow x > \frac{\ln\left(\frac{497}{3}\right)}{5}$$

7.

x ← 0

Tant que $-\frac{3}{5}(1+e^{5x}) \geq -10000$

x ← x + 1

Fin du tant que

20. 1. L'équation différentielle est $f' = \alpha f$, où α est une constante réelle. Les solutions sont de la forme $x \mapsto f(t) = Ke^{\alpha t}$, avec $f(0) = 25$ on obtient $f(t) = 25e^{\alpha t}$.

2. Avec la condition $f(10) = 15$, soit $25e^{\alpha \times 10} = 15$, on arrive à :

$$f : x \mapsto 25e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10}x}.$$

$$3. f(4) = 25e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10} \times 4} = 25e^{\frac{2\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{5}} \approx 20,4$$

Il reste environ 20,4 kg de sel.

$$4. f(x) = 0,5 \Leftrightarrow 25e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10}x} = 0,5 \Leftrightarrow x = \frac{-10\ln(50)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} \approx 76,6$$

Il ne reste plus que 0,5 kg de sel au bout d'environ 76,6 heures.

21. 1. Les solutions sont $y_k \mapsto Ke^{-0,035x}$, où K réel.

$$2. y_k(0) = 7 \Leftrightarrow K = 7 \text{ donc } g(x) = 7e^{-0,035x}.$$

$$3. g(100) = 7e^{-0,035 \times 100} = 7e^{-3,5}$$

$\approx 0,211 \text{ mW} > 0,08 \text{ mW}$ donc le son est détectable.

$$22. 1. g'(x) - 3g(x) = \frac{1}{2}e^{1-x} - 3\left(-\frac{1}{2}e^{1-x}\right) = 2e^{1-x}$$

Donc g est bien solution de (E).

$$2. f'(x) - 3f(x) = 2e^{1-x} \Leftrightarrow f' - 3f = g' - 3g \\ \Leftrightarrow (f - g)' - 3(f - g) = 0$$

$$3. y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$$

Les solutions de (E') sont de la forme Ke^{3x} , K réel.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions

$$f_k : x \mapsto -\frac{1}{2}e^{1-x} + Ke^{3x}, K \text{ réel.}$$

23. 1. $g'(x) + 2g(x) = 9e^{-3x} + 2(-3e^{-3x}) = 3e^{-3x}$

Donc g est bien solution de (E).

2. $f'(x) + 2f(x) = 3e^{-3x} \Leftrightarrow f' + 2f = g' + 2g$

3. $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$ (Les solutions de (E')) sont de la forme Ke^{-2x} , K réel.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions

$f_K : x \mapsto -3e^{-3x} + Ke^{-2x}$, K réel.

24. 1. Soit $h : x \mapsto ax + b$ (a et b réels).

$h'(x) = h(x) + x \Leftrightarrow a = (a + 1)x + b$

Par identification $a = -1$ et $b = -1$ donc $h : x \mapsto -x - 1$.

2. $f'(x) = f(x) + x \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = x$

$\Leftrightarrow f' - f = h' - h$

$\Leftrightarrow (f - h)' = f - h$

3. Les solutions de (E') sont de la forme Ke^x , K réel.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions

$f_K : x \mapsto -x - 1 + Ke^x$, K réel.

25. 1. $t'(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

$t(x) + \cos x = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \cos x$

$= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = t'(x)$

Donc t est bien solution de (E).

2. $f'(x) = f(x) + \cos x \Leftrightarrow f' - f = \cos x$

$\Leftrightarrow f' - f = t' - t$

$\Leftrightarrow (f - t)' = f - t$

3. Les solutions de (E') sont de la forme Ke^x , K réel.

Donc les solutions de (E) sont les fonctions

$f_K : x \mapsto -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + Ke^x$, K réel.

26. 1. Solutions de $(E_0) : y(x) = Ke^x - 1$.

2. $f'(x) = g'(x)\sin x + g(x)\cos x$

f est solution de (E) si et seulement si

$g'(x)\sin x + g(x)\cos x - \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right)g(x)\sin x = \sin x$

$\Leftrightarrow [g'(x) - g(x)]\sin x = \sin x$

$\Leftrightarrow [g'(x) - g(x)] = 1$ car $\sin x \neq 0$ c'est-à-dire $g' - g = 1$.

3. $f(x) = (Ke^x - 1)\sin x$

avec $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(Ke^{\frac{\pi}{4}} - 1\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

d'où $K = e^{\frac{-\pi}{4}}$.

27. 1. Si P est de degré n alors P' est de degré $n - 1$ donc $P' - P$ est de degré n ; ainsi pour P solution de $P'(x) = P(x) - x^2$, $P' - P$ est de degré 2 donc n est égal à 2.

2. On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$ alors $P'(x) = 2ax + b$.

P solution si et seulement si pour tout

$x : ax^2 + bx + c - x^2 = 2ax + b$.

Par identification des coefficients, on arrive à

$a = 1$, $b = c = 2$ donc $P(x) = x^2 + 2x + 2$.

3. f solution de $y' = y - x^2$ si et seulement si

$f' - f = P' - P$

si et seulement si $(f - P)' = f - P$

si et seulement si $f - P$ solution de $y' = y$

ainsi $f - P : x \mapsto Ke^x$.

Donc $f(x) = x^2 + 2x + 2 + Ke^x$.

Exercices

apprendre à démontrer

p. 216

Pour s'entraîner

Considérons une fonction $y(x) = Ke^{-ax}$.

Sa dérivée est $y'(x) = -Kae^{-ax}$, ainsi

$-ay(x) = -a(Ke^{-ax}) = -Kae^{-ax} = y'(x)$.

Réciproquement nous devons montrer que toute fonction solution est de la forme Ke^{-ax} .

Considérons g une solution de l'équation $y' = -ay$.

Alors, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g'(x) = -ag(x)$.

Définissons une fonction t par :

$t(x) = g(x) \times e^{ax}$.

t est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$t'(x) = g'(x) \times e^{ax} + ag(x)e^{ax}$

$= e^{ax}[g'(x) + ag(x)] = 0$.

La fonction t est donc une fonction constante.

Il existe un réel K tel que $t(x) = K$ et ainsi $g(x) = Ke^{-ax}$.

Exercices

calculs et automatismes

p. 217

28. Existence de primitives

a) Vrai car continue sur I .

b) Vrai car continue sur I .

29. Primitives de $x^n, n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$

- a) $\frac{x^2}{2}$ b) $\ln(x)$ c) $\frac{1}{8}x^8$
d) $-\frac{1}{x}$ e) $\frac{-1}{2x^2}$ f) $\frac{-1}{4x^4}$

30. Logique

- a) Si F est une primitive d'une fonction f sur I , alors toute fonction de la forme $F + k$ (k réel) est aussi primitive de f sur I .
b) Si deux fonctions f et g continues sur I sont égales, alors leurs primitives sont égales à une constante réelle près.
c) Considérant deux fonctions F et G dérivables sur I , on a : $(F - G)' = 0 \Leftrightarrow F = G + k$, k réel.
d) Pour u et v fonctions dérivables, la fonction $u' \times (v \circ u)$ admet une primitive de la forme $v \circ u$.

31. Primitives de fonctions usuelles

1. b) 2. d) 3. b) 4. c)

32. Équations différentielles

- a) Vrai b) Faux c) Faux d) Vrai

33. Primitives et opérations

Forme (u fonction dérivable)	$f(x)$	Primitive $F(x)$
$u' u^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ et $n \neq -1$	$(2x + 1)(x^2 + x + 5)$	$\frac{1}{3}[(x^2 + x + 3)^3]$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 5)^2}$	$\frac{-1}{x^2 + x + 5}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 5}}$	$\sqrt{x^2 + x + 5}$
$\frac{u'}{u}$	$\frac{2x + 1}{x^2 + x + 5}$	$\ln(x^2 + x + 5)$
$u'e^u$	$(2x + 1)e^{x^2 + x + 5}$	$e^{x^2 + x + 5}$
$v' \times (u' \cdot v)$	$(2x + 1)\cos(x^2 + x + 5)$	$\sin(x^2 + x + 5)$

34. Équations différentielles $y' = ay$

1. d) 2. b)

35. Équations différentielles $y' = ay + b$

1. a) 2. d) 3. d)

36. Équations différentielles

C'est la courbe $\mathcal{C}_2$.

Exercices d'application p. 218-221

Montrer qu'une fonction est solution de $y' = f$

37. 1. a) $F'(x) = 3x + 1 = f(x)$

b) $F'(x) = -x^2 + e^x = f(x)$

c) $F'(x) = x^4 + x^3 + x = f(x)$

2. a) $F'(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x - 4} = f(x)$ sur $I =]4; +\infty[$.

b) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = f(x)$ sur $I =]0; +\infty[$.

38. 1. a) $F'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x = f(x)$

b) $F'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - 2xe^x}{(x^2 + 1)^2}$
 $= \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)e^x}{(x^2 + 1)^2} = f(x)$

2. a) $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}e^x$
 $= \left(\frac{1 + 2x}{2\sqrt{x}}\right)e^x = f(x)$

b) $F'(x) = \ln(x) + \frac{x + 1}{x}$
 $= \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} = f(x)$

39. a) $F'(x) = (x + 1)^2 = f(x)$ sur $I = \mathbb{R}$.

b) $F'(x) = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } F'(x) &= \frac{4(2x+3)(x^2+3x+1)}{[2(x^2+3x+1)]^2} \\ &= \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3} = f(x) \end{aligned}$$

$$\text{sur } I = \left] -\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right[.$$

$$\text{d) } F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}.$$

$$\text{40. a) } F'(x) = 2\cos(2x+3) = f(x) \text{ sur } I = \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } F'(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= 1 + \tan^2(x) = f(x) \end{aligned}$$

$$\text{sur } I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

$$\text{41. 1. } F'(x) = \frac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = f(x) \text{ sur }]1; +\infty[.$$

$$\text{2. } F'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)x - x - 2 + \ln x}{x^2} = f(x) \text{ sur }]0; +\infty[.$$

$$\begin{aligned} \text{3. } F'(x) &= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln x + x = f(x) \text{ sur }]0; +\infty[. \end{aligned}$$

$$\text{4. } F'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = f(x) \text{ sur }]0; +\infty[.$$

Primitive d'une fonction usuelle

$$\text{42. a) } F(x) = e^x \quad \text{b) } F(x) = 2\sqrt{x}$$

$$\text{c) } F(x) = \ln(x) \quad \text{d) } F(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{43. a) } F(x) = \frac{5}{12}x^4 \quad \text{b) } F(x) = \frac{1}{2}x^3$$

$$\text{c) } F(x) = \frac{1}{3x^3} \quad \text{d) } F(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

Ensemble des primitives d'une fonction usuelle, primitive avec conditions initiales

$$\text{44. a) Sur } I = \mathbb{R}, F(x) = e^x + k, k \text{ réel.}$$

$$\text{b) Sur } I =]0; +\infty[, F(x) = 2\sqrt{x} + k, k \text{ réel.}$$

$$\text{c) Sur } I =]0; +\infty[, F(x) = \ln(x) + k, k \text{ réel.}$$

$$\text{d) Sur } I = \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{8}x^8 + k, k \text{ réel.}$$

$$\text{45. a) } F(x) = e^x - 1 - e \quad \text{b) } F(x) = 2\sqrt{x} - 4$$

$$\text{c) } F(x) = \ln(x) - 5 \quad \text{d) } F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{3}$$

$$\text{46. a) } F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4 \quad \text{b) } F(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{3}$$

$$\text{c) } F(x) = \frac{-1}{x} + 3 \quad \text{d) } F(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{47. On cherche une fonction } f \text{ telle que } f'(x) = \frac{2}{x^2} \text{ et } f(-1) = -2.$$

$$\text{L'équation de la courbe est donc } y = -\frac{2}{x} - 4.$$

Déterminer une primitive

$$\text{48. a) } F(x) = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$$

$$\text{b) } F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 5x$$

$$\text{c) } F(x) = e^x + \frac{1}{4}x^4$$

$$\text{d) } F(x) = 2e^x + x^3 + 5x$$

$$\text{e) } F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 + 5x$$

$$\text{49. a) } F(x) = \ln(x) + \frac{1}{3}x^3 + k, k \text{ réel.}$$

$$\text{b) } F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + k, k \text{ réel.}$$

$$\text{c) } F(x) = 3\ln(x) + \frac{5}{2}x^2 + k, k \text{ réel.}$$

$$\text{d) } F(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{x} + \ln(x) + x + k, k \text{ réel.}$$

50. a) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

b) $F(x) = e^{-x^2}$

c) $F(x) = e^{x^3+x} + 4x$

d) $F(x) = (x^3 + x + 1)^3$

51. a) $F(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ b) $F(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

c) $F(x) = -\frac{1}{x^2 + x + 1}$

d) $F(x) = -\frac{1}{4(x^2 + x + 1)^4}$

52. a) $F(x) = \ln(x^2 + 4x + 1) \text{ sur } I =]-2 + \sqrt{3}; +\infty[$

b) $F(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 1} \text{ sur } I =]-2 + \sqrt{3}; +\infty[$

c) $F(x) = -\frac{1}{x^2 + 4x + 1} \text{ sur } I =]-2 + \sqrt{3}; +\infty[$

d) $F(x) = -\frac{1}{4(x^2 + 4x + 1)^4} \text{ sur } I = \mathbb{R}$

53. a) $F(x) = \frac{1}{8}(x+1)^8 \text{ sur } I = \mathbb{R}$

b) $F(x) = -\frac{1}{2(x+4)^2} \text{ sur } I =]4; +\infty[$

c) $F(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \ln(x-2) \text{ sur } I =]2; +\infty[$

d) $F(x) = -\frac{3}{x-1} \text{ sur } I =]1; +\infty[$

54. a) $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x+1) \text{ sur } I = \mathbb{R}$

b) $F(x) = -\frac{1}{6}\cos^3(2x+1) \text{ sur } I = \mathbb{R}$

c) $F(x) = -\ln(\cos(x)) \text{ sur } I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

d) $F(x) = \frac{1}{\sin(x)} \text{ sur } I =]0; \pi[$

Déterminer une primitive avec conditions initiales

55. a) $F(x) = \frac{1}{6}(x+1)^6 - \frac{1}{6}$

b) $F(x) = -\frac{1}{7}e^{-7x} + \frac{1}{2}x^2$

c) $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-2x+2} + 1 - \frac{1}{2}e^{4-2\sqrt{2}}$

d) $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x - 1)^3 - \frac{2}{3}$

56. a) $F(x) = \ln(3x^2 + x + 1) + 2$

b) $F(x) = \sqrt{3x^2 + 4x + 1} + 1$

c) $F(x) = \frac{1}{7}\sin(7x) + 2$

d) $F(x) = -\frac{2}{x+4} + 3$

57. 1. $x \mapsto e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x}$ est dérivable, donc continue, sur $]0; +\infty[$. Elle admet donc des primitives sur $]0; +\infty[$.

2. La primitive est $F : x \mapsto e^x \ln(x)$.

Équation différentielle $y' = ay$

58. 1. b) 2. d) 3. a)

59. a) Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{4x}$, K réel.

b) Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{\frac{3}{x}}$, K réel.

c) $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{-2x}$, K réel.

d) $3y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3}y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{\frac{1}{3}x}$, K réel.

60. 1. $y' - 10y = 0 \Leftrightarrow y' = 10y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{10x}$, K réel.

1. $y_k \left(\frac{2}{e} \right) = -0,1 \Leftrightarrow Ke^{\frac{10 \times 2}{e}} = -0,1$

$$\Leftrightarrow K = -0,1e^{-\frac{20}{e}}$$

Donc la solution est $y : x \mapsto -0,1e^{-\frac{20}{e} + 10x}$.

61. 1. a) $2y' + 5y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{2}y$

Les solutions sont $y_k : x \mapsto Ke^{-\frac{5}{2}x}$, K réel.

b) $y_k(2) = 1 \Leftrightarrow Ke^{\frac{5}{2} \times 2} = 1 \Leftrightarrow K = 2e^5$.

Donc la solution est $y : x \mapsto 2e^{\frac{5}{2}x}$.

2. a) Les fonctions ont la même expression algébrique, ce sont donc les mêmes.

b) $f'(x) = -\frac{5}{2}e^{-\frac{5}{2}x+5} < 0$ pour tout réel x .

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

62. 1. Proposition 1 : **Faux**.

2. Proposition 2 : **Faux**.

3. Proposition 3 : **Vrai**.

Proposition 4 : **Faux**.

63. 1. P est de la forme $Ke^{0,21t}$, K réel.

2. $P(0) = 0,07 \Leftrightarrow Ke^{0,21 \times 0} = 0,07 \Leftrightarrow K = 0,07$

Donc $P(x) = 0,07e^{0,21x}$.

$P(30) = 0,07e^{0,21 \times 30} = 0,07e^{6,3} \approx 38,1$

La plante pèse environ 38,1 g au bout d'un mois.

64. 1. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ke^{\frac{x}{2}}$,

seule la fonction avec $K = y_0 \times e^{\frac{-x_0}{2}}$ passe par M_0 .

2. Le point d'ordonnée 2 de ces courbes est aussi

associé au nombre dérivé $y' = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

Donc parallèle à la droite $y = x$.

65. 1. $a = 0,8$ et $b = \frac{\ln(2,7125)}{10} \approx 0,100$

2. $y' = by$

3. $f(23) \approx 0,8e^{0,100 \times 23} \approx 7,98$

En 2023, le montant des ventes sera d'environ 7,98 milliers d'euros.

Équation différentielle $y' = ay + b$

66. a) Les solutions sont $y_k : x \mapsto \frac{1}{2} + Ke^{2x}$, K réel.

b) Les solutions sont $y_k : x \mapsto 4 + Ke^{-\frac{1}{4}x}$, K réel.

c) Les solutions sont $y_k : x \mapsto \frac{3}{2} + Ke^{-2x}$, K réel.

d) Les solutions sont $y_k : x \mapsto -\frac{1}{5} + Ke^{\frac{5}{2}x}$, K réel.

67. 1. a)

2. a)

68. 1. Les solutions sont $y_k : x \mapsto -\frac{5}{2} + Ke^{2x}$, K réel.

2. $y_k(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} + Ke^{2 \times 0} = 0 \Leftrightarrow K = \frac{5}{2}$.

Donc la solution est $y : x \mapsto -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}e^{2x}$.

69. La fonction solution est $y : x \mapsto 3 - 2e^{-2x}$.

C'est la courbe $\mathcal{C}_4$.

70. 1. a) Les solutions sont $y_k : x \mapsto -4 + Ke^{\frac{1}{5}x}$, K réel.

b) $y_k(5) = -5 \Leftrightarrow -4 + Ke^{\frac{1}{5} \times 5} = -5 \Leftrightarrow K = -\frac{1}{e}$

Donc la solution est $y : x \mapsto -4 - \frac{1}{e}e^{\frac{1}{5}x} = -4 - e^{\frac{1}{5}x-1}$.

2. a) Les fonctions ont la même expression algébrique, ce sont donc les mêmes.

b) $f'(x) = -\frac{1}{5}e^{\frac{1}{5}x-1} < 0$ pour tout réel x .

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

71. 1. a) $f(x) = Ce^{-0,12x}$ où C est un réel quelconque.

b) $f(x) = 1013,25 e^{-0,12x}$

2. a) Une altitude de 150 mètres correspond à 0,15 kilomètre donc la pression atmosphérique à 150 mètres d'altitude est $f(0,15) \approx 995,17$ hPa.

b) L'altitude correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa est la solution (en kilomètre) de l'équation

$f(x) = 900 \Leftrightarrow 1\,013,25e^{-0,12x}$

$$\Leftrightarrow -0,12x = \ln \frac{900}{1013,25} \Leftrightarrow x = \frac{\ln \frac{900}{1013,25}}{-0,12}$$

$\Leftrightarrow x \approx 0,988$. L'altitude correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa est 988 mètres.

72. 1. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $\frac{0,1}{k} + Ce^{-kt}$, C réel.

$$\frac{0,1}{k} + Ce^{-k \times 0} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{0,1}{k}$$

$$\text{Donc } Q(t) = \frac{0,1}{k} - \frac{0,1}{k}e^{-kt}.$$

2. $k > 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \frac{0,1}{k}$, cette limite dépend donc de k .

Donc, après un certain temps, la quantité de pénicilline dans le sang sera proche de $\frac{0,1}{k}$ mg.

$$\mathbf{3.} \quad Q(180) = \frac{0,1}{2k} \Leftrightarrow \frac{0,1}{k} - \frac{0,1}{k}e^{-180k} = \frac{0,1}{2k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln(2)}{180}$$

73. 1. $u(t) = k \cdot e^{-t/RC}$

à $t = 0$: $u = 20$, donc $k = 20$ et donc $u(t) = 20 e^{-t/RC}$.

2. $RC = 0,1$ donc $u(t) = 20e^{-10t}$.

$$u(t) > 5 \Leftrightarrow 20e^{-10t} > 5$$

$$\Leftrightarrow -10t > \ln(0,25) \Leftrightarrow t < \frac{\ln(0,25)}{-10}$$

$$\Leftrightarrow t < 0,14$$

74. 1. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $Ke^{(\beta-\delta)t}$, K réel.

$$Ke^{(\beta-\delta) \times 0} = N_0 \Leftrightarrow K = N_0$$

$$\text{Donc } N(t) = N_0 e^{(\beta-\delta)t}.$$

2. Si $\beta > \delta$, N est alors une fonction exponentielle avec un coefficient strictement positif en exposant, elle a donc le même comportement que la fonction exponentielle.

3. Si $\beta < \delta$, N est alors une fonction exponentielle avec un coefficient strictement négatif en exposant, il s'agit donc d'une décroissance exponentielle.

75. 1. a) $f(t) = 0,025 + Ke^{-0,12t}$, $K \in \mathbb{R}$.

b) $f(0) = 0,5$

c) On a donc pour $t > 0$,

$$f(t) = 0,025 + 0,475e^{-0,12t}.$$

2. a) $f'(t) = -0,057e^{-0,12t} < 0$ donc $f'(t) < 0$ sur $[0 ; +\infty[$, donc f est décroissante sur cet intervalle.

c) Le résultat précédent montre que la concentration va baisser à partir de 0,5.

3. $f(t) = 0,25$

$$\Leftrightarrow 0,025 + 0,475e^{-0,12t} = 0,25$$

$$\Leftrightarrow 0,475e^{-0,12t} = 0,225$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,12t} = \ln\left(\frac{9}{19}\right)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{9}{19}\right)}{-0,12} \approx 6,227$$

Il faut donc un peu plus de 6 minutes pour avoir une concentration de 0,25 mole par litre.

4. a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,12t} = 0$ alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0,025$.

Au bout d'un certain temps la concentration en octane va se rapprocher de 0,025 mole par litre.

b) Au bout d'une heure (60 min), la concentration en octane est égale à :

$f(60) = 0,475e^{-0,12 \times 60} + 0,025 \approx 0,025355$, donc très proche de la valeur 0,025. Il est donc inutile de continuer le processus après une heure.

Exercices d'entraînement p. 222-224

Transformer l'écriture d'une fonction pour trouver ses primitives

$$\begin{aligned} \mathbf{76. 1.} \quad \sin x - \sin x \times \cos^2 x &= \sin x - \sin x(1 - \sin^2 x) \\ &= \sin x - \sin x + \sin^3 x \\ &= \sin^3 x \end{aligned}$$

$$\mathbf{2.} \quad F : x \mapsto -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$$

$$\mathbf{3.} \quad F_k : x \mapsto -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + k, \quad k \text{ réel.}$$

$$-\cos(\pi) + \frac{1}{3}\cos^3(\pi) + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}.$$

$$F : x \mapsto -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{2}{3}$$

77. 1. $h(x) = 1 \times e^{2x} + x \times 2e^{2x} = u'v + v'u$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{2x}$.

Une primitive sera : $x \mapsto H(x) = xe^{2x}$.

2. $g(x) = -\sin(x)e^x + \cos(x)e^x = u'v + v'u$ avec $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = e^x$.

Une primitive $G : x \mapsto \cos(x)e^x$.

78. Les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ sont de la forme $\ln(\ln(x)) + k$, k réel.

$$\ln(\ln(e)) + k = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

$$F : x \mapsto \ln(\ln(x)) + 1$$

79. Les primitives de $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$ sont de la forme $\ln(\sqrt{x^2 + 1}) + k$, k réel.

$$\ln(\sqrt{1^2 + 1}) + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \ln(2)$$

$$F : x \mapsto \ln(\sqrt{x^2 + 1}) - \frac{1}{2} \ln(2)$$

80. 1. $F'(x) = ae^{1-x} - axe^{1-x} = (a - ax)e^{1-x}$.

Par identification avec $f(x)$, $a = 2$.

2. L'ensemble des primitives de f est

$$\{x \mapsto 2xe^{1-x} + k, k \text{ réel}\}.$$

$$2 \times 2,75e^{1-2,75} + k = 0 \Leftrightarrow k = -5,5e^{-1,75}$$

$$x \mapsto 2xe^{1-x} - 5,5e^{-1,75}$$

Étude complète d'une fonction primitive

81. 1. $f'(t) = e^{t-1} + te^{t-1} = (t+1)e^{t-1}$.

2. $f'(t) = (t+1)e^{t-1}$ et $e^{t-1} > 0$ pour tout réel t , le signe de $f'(t)$ dépend donc du signe de $(t+1)$.

t	$-\infty$	-1	$+\infty$
$t+1$	$-$	0	$+$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$	$1 - e^{-2}$	$+\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(t) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$

82. 1. $F'(x) = \ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} - 3$
 $= \ln(x+1) - 2 = f(x)$

2. $F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^2 - 1$

x	$-\infty$	$e^2 - 1$	$+\infty$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$+\infty$	$1 - e^{-2}$	$+\infty$

3. $f(0) = \ln(0+1) - 2 = -2$

Le coefficient directeur est donc -2 .

83. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} > 0$ pour tout réel x .

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$F(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. a) $x + 2 + \ln(4) - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x + \ln(4) + \frac{2(e^x + 1) - 2e^x}{e^x + 1}$
 $= x + \ln(4) + \frac{2}{e^x + 1} = f(x)$

b) L'ensemble des primitives de f est

$$\left\{ \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln(4)x - 2\ln(e^x + 1) + k, k \text{ réel} \right\}.$$

84. 1. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{(a+b+c)x^2 + (b-c)x - a}{x(x^2 - 1)}$

Par identification avec $g(x)$, $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{2}$.

2. L'ensemble des primitives de g est

$$\left\{ -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) + k, k \text{ réel} \right\}$$

3. $G(x) = -\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) + k$
 $= \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right) + k$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = k$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} G(x) = -\infty$.

85. 1. Proposition 1 : **Faux**.

Proposition 2 : **Faux**.

2. Proposition 3 : **Faux**.

Proposition 4 : **Vrai**.

86. 1. $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$

Les solutions sont de la forme Ke^{-x} , K réel.

$$Ke^{-0} = e \Leftrightarrow K = e$$

Donc $f(x) = e^{1-x}$.

2. $e^{1-x} = c \Leftrightarrow 1-x = \ln(c) \Leftrightarrow x = 1 - \ln(c)$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$

4. Cet algorithme détermine, pour un entier p donné, à partir de quelle valeur entière x on a $e^{1-x} < 10^{-p}$.

Étant donné que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$ et que $10^{-p} > 0$ pour tout entier p , cet algorithme va forcément s'arrêter par définition de la limite.

Modéliser avec des équations différentielles

87. 1. L'équation différentielle est $T' = cT$, où c est une constante réelle.

La fonction solution est $T : x \mapsto 100e^{\frac{\ln\left(\frac{9}{20}\right)}{10}x}$

2. $T(x) = 25 \Leftrightarrow 100e^{\frac{\ln\left(\frac{9}{20}\right)}{10}x} = 25$
 $\Leftrightarrow x = \frac{-10\ln(4)}{\ln\left(\frac{9}{20}\right)} \approx 17$

La température atteindra 25° au bout de environ 17 min.

88. 1. a) $B' = kB$, k réel, avec les conditions $B(0) = 600$ et $B(2) = 1800$.

b) Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme Ce^{kt} , C réel.

$B(0) = 600 \Leftrightarrow Ce^{k \times 0} = 600 \Leftrightarrow C = 600$

$B(2) = 1800 \Leftrightarrow 600e^{2k} = 1800 \Leftrightarrow k = \frac{\ln(3)}{2}$

Donc $B(t) = 600e^{\frac{\ln(3)}{2}t}$.

c) $B(4) = 600e^{\frac{\ln(3)}{2} \times 4} = 5\,400$.

Il y a 5 400 bactéries après 4 heures.

d) $B(t) > 12\,000 \Leftrightarrow 600e^{\frac{\ln(3)}{2}t} > 12\,000$
 $\Leftrightarrow t > \frac{2\ln(20)}{\ln(3)} \approx 5,45$

Le nombre de bactérie dépassera 12 000 au bout d'environ 5,45 heures.

2.

t ← 0 Tant que $600e^{\frac{\ln(3)}{2}t} < 12\,000$: t ← t + 1 Fin tant que
--

89. 1. a) $f(t) = Ce^{-0,065t} + 30$

b) $f(0) = 1400$ donc $C = 1\,370$ et $f(t) = 1370e^{-0,065t} + 30$.

2. a) Sur $[0 ; +\infty[$,

$f'(t) = -0,065 \times 1370e^{-0,065t} < 0$.

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

b) La fonction f représente la température de la pièce après sa sortie du four ; la pièce refroidit en sortant du four donc la température diminue et donc la fonction f est décroissante.

90. 1. $Y' = 0,25(360 + 0,8Y + 120 - Y)$

$\Leftrightarrow Y' = -0,05Y + 120$.

2. $Y(t) = Ce^{-0,05t} + 2400$ et $Y(0) = 2\,000$ donc $C = -400$ et $Y(t) = -400e^{(-0,05t)} + 2\,400$.

3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 2\,400$.

Le revenu se stabilise à 2 400.

91. 1. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $Ke^{-0,7x}$, K réel.

$f(0) = e^{2,1} \Leftrightarrow Ke^{-0,7 \times 0} = e^{2,1} \Leftrightarrow K = e^{2,1}$.

Donc $f(x) = e^{2,1}e^{-0,7x} = e^{2,1-0,7x}$.

2. a) $h'(x) = f'(x) - g'(x) = -0,7e^{2,1-0,7x} - 0,5$

b) $e^{2,1-0,7x} > 0$ pour tout réel x donc

$h'(x) = -0,7e^{2,1-0,7x} - 0,5 < 0$ pour tout réel x .

Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) Sur $[0 ; 5]$, h est continue (car dérivable) et strictement décroissante, de plus

$h(0) = e^{2,1-0,7 \times 0} - (0,5 \times 0 + 0,7) = e^{2,1} - 0,7 > 0$

et $h(5) = e^{2,1-0,7 \times 5} - (0,5 \times 5 + 0,7) = e^{-1,4} - 3,2 < 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; 5]$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 2,172$.

3. $f(q_0) = g(q_0) \Leftrightarrow f(q_0) - g(q_0) = 0$

$\Leftrightarrow h(q_0) = 0 \Leftrightarrow q_0 = \alpha$

Donc $q_0 = \alpha \approx 2,172$ et $p_0 = g(q_0) = 0,5\alpha + 0,7 \approx 1,786$

92. 1. Le volume de CO_2 présent dans cette pièce à 20 h est de $900\,000 \times \frac{0,6}{100} = 9\,000 \times 0,6 = 5400 \text{ dm}^3$.

2. a) $V(t) = Ae^{-0,01t} + 450$ avec $A \in \mathbb{R}$.

b) $V(0) = A + 450 = 5\,400$, d'où $A = 5\,400 - 450 = 4\,950$ ainsi

$$V(t) = 4\,950e^{-0,01t} + 450$$

3. 21 h correspond à $t = 60$, donc

$$V(60) = 4\,950e^{-0,01 \times 60} + 450 \approx 3\,166,62, \text{ soit } 3\,167 \text{ dm}^3 \text{ à } 1 \text{ dm}^3 \text{ près.}$$

93. 1. $g: t \mapsto M$ est une solution particulière de l'équation.

C est solution de l'équation différentielle si et seulement si $C - g$ est solution de $y' = -ky$.

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$Ae^{-kt}, A \text{ réel.}$$

Donc C est de la forme $M + Ae^{-kt}$, A réel.

$$C(0) = 0 \Leftrightarrow M + Ae^{-k \times 0} = 0 \Leftrightarrow A = -M$$

$$\text{Donc } C(t) = M - Me^{-kt}.$$

2. $C'(t) = kMe^{-kt} \geq 0$ pour tout réel t car $M > 0$ et $k \geq 0$.

Donc C est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = M$$

3. Dans ce cas, $M = 180$.

$$C(15) = 90 \Leftrightarrow 180 - 180e^{-15k} = 90 \Leftrightarrow k = \frac{\ln(2)}{15}$$

$$\text{Donc } C(t) = 180 - 180e^{-\frac{\ln(2)}{15}t}.$$

$$C(t) > 170 \Leftrightarrow 180 - 180e^{-\frac{\ln(2)}{15}t} = 170$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{15 \ln(18)}{\ln(2)} \approx 62,5$$

Le maïs sera à moins de 10 cm de sa taille maximale au bout de 63 jours.

$$\mathbf{94. 1.} \quad T' = -0,1(T - 20)$$

2. a) Si T est constante $T' = 0$ et $-0,1(20 - 20) = 0$, la fonction constante 20 est donc solution.

b) $T(t) = 20 + Ke^{-0,1t}$ avec $T(0) = 100 = 20 + Ke^{-0,1 \times 0}$ d'où $K = 80$. $T(t) = 20 + 80e^{-0,1t}$

$$\mathbf{95. 1.} \quad 100y' + 12y = 0 \Leftrightarrow y' = -0,12y$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-0,12x}$, K réel.

$$y(0) = 100 \Leftrightarrow Ke^{-0,12 \times 0} = 100 \Leftrightarrow K = 100$$

Donc la solution est $y: x \mapsto 100e^{-0,12x}$.

2. Les valeurs de a et b correspondent aux extrêmes d'un encadrement d'amplitude 0,01 de

l'antécédent de 80 par f , la solution trouvée en **1.**, obtenue par dichotomie.

Équations différentielles $y' = ay + \varphi$, ou s'y ramenant

96. 1. a) $g: x \mapsto 1$

b) y est solution de (F) si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = -y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^{-x} , K réel.

L'ensemble des solutions de (F) est donc $\{x \mapsto 1 + Ke^{-x}, K \text{ réel}\}$.

$$\mathbf{2.} \quad f'(x) + (1 + \tan(x))f(x) = \cos(x)$$

$$g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x)$$

$$+ (1 + \tan(x))g(x)\cos(x) = \cos(x)$$

$$g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x)$$

$$+ g(x)\cos(x) + g(x)\cos(x)\tan(x) = \cos(x)$$

$$g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x)$$

$$+ g(x)\cos(x) + g(x)\cos(x)\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \cos(x)$$

$$g'(x)\cos(x) - g(x)\sin(x)$$

$$+ g(x)\cos(x) + g(x)\sin(x) = \cos(x)$$

$$g'(x)\cos(x)g(x)\cos(x) = \cos(x)$$

$$g'(x) + g(x) = \cos(x)$$

$$\cos(x) \neq 0 \text{ pour } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

3. Les solutions de (F) sont $g_k: x \mapsto 1 + Ke^{-x}$, K réel.

Donc les solutions de (E) sont $f_k: x \mapsto (1 + Ke^{-x})\cos(x)$ K réel.

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow (1 + Ke^{-0})\cos(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow K = -1$$

$$\text{Donc } f(x) = (1 - e^{-x})\cos(x).$$

$$\mathbf{97. 1.} \quad p'(x) + 3p(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2ae^{2x} + 3ae^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 5ae^{2x} = e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$$

2. y est solution de (E) si et seulement si $y - p$ est solution de $y' = -3y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^{-3x} , K réel.

Donc les solutions de (E) sont $y_k: x \mapsto \frac{1}{5}e^{2x} + Ke^{-3x}$.

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5}e^{2 \times 0} + Ke^{-3 \times 0} = 1 \Leftrightarrow K = \frac{4}{5}$$

$$\text{Donc } y(x) = \frac{1}{5}e^{2x} + \frac{4}{5}e^{-3x}.$$

98. A. 1. Les solutions sont $x \mapsto Ce^{-2x}$, C constante réelle.

2. Avec $C = \frac{9}{2}$ on obtient la fonction h .

3. g est dérivable et $g'(x) = 9e^{-3x}$ et donc $g'(x) + 2g(x) = 3e^{-3x}$.

4. Comme $f = g + h$ alors $f' = g' + h'$ donc pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) + 2f(x) &= g'(x) + 2g(x) + h'(x) + 2h(x) \\ &= 3e^{-3x} + 0 = 3e^{-3x}. \end{aligned}$$

Ainsi f est solution de (E).

B. 1. On factorise par $3e^{-2x}$,

$$f(x) = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - \frac{e^{-3x}}{e^{-2x}} \right) = 3e^{-3x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right)$$

2. En $+\infty$: par composition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0, \text{ de même}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \text{ on en déduit par opérations que}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

En $-\infty$: par composition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty, \text{ de même } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty, \text{ on en déduit}$$

$$\text{par opérations que } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

3.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	0

$$\begin{aligned} f'(x) &= -9e^{-2x} + 9e^{-3x} \\ &= 9e^{-2x}(-1 + e^{-x}) \end{aligned}$$

Comme $9e^{-2x}$ est positif alors $f'(x)$ est du signe de $-1 + e^{-x}$, donc positif pour $x \leq 0$.

4. D'après l'expression de la question **B. 1**, et comme pour tout réel x , $3e^{-2x} \neq 0$, on a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \ln \frac{2}{3} \approx -0,4 \text{ (à 0,01 près)}. \text{ La courbe } \mathcal{C}_f \text{ coupe l'axe } (Ox) \text{ en un seul point A de coordonnées } \left(\ln \frac{2}{3}; 0 \right).$$

Intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe (Oy) : il s'agit du point de coordonnées $B(0; f(0))$ c'est-à-dire $\left(0; \frac{3}{2} \right)$.

99. Travail de l'élève.

100. Travail de l'élève.

Exercices bilan

p. 225-226

101. Temps de refroidissement

1. a) La fonction constante est $f : x \mapsto 20$.

b) y est solution de (E) si et seulement si $y - f$ est solution de $y' = -0,04y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-0,04t}$, K réel.

Donc les solutions de (E) sont $y_k : t \mapsto 20 + Ke^{-0,04t}$.

$$\text{c) } g(0) = 100 \Leftrightarrow 20 + Ke^{-0,04 \times 0} = 100 \Leftrightarrow K = 80$$

$$\text{Donc } g(t) = 20 + 80e^{-0,04t}.$$

$$\text{2. a) } g(30) = 20 + 80e^{-0,04 \times 30} = 20 + 80e^{-1,2} \approx 44 > 37$$

Donc la grand-mère a mal évalué le temps nécessaire.

$$\text{b) } g(t) = 37 \Leftrightarrow 20 + 80e^{-0,04t} = 37$$

$$\Leftrightarrow t = 25 \ln \left(\frac{80}{17} \right) \approx 38,72$$

La température sera de 37° au bout d'environ 38 minutes et 43 secondes.

c)

```

t ← 0
Tant que 20 + 80e-0,04t > 30
  t ← t + 1
Fin tant que
Afficher t
    
```

102. Équation de la forme $y' = ay + \phi$, où ϕ est une fonction

1. $g'(x) = e^x + xe^x = g(x) + e^x$ donc g est bien solution de (E).

2. a) $f'(x) = f(x) + e^x$

$$f'(x) - g'(x) = f(x) + e^x - g'(x)$$

$$f'(x) - g'(x) = f(x) + e^x - (g(x) + e^x)$$

$$f'(x) - g'(x) = f(x) - g(x)$$

Donc f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de $Y' = Y$.

b) $f - g$ est donc de la forme Ke^x , K réel.

Donc f est de la forme $xe^x + Ke^x$, K réel.

3. $f(1) = 2 \Leftrightarrow e^1 + Ke^1 = 2$

$$\Leftrightarrow K = 2e^{-1} - 1$$

Donc la solution est $f : x \mapsto xe^x + (2e^{-1} - 1)e^x$.

103. Déterminer une primitive

1. $F'(-1) = f(-1) = [-(-1)^2 + (-1) + 2]e^{-1} = 0$

$$F'(2) = f(2) = [-2^2 + 2 + 2]e^2 = 0$$

2. a) $F'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx - 1)e^x$
 $= (ax^2 + (2a + b)x + b - 1)e^x$

b) $F'(-1) = 0$

$$\Leftrightarrow [a(-1)^2 + (2a + b)(-1) + b - 1]e^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow [-a - 1]e^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -1$$

$$F'(2) = 0$$

$$\Leftrightarrow [-1 \times 2^2 + (-2 + b) \times 2 + b - 1]e^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3b - 9)e^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow b = 3$$

Donc $F(x) = [-x^2 + 3x - 1]e^x$.

104. Un modèle de bénéfice

1. $g : t \mapsto 30$ est une solution particulière de l'équation.

f est solution de l'équation différentielle si et seulement si $f - g$ est solution de $y' = -\frac{1}{2}y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-\frac{1}{2}x}$, K réel.

Donc f est de la forme $30 - Ke^{-\frac{1}{2}x}$, K réel.

$$f(0) = -25 \Leftrightarrow 30 + Ke^{-\frac{1}{2} \times 0} = -25 \Leftrightarrow K = -55$$

$$\text{Donc } f(x) = 30 - 55e^{-\frac{1}{2}x}.$$

2. À l'aide de la calculatrice, on constate que la somme des carrés des écart est d'environ $0,08 < 0,5$. L'approximation par f semble donc satisfaisante.

3. a) $f(x) > 29,8 \Leftrightarrow 30 - 55e^{-\frac{1}{2}x} > 29,8$
 $\Leftrightarrow x > 2\ln(275) \approx 11,2$

Le bénéfice dépassera 29 800 euros au bout en 2011.

b) $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ pour tout réel x donc

$f(x) = 30 - 55e^{-\frac{1}{2}x} < 30$ pour tout réel x . Le bénéfice ne peut donc pas atteindre 30 000 euros.

105. QCM

1. a)

2. d)

106. Fonctionnement d'un stimulateur cardiaque

A. 1. a) $\frac{1}{RC} = \frac{1}{4 \times 10^{-7} \times 2 \times 10^6} = 1,25$

Donc u vérifie $u' + 1,25u = 0$.

b) $y' + 1,25y = 0 \Leftrightarrow y' = -1,25y$

Les solutions sont donc $y_K : t \mapsto Ke^{-1,25t}$, K réel.

c) u est solution de l'équation différentielle donc u est de la forme $Ke^{-1,25t}$, K réel.

$$u(0) = 5,6 \Leftrightarrow Ke^{-1,25 \times 0} = 5,6 \Leftrightarrow K = 5,6.$$

$$\text{Donc } u(t) = 5,6e^{-1,25t}.$$

2. a) $u'(t) = -7e^{-1,25t} < 0$ pour tout réel t .

Donc u est décroissante sur $[0; +\infty[$.

b) u représente la tension aux bornes du condensateur, celui se déchargeant avec le temps, ce résultat était prévisible.

B. 1. a) $(1 - 0,63) \times u(0) = 0,37 \times 5,6 = 2,072$

b) $5,6e^{-1,25t} = 2,072$

$$\Leftrightarrow e^{-1,25t} = 0,37$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\ln(0,37)}{1,25}$$

c) $-\frac{\ln(0,37)}{1,25} \approx 0,80$ donc le stimulateur envoie une impulsion électrique au cœur toutes les 0,8 seconde environ.

d) $\frac{60}{0,8} = 75$ le stimulateur simule donc un pouls de 75 pulsations par minutes, ce qui est compris entre 50 et 80. Ce rythme correspond donc bien à un adulte au repos et en bonne santé.

107. Satellites

A. 1. Les solutions sont $x \mapsto Ke^{0,025h}$, K réel.
2. La solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition $T(800) = 2\,000$ est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $T(h) = 2\,000e^{0,025h-20}$.

B. 1. Détermine la plus petite valeur K , à 0,5 près pour laquelle $T(500)$ dépasse 1 400 m.

2. Il affiche 18,5.

C. 1. Le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble est d'environ 5 432 jours.

$$\begin{aligned} \mathbf{2. a) } (h+10) &= 0,132e^{0,025(h+10-150)} \\ &= 0,132e^{0,025(h-150+0,25)} \\ &= 0,132e^{0,025(h-150)} \times e^{0,25} \end{aligned}$$

$$\mathbf{b) } e^{0,25} \approx 1,284 \approx \left(1 + \frac{28}{100}\right)$$

Ainsi, augmenter l'altitude h de 10 km revient à augmenter d'environ 28 % le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.

Préparer le BAC
Je me teste

p. 228

108. D

109. A

110. A

111. B

112. c

113. A

114. D

115. A

Préparer le BAC
Je révise

p. 229

116. Découvrir une primitive

1. $G'(x) = ae^{x-1} + (ax+b)e^{x-1} + 1 = (ax+a+b)e^{x-1} + 1$
 Par identification avec g , $a = 1$ et $b = -1$.

$$\mathbf{2. } 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} = h(x)$$

Une primitive de h est $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$.

117. Culture de microbes

1. Les solutions de l'équation sont de la forme Ce^{kt} , C réel.

$$y(0) = N \Leftrightarrow Ce^{k \times 0} = N \Leftrightarrow C = N$$

$$\text{Donc } y(t) = Ne^{kt}.$$

$$\mathbf{2. } y(2) = 4N \Leftrightarrow Ne^{2k} = 4N \Leftrightarrow k = \ln(2)$$

$$\text{Donc } y(t) = Ne^{\ln(2)t} = 2^t N.$$

$$y(3) = 2^3 N = 8N$$

Au bout de 3 heures, il y a 8 N microbes.

$$\mathbf{3. } y(5) = 6\,400 \Leftrightarrow 2^5 N = 6\,400 \Leftrightarrow N = 200$$

118. Étude d'une fonction

1. Les solutions de (1) sont les fonctions $y_k : x \mapsto e^{2x}$, K réel.

Les solutions de (2) sont les fonctions $y_k : x \mapsto Ke^x$, K réel.

2. a) Graphiquement, $f(0) = 1$.

Le coefficient directeur de T est $\frac{-2-1}{-1-0} = 3$ et son

ordonnée à l'origine est 1, donc T a pour équation $y = 3x + 1$.

$f'(0)$ est le coefficient directeur de T , soit $f'(0) = 3$.

b) $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ donc f est de la forme $Ae^{2x} - Be^x$, A et B réels.

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow Ae^{2 \times 0} - Be^0 = 1 \Leftrightarrow A = 1 + B$$

f' est de la forme $2Ae^{2x} - Be^x$.

$$f'(0) = 3 \Leftrightarrow 2Ae^{2 \times 0} - Be^0 = 3$$

$$\Leftrightarrow 2A - B = 3$$

$$\Leftrightarrow 2(1+B) - B = 3$$

$$\Leftrightarrow B = 1$$

Donc $A = 1 + B = 2$

Donc $f_1(x) = 2e^{2x}$ et $f_2(x) = e^x$.

Donc $f(x) = 2e^{2x} - e^x$.

$$\mathbf{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) = e^x(2e^x - 1) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\mathbf{d) } f(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\ln(2)$$

119. Primitive et aire sous une courbe

$$\begin{aligned}
 1. \text{ a) } 2(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) &= 2\left(1 \times e^{\frac{1}{2}x} + x \times \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\right) \\
 &= (x+2)e^{\frac{1}{2}x} = f(x)
 \end{aligned}$$

b) Une primitive de f est $F : x \mapsto 2u(x)v(x) = 2xe^{\frac{1}{2}x}$.

2. a) Pour $n = 3$, l'algorithme renvoie

$$s = \frac{1}{3}f(0) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{2}{3}\right), \text{ soit la somme des aires}$$

des trois rectangles colorés du graphique.

b) Lorsque n devient grand, la valeur de s_n proposée se rapproche de l'aire du domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

120. Problème ouvert (1)

Pour $x \leq 2$, on résout $y'(x) + y(x) = 1$.

$f : x \mapsto 1$ est une solution particulière de cette équation.

y est solution de cette équation si et seulement si $y - f$ est solution de $y' = -y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^{-x} , K réel.

Donc les solutions de $y'(x) + y(x) = 1$ sont :

$$y_K : x \mapsto 1 + Ke^{-x}, K \text{ réel.}$$

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow 1 + Ke^{-0} = 0 \Leftrightarrow K = -1$$

Donc la solution de $y'(x) + y(x) = 1$ est $f_1 : x \mapsto 1 - e^{-x}$.

Pour $x > 2$, on résout $y'(x) + y(x) = 0$.

$$y'(x) + y(x) = 0 \Leftrightarrow y'(x) = -y(x)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^{-x} , K réel.

Ainsi la solution de $y'(x) + y(x) = g(x)$ est

$$y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \leq 2 \\ Ke^{-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y doit être dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.

Ainsi on doit avoir $1 - e^{-2} = Ke^{-2} \Leftrightarrow K = e^2 - 1$

$$\text{Donc } y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \leq 2 \\ (e^2 - 1)e^{-x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

121. Problème ouvert (2)

$$y'(x) = 2C_1e^{2x} + C_2e^x = 2y(x) - C_2e^x$$

L'équation différentielle est $y'(x) = 2y(x) - C_2e^x$.

Exercices vers le supérieur p. 230-233

122. Deux modèles pour une même étude

A. Un modèle discret

1. a) `L.append(u)` ajoute la valeur de la variable u dans la liste L .

b) Il y aura 50 nombres dans la liste L .

$$2. \text{ a) } f'(x) = \frac{1}{10}(20 - x) - \frac{1}{10}x = 2 - \frac{1}{5}x$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{5}x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 10$$

Donc f est strictement croissante sur $[0 ; 10]$ puis strictement décroissante sur $[10 ; 20]$.

b) f est strictement croissante sur $[0 ; 10]$ donc :

• f admet un maximum en $x = 10$, soit

$$f(10) = \frac{1}{10} \times 10(20 - 10) = 10 ;$$

• f admet un maximum en $x = 0$, soit

$$f(0) = \frac{1}{10} \times 0(20 - 0) = 0.$$

Donc $f(x) \in [0 ; 10]$ pour tout $x \in [0 ; 10]$.

3. Montrons par récurrence la proposition

$$P_n : 0 \leq u_n \leq 10.$$

Initialisation : (pour $n = 0$) : $u_0 = 1 \in [0 ; 10]$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : si il existe un entier n tel que P_n est vraie, alors $0 \leq u_n \leq 10$ donc $0 \leq f(u_n) \leq 10$ d'après la question précédente.

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ donc } 0 \leq u_{n+1} \leq 10.$$

Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n .

4. La fonction f étant strictement croissante sur $[0 ; 10]$, nous pouvons montrer par récurrence que $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier n , donc que (u_n) est strictement croissante.

(u_n) est donc strictement croissante et majorée par 10, donc (u_n) est convergente vers un réel ℓ .

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ donc } \ell \text{ vérifie } f(\ell) = \ell.$$

$$f(\ell) = \ell = \frac{1}{10}\ell(20 - \ell) = \ell \Leftrightarrow \ell^2 - 10\ell = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell(\ell - 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 10$$

Or $u_0 = 1$ et (u_n) est strictement croissante donc $u_n \geq 1$ pour tout entier n .

Donc $\ell = 10$.

```
5. from math import *
N = int(input())
L = []
u = 1
L.append(u)
while u <= 5 :
    u = ((u*20-u))/10
    L.append(u)
print(L)
```

B. Un modèle continu

1. a) Si y est solution de (E) alors : $y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{y'}{y^2} = -\frac{\frac{1}{20}y(10 - y)}{y^2} \\ &= \frac{-10y + y^2}{20y^2} = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{20} \\ &= -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20} \end{aligned}$$

b) $g : x \mapsto \frac{1}{10}$ est une solution particulière de (E_1) .
 z est solution de (E_1) si et seulement si $z - g$ est solution de $z' = -\frac{1}{2}z$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-\frac{1}{2}x}$, K réel.

Donc les solutions de (E_1) sont : $z_K : x \mapsto \frac{1}{10} + Ke^{-\frac{1}{2}x}$, K réel.

Donc les solutions de (E) sont

$$y_K = \frac{1}{z_K} : x \mapsto \frac{1}{\frac{1}{10} + Ke^{-\frac{1}{2}x}} = \frac{10}{10Ke^{-\frac{1}{2}x} + 1}, K \text{ réel.}$$

2. g est solution de (E) donc g est de la forme

$$\frac{10}{10Ke^{-\frac{1}{2}x} + 1}, K \text{ réel.}$$

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{10Ke^{-\frac{1}{2} \cdot 0} + 1} = 1 \Leftrightarrow K = 0,9$$

$$\text{Donc } g(x) = \frac{10}{10 \times 0,9e^{-\frac{1}{2}x} + 1} = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$$

$$3. g'(x) = -\frac{10 \times \left(-\frac{9}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2} = \frac{45e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2} > 0$$

pour tout $x \in [0 ; +\infty[$.

Donc g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 10$ donc au fil du temps le nombre de foyer possédant un téléviseur se rapproche de 10 millions.

```
5. x ← 0
Tant que 10 / (9e^(-1/2 * x) + 1) ≤ 1
    x ← x + 1
Fin tant que
Afficher 2005 + x
```

123. Progression d'une épidémie

1. Si y est solution de (E) alors $y' = 0,05y(10 - y)$ et $y(0) = 0,01$

$$\begin{aligned} f' &= -\frac{y'}{y^2} = -\frac{0,05y(10 - y)}{y^2} \\ &= \frac{-0,5y + 0,05y^2}{y^2} = -\frac{0,05}{y} + 0,05 \\ &= -0,05f + 0,05 \end{aligned}$$

$$y(0) = 0,01 \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{y(0)} = \frac{1}{0,01} = 100$$

2. a) $g : x \mapsto 0,1$ est une solution particulière de $f' = -0,5f + 0,05$.

f est solution de cette équation si et seulement si $f - g$ est solution de $f' = -0,5f$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-0,5x}$, K réel.

Donc les solutions de $f' = -0,5f + 0,05$ sont

$$f_K : x \mapsto 0,1 + Ke^{-0,5x}, K \text{ réel.}$$

$$f(0) = 100 \Leftrightarrow 0,1 + Ke^{-0,5 \cdot 0} = 100 \Leftrightarrow K = 99,9$$

$$\text{Donc } f(x) = 0,1 + 99,9e^{-0,5x}.$$

Donc $y(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0,1 + 99,9e^{-0,5x}}$.

b) Cet algorithme sert à afficher l'entier x à partir duquel on a $y(x) \geq 5$.

3. a)
$$y(30) = \frac{1}{0,1 + 99,9e^{-0,5 \times 30}}$$
$$= \frac{1}{0,1 + 99,9e^{-15}} \approx 10.$$

Environ 10 % de la population sera infectée au bout de 30 jours.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 10$ donc, à terme, l'infection touchera 10 % de la population.

124. Équations de la forme $y' = ay + \varphi$

a) On cherche a et b tels que $g : x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x)$ soit une solution particulière de l'équation.

$$\begin{aligned} 2g'(x) - g(x) &= 2[-a \sin(x) + b \cos(x)] - a \cos(x) - b \sin(x) \\ &= (2b - a) \cos(x) - (2a + b) \sin(x) \end{aligned}$$

Par identification avec $\cos(x)$,

$$\begin{cases} 2b - a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = \frac{1}{2}y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{\frac{1}{2}x}$, K réel.

Donc les solutions de $2y' - y = \cos x$ sont

$$y_K : x \mapsto g(x) + Ke^{\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{5} \cos(x) + \frac{2}{5} \sin(x) + Ke^{\frac{1}{2}x},$$

K réel.

b) On cherche a et b tels que $g : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ soit une solution particulière de l'équation.

$$\begin{aligned} g'(x) - 2g(x) &= (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} - 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} \\ &= (2ax + b)e^{2x} \end{aligned}$$

Par identification avec xe^{2x} , $\begin{cases} 2ax = 1 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$.

Pour $c = 0$, $g : x \mapsto \frac{1}{2}x^2e^{2x}$ est solution particulière à l'équation.

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = 2y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^{2x} , K réel.

Donc les solutions de $y' - 2y = xe^{2x}$ sont

$$y_K : x \mapsto g(x) + Ke^{2x} = \left(\frac{1}{2}x^2 + K \right) e^{2x}, K \text{ réel.}$$

125. Sans aide

1. Une solution particulière est

$$x \mapsto \frac{-1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x.$$

Les solutions générales sont

$$x \mapsto \frac{-1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x + Ke^{\frac{1}{2}x}, K \text{ réel.}$$

2. Une solution particulière est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

Les solutions générales sont

$$x \mapsto \frac{1}{2}x^2e^{2x} + Ke^{2x}, K \text{ réel.}$$

126. En économie

1. $g : x \mapsto 0,05$ est une solution particulière de

$$P' = -0,4P + 0,02.$$

P est solution de cette équation si et seulement si $P - g$ est solution de $P' = -0,4P$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-0,4x}$, K réel.

Donc les solutions de $P' = -0,4P + 0,02$ sont

$$P_K : x \mapsto 0,05 + Ke^{-0,4x}, K \text{ réel.}$$

$$P(0) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 0,05 + Ke^{-0,4 \times 0} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow K = 0,75$$

$$\text{Donc } P(x) = 0,05 + 0,75e^{-0,4x}.$$

$$f(q) = \frac{1}{P(q)} = \frac{1}{0,05 + 0,75e^{-0,4q}} = \frac{20}{1 + 15e^{-0,4q}}$$

$$f(0) = \frac{20}{1 + 15e^{-0,4 \times 0}} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} 2. f'(q) &= -\frac{20 \times 15 \times (-0,4)e^{-0,4q}}{(1 + 15e^{-0,4q})^2} \\ &= \frac{120e^{-0,4q}}{(1 + 15e^{-0,4q})^2} > 0 \end{aligned}$$

pour tout $q \in [0; 14]$.

Donc f est strictement croissante sur $[0; 14]$.

2. a) La droite (OQ) passe par les points $O(0; 0)$ et $Q(q; f(q))$.

Son coefficient directeur est donc donné par

$$\frac{y_Q - y_O}{x_Q - x_O} = \frac{f(q) - 0}{q - 0} = \frac{f(q)}{q}.$$

b) Le minimum est réalisé quand la droite (OQ) à un coefficient directeur minimal, soit pour $q = 14$, ce qui correspond à un coût moyen de

$$\frac{f(14)}{14} = \frac{\frac{20}{1 + 15e^{-0,4 \times 14}}}{14} \approx 1,4.$$

127. Équation différentielle et changement de variable

1. $f'(t) = -\frac{1}{20}f(t)(3 - \ln f(t))$ si et seulement si

$$\begin{aligned} g'(t) &= (\ln f(t))'(t) = f'(t) \frac{1}{f(t)} \\ &= \left(-\frac{1}{20}f(t)(3 - \ln f(t)) \right) \frac{1}{f(t)} \\ &= -\frac{3}{20} + \frac{\ln f(t)}{20} \\ &= \frac{1}{20}g(t) - \frac{3}{20} \end{aligned}$$

2. $g : x \mapsto 3$ est une solution particulière de

$$z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}.$$

z est solution de cette équation si et seulement si

$$z - g \text{ est solution de } z' = \frac{1}{20}z.$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{\frac{1}{20}t}$, K réel.

Donc les solutions de $z' = \frac{1}{20}z - \frac{3}{20}$ sont

$$z_K : t \mapsto 3 + Ke^{\frac{1}{20}t}, K \text{ réel.}$$

3. g vérifie $g' = \frac{1}{20}g - \frac{3}{20}$ donc il existe un réel C tel

$$\text{que } g(t) = 3 + Ce^{\frac{1}{20}t}.$$

$g(t) = \ln(f(t))$ donc

$$f(x) = \exp(g(t)) = \exp\left(3 + C \exp\left(\frac{t}{20}\right)\right).$$

4. a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

b) $f'(t) = -\frac{3}{20}e^{\frac{t}{20}}e^{3-3e^{\frac{t}{20}}} < 0$ pour tout réel t .

Donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

c) $f(t) < 0,02 \Leftrightarrow \exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) < 0,02$

$$\Leftrightarrow 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln(0,02)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{20} > \ln\left(1 - \frac{\ln(0,02)}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow t > 20\ln\left(1 - \frac{\ln(0,02)}{3}\right)$$

128. Équation différentielle du second ordre

1. a) $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1 \quad (f'(x))^2 = 1 + (f(x))^2$

Donc $(f(x))^2 \geq 1$ pour tout réel x .

En particulier $(f'(x))^2 \neq 0$ donc $f'(x) \neq 0$ pour tout réel x .

b) $(f'(0))^2 - (f(0))^2 = 1$

$$\Leftrightarrow (f'(0))^2 = (f'(0))^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 0$$

2. La dérivée de $(f')^2$ est $2f'' \times f'$.

La dérivée de f^2 est $2f' \times f$.

Pour tout réel x , $(f'(x))^2 - (f(x))^2 = 1$.

Donc, en dérivant on obtient :

$$2f''(x)f'(x) - 2f'(x)f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x)(f''(x) - f(x)) = 0.$$

Or $2f'(x) \neq 0$ pour tout réel x donc on a $f''(x) - f(x) = 0$, soit $f''(x) = f(x)$ pour tout réel x .

3. a) $u(0) = f'(0) + f(0) = 1 + 0 = 1$

$v(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 0 = 1$

b) $f'' = f$ donc

$u' = (f' + f)' = f'' + f' = f + f' = u.$

$v' = (f' - f)' = f'' - f' = f - f' = -(f' - f) = -v$

c) Les solutions de l'équation $u' = u$ sont de la forme Ke^x , K réel.

$u(0) = 1 \Leftrightarrow Ke^0 = 1 \Leftrightarrow K = 1.$

Donc $u(x) = e^x$.

Les solutions de l'équation $v' = -v$ sont de la forme Ke^{-x} , K réel.

$v(0) = 1 \Leftrightarrow Ke^{-0} = 1 \Leftrightarrow K = 1.$

Donc $v(x) = e^{-x}$.

d) $u - v = (f' + f) - (f' - f) = 2f$

Donc $f(x) = \frac{u(x) - v(x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$

4. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$

b) $f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ pour tout réel x .

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

5. a) La fonction est continue, car dérivable, et strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$.

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty < m < +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ pour tout réel m .

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3$

$\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 6 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 1 = 6e^x$

$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 6e^x - 1 = 0$

On pose $X = e^x$ et on résout $X^2 - 6X - 1 = 0$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 40 > 0$

L'équation a donc deux solutions réelles :

$X_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{40}}{2 \times 1} = 3 - \sqrt{10}$ et

$X_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{40}}{2 \times 1} = 3 + \sqrt{10}.$

Donc $(e^x)^2 - 6e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^x = 3 - \sqrt{10}$ ou $e^x = 3 + \sqrt{10}$

$\Leftrightarrow x = \ln(3 + \sqrt{10})$

car $3 - \sqrt{10} < 0$.

Donc $x = \ln(3 + \sqrt{10}) \approx 1,82.$

129. QCM

1. c)

2. b)

130. Commande d'une substance radioactive

Soit N la fonction donnant le nombre d'unités en fonction du temps t (en jours).

La loi de désintégration donne $N'(t) = -\lambda N(t)$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-\lambda t}$, K réel.

La demi-vie de la particule est de 27,8 jours.

$$\begin{aligned} N(t + 27,8) &= \frac{N(t)}{2} \Leftrightarrow Ke^{-\lambda(t+27,8)} = \frac{K}{2}e^{-\lambda t} \\ &\Leftrightarrow e^{-\lambda t - 27,8\lambda} = \frac{1}{2}e^{-\lambda t} \\ &\Leftrightarrow -\lambda t - 27,8\lambda = -\ln(2) - \lambda t \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{27,8} \end{aligned}$$

Soit N_0 la quantité initiale, alors

$N(0) = N_0 \Leftrightarrow Ke^{-\lambda \times 0} = N_0 \Leftrightarrow K = N_0.$

Donc $N(t) = N_0 e^{-\frac{\ln(2)}{27,8}t}$

$N(2) > 35 \Leftrightarrow N_0 e^{-\frac{\ln(2)}{27,8} \times 2} = 35$

$\Leftrightarrow N_0 > 35e^{\frac{\ln(2)}{13,9}} \approx 36,8$

Il faut donc commander au moins 37 unités.

131. Équation logistique

$$\begin{aligned} P'(t) &= -\frac{N'(t)}{N(t)^2} = -\frac{0,07N(t)(1-10^{-3}N(t))}{N(t)^2} \\ &= -\frac{0,07N(t) - 0,07 \times 10^{-3}N(t)^2}{N(t)^2} \\ &= -0,07\frac{1}{N(t)} + 7 \times 10^{-5} \\ &= -0,07P(t) + 7 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Donc P est solution de l'équation

$$y' = -0,07y + 7 \times 10^{-5}.$$

$g : x \mapsto 10^{-3}$ est une solution particulière de cette équation.

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = -0,07y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-0,07t}$, K réel.

Donc les solutions de $y' = -0,07y + 7 \times 10^{-5}$ sont

$$y_K : t \mapsto 10^{-3} + Ke^{-0,07t}, K \text{ réel.}$$

Donc P est de la forme $10^{-3} + Ke^{-0,07t}$, K réel.

$$\text{De plus } P(0) = \frac{1}{N(0)} = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

$$P(0) = 10^{-2} \Leftrightarrow 10^{-3} + Ke^{-0,07 \times 0} = 10^{-2} \Leftrightarrow K = 0,009$$

$$\text{donc } P(t) = 10^{-3} + 0,009e^{-0,07t}.$$

132. Réaction chimique

$$\text{Donc } N(t) = \frac{1}{P(t)} = \frac{1}{10^{-3} + 0,009e^{-0,07t}}$$

pour $n = 0$, $C'(t) = -k$, solution : $x \mapsto -kt + C_0$

pour $n = 1$, $C'(t) = -kC(t)$, solution : $x \mapsto C_0e^{-kt}$

pour $n = 2$, $C'(t) = -kC^2(t)$

$$\Leftrightarrow -\frac{C'(t)}{C^2(t)} = k \Leftrightarrow \left(\frac{1}{C}\right)' = k \Leftrightarrow C(t) = \frac{1}{kt + K},$$

$$K \text{ réel. Solution : } x \mapsto \frac{1}{kt + C_0}.$$

133. Croissance d'une population

$$1. \text{ On pose } y = \frac{1}{p}.$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{p'}{p^2} = -\frac{kp(M-p)}{p^2} = -\frac{kM}{p} + k \\ &= -kMy + k \end{aligned}$$

$g : x \mapsto \frac{1}{M}$ est une solution particulière de l'équation $y' = -kMy + k$.

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = -kMy$.

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$Ke^{-kMt}, K \text{ réel.}$$

Donc les solutions de $y' = -kMy + k$ sont

$$y_K : t \mapsto \frac{1}{M} + Ke^{-kMt}, K \text{ réel.}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= \frac{1}{p(0)} = \frac{1}{p_0} \Leftrightarrow \frac{1}{M} + Ke^{-kM \times 0} = \frac{1}{p_0} \\ \Leftrightarrow K &= \frac{1}{p_0} - \frac{1}{M} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } y(t) = \frac{1}{M} + \frac{1}{p_0} - \frac{1}{M} e^{-kMt}.$$

$M = 10\,000$, $k = 0,0001$ et $p_0 = 1\,000$ donc

$$y(t) = 10^{-4} + 9 \times 10^{-4} e^{-t}$$

$$\text{donc } p(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{10^{-4} + 9 \times 10^{-4} e^{-t}}.$$

$$2. p(2) = \frac{1}{10^{-4} + 9 \times 10^{-4} e^{-2}} \approx 4\,509$$

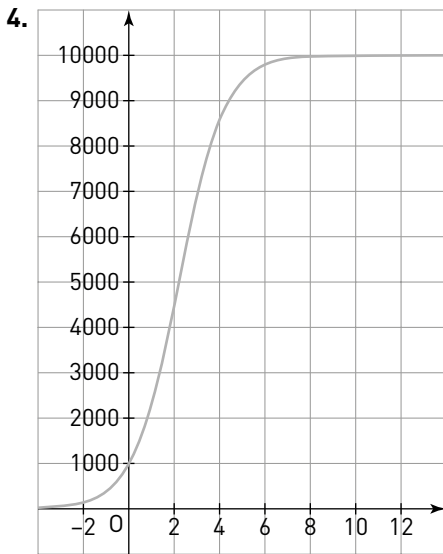
Au bout de deux ans, la population sera de 4 509 individus.

$$p(5) = \frac{1}{10^{-4} + 9 \times 10^{-4} e^{-5}} \approx 9\,428$$

Au bout de deux ans, la population sera de 9 428 individus.

$$\begin{aligned} 3. p(t) &\geq 9999,5 \Leftrightarrow \frac{1}{10^{-4} + 9 \times 10^{-4} e^{-t}} \geq 9999,5 \\ \Leftrightarrow e^{-t} &\leq \frac{10^{-5}}{1,79991} \\ \Leftrightarrow t &\geq -\ln\left(\frac{10^{-5}}{1,79991}\right) \approx 12,1 \end{aligned}$$

On atteint la taille limite au bout de 13 années.



134. Vrai ou Faux ? (1)

- | | | |
|------------|---------|---------|
| 1. a) Vrai | b) Vrai | c) Faux |
| 2. a) Faux | b) Faux | |
| c) Faux | d) Faux | |
| 3. a) Vrai | b) Faux | c) Vrai |

135. Vrai ou Faux ? (2)

1. Faux
2. Faux
3. Vrai
4. Vrai

136. Croissance d'une population de rongeurs

1. a) Les solutions sont les fonctions $y_K : t \mapsto Ke^{\frac{1}{4}t}$, K réel.

b) $g(0) = 1 \Leftrightarrow Ke^{\frac{1}{4} \times 0} = 1 \Leftrightarrow K = 1$

donc $g(t) = e^{\frac{1}{4}t}$.

c) $g(t) \geq 3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{4}t} \geq 3 \Leftrightarrow t \geq 4 \ln(3) \approx 4,4$

Au bout de 5 ans, la population dépassera 300 individus.

2. a) $u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12}$ si et seulement si

$$h'(t) = -\frac{u'(t)}{[u(t)]^2} = -\frac{\frac{u(t)}{4} - \frac{[u(t)]^2}{12}}{[u(t)]^2}$$

$$= -\frac{1}{4u(t)} + \frac{1}{12} = -\frac{h(t)}{4} + \frac{1}{12}$$

de plus $h(0) = \frac{1}{u(0)} = \frac{1}{1} = 1$.

b) $g : x \mapsto \frac{1}{3}$ est une solution particulière de

l'équation $y' = -\frac{y}{4} + \frac{1}{12}$.

y est solution de l'équation si et seulement si

$y - g$ est solution de $y' = -\frac{1}{4}y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-\frac{1}{4}t}$, K réel.

Donc les solutions de $y' = -\frac{y}{4} + \frac{1}{12}$ sont

$y_K : t \mapsto \frac{1}{3} + Ke^{-\frac{1}{4}t}$, K réel.

h vérifie cette équation donc h est de la forme

$\frac{1}{3} + Ke^{-\frac{1}{4}t}$, K réel.

$h(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} + Ke^{-\frac{1}{4} \times 0} = 1 \Leftrightarrow K = \frac{2}{3}$

donc $h(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t}$

donc $u(t) = \frac{1}{h(t)} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{4}t}} = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{1}{4}t}}$.

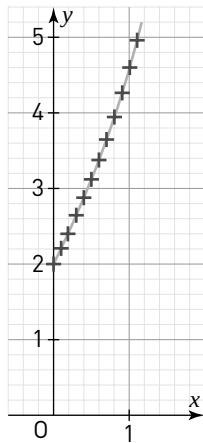
c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 3$ donc la population se rapproche de 300 quand t tend vers $+\infty$.

137. Approche d'une solution par la méthode d'Euler

À partir de la méthode d'Euler, nous obtenons la suite de points $A_n(x_n ; y_n)$ où $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,1x_n \\ y_{n+1} = y_n + 0,1(y_n - x_n) \end{cases} \text{ pour tout entier } n.$$

On obtient la courbe suivante.



On résout $y' = y - x$.

$g : x \mapsto x + 1$ est une solution particulière de cette équation.

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^x , K réel.

Donc les solutions de $y' = y - x$ sont

$$y_K : x \mapsto x + 1 + Ke^x, K \text{ réel.}$$

$$y[0] = 2 \Leftrightarrow 0 + 1 + Ke^0 = 2 \Leftrightarrow K = 1$$

Donc la solution est $y[x] = x + 1 + e^x$.

En traçant cette courbe sur le graphique précédent, on peut constater que l'écart est faible entre les deux courbes.

138. Démontrer l'unicité d'une solution

Si $xy'(x) + y(x) = 0$ alors, en dérivant chaque membre, $y(x) + xy'(x) + y''(x) = 0$

donc $xy''(x) = 0$ donc $y'(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$.

Donc, y' étant continue sur $\mathbb{R}$ on a nécessairement y' fonction constante sur $\mathbb{R}$, soit $y : x \mapsto k$ où k réel.

$$\text{Or } xy'(x) + y(x) = 0 \Leftrightarrow x \times 0 + y(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x) = 0.$$

L'équation admet donc une unique solution, la fonction constante 0.

139. Résoudre par disjonction de cas

1. Si $y[x] \geq x$ alors $|y[x] - x| = y[x] - x$.

On résout $y'(x) = y(x) - x$.

$g : x \mapsto x + 1$ est une solution particulière de l'équation.

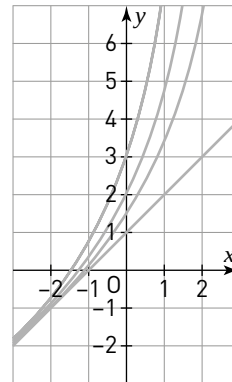
y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^x , K réel.

Donc les solutions de $y'(x) = y(x) - x$ sont

$$y_K : x \mapsto x + 1 + Ke^x, K \text{ réel.}$$

$y_K(x) \geq x \Leftrightarrow x + 1 + Ke^x \geq x \Leftrightarrow Ke^x \geq -1$ cette inégalité étant valable pour tout x pour $K \geq 0$. Les solutions de l'équation vérifiant la condition initiale sont donc : $y_K : x \mapsto x + 1 + Ke^x, K \geq 0$.



2. Si $y[x] \leq x$ alors $|y[x] - x| = -y[x] + x$.

On résout $y'(x) = -y(x) + x$.

$g : x \mapsto x - 1$ est une solution particulière de l'équation.

y est solution de l'équation si et seulement si $y - g$ est solution de $y' = -y$.

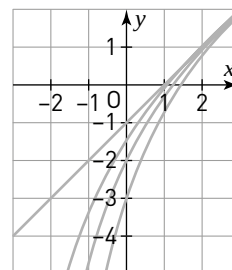
Les solutions de cette équation sont de la forme Ke^{-x} , K réel.

Donc les solutions de $y'(x) = -y(x) + x$ sont

$$y_K : x \mapsto x - 1 + Ke^{-x}, K \text{ réel.}$$

$y_K(x) \leq x \Leftrightarrow x - 1 + Ke^{-x} \leq x \Leftrightarrow Ke^{-x} \leq 1$ cette inégalité étant valable pour tout x pour $K \leq 0$. Les solutions de l'équation vérifiant la condition initiale sont donc :

$$y_K : x \mapsto x - 1 + Ke^{-x}, K \leq 0.$$



140. Équations et conditions

1. a) $h'(x) = (f'(x) - 3f(x))e^{-3x}$

b) f est solution de (E) donc

$$f'(x) - 3f(x) = \frac{3}{1 + e^{-3x}}$$

$$\text{ainsi } h'(x) = \frac{3}{1 + e^{-3x}} e^{-3x}.$$

2. Dans $h'(x)$ on reconnaît la forme $\frac{-u'}{u}$ avec u positive ainsi

$$h(x) = -\ln(1 + e^{-3x}) + k, k \text{ réel.}$$

$$3. f(x) = h(x) e^{3x} = (-\ln(1 + e^{-3x}) + k)e^{3x}, k \text{ réel.}$$

$$4) f(0) = (-\ln(1 + 1) + k) = 0$$

$$\text{Donc } k = \ln 2.$$

$$\text{La solution est } x \mapsto (-\ln(1 + e^{-3x}) + \ln 2)e^{3x}.$$

141. Chute d'une goutte d'eau

1. a) $g : x \mapsto 9,81q$

$$b) g' = \frac{-1}{q}g + 9,81$$

$$f \text{ est solution} \Leftrightarrow f' = \frac{-1}{q}f + 9,81$$

$$\Leftrightarrow f' - g' = \frac{-1}{q}(f - g)$$

$$\Leftrightarrow (f - g)' = \frac{-1}{q}(f - g)$$

$$\Leftrightarrow f - g \text{ est solution de } y' = -\frac{1}{q}y.$$

$$\text{On en déduit } v(t) = 9,81q \left(1 - e^{-\frac{1}{q}t}\right) \text{ puisque } v(0) = 0.$$

2. a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{q}t} = 0$ par composition donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 9,81q \text{ par opérations.}$$

b) Vérifier que $v(5q) > 0,99 \times 9,81q$.

$$v(5q) = 9,81q(1 - e^{-5}) \approx 0,9932 \times 9,81q$$

L'affirmation est donc correcte.

Travaux pratiques

TP 1. Méthode d'Euler

pour approcher la courbe d'une solution d'équation différentielle

• **Durée estimée :** 55 min

• **Objectif :** Utiliser l'équation différentielle pour un calcul répératif, après avoir été présentée, mettre en œuvre la méthode avec l'outil Python.

A. Courbe d'Euler et solution de l'équation différentielle $y' = 3y + 5$ avec $y(0) = 1$

2. a)

```
saisir les variables x, y, h, n
Pour i allant de 1 à n :
    x <- x + h
    Y <- y(1 + 3h) + 5h
Fin Pour
```

b) Avec Python et l'affichage des points A_i .

```
from math import *
from pylab import *
def methode_euler(x, y, h, n):
    X_liste=[x]
    Y_liste=[y]
    xlim(0, 5)
    ylim(0, 100)
    for i in range(n):
        x = x + h
        y = y*(3*h+1)+5*h
        X_liste.append(x)
        Y_liste.append(y)
    return (X_liste, Y_liste)
X, Y = methode_euler(0, 1, 0.1, 100)
plot(X, Y, "r+")
show()
```

B. Pour aller plus loin

```
from math import *
from pylab import *
def methode_euler(x, y, h, n):
    X_liste=[x]
    Y_liste=[y]
    xlim(-3, 3)
    ylim(0, 20)
    for i in range(n):
        y = y*(2*h+1) + x*cos(x*pi/180)*h
        x = x + h
        X_liste.append(x)
        Y_liste.append(y)
    return (X_liste, Y_liste)
plot(methode_euler(pi, 0, 0.1, 100), "r+")
show()
```

TP 2. Étude d'un exemple de dynamique de population

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Appliquer les équations différentielles avec un modèle économique historique, sur un problème économique concret.

A. Présentation

1. En remplaçant N respectivement par 0 puis par K on obtient $N' = 0$.

Si $0 < N < K$ alors $0 < \frac{N}{K} < 1$ ainsi l'équation logistique donne $N'(t) > 0$ et sinon $N'(t) < 0$.

2. Si $0 < N < K$ alors $N'(t) > 0$ donc la fonction N est croissante. Décroissante sinon.

B. Exemple : un problème économique, le nombre de franchises

$$1. N'(t) = 0,4N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{1000}\right)$$

avec $N(0) = 100$.

$$2. N'(t) = 0,4N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{1000}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{N'(t)}{(N(t))^{22}} = \frac{0,4}{N(t)} \left(1 - \frac{N(t)}{1000}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-N'(t)}{(N(t))^2} = -0,4 \left(\frac{1}{N(t)} - \frac{1}{1000}\right)$$

$$\Leftrightarrow P'(t) = -0,4P(t) + 0,4 \cdot 10^{-3}$$

$$P(t) = ke^{-0,4t} + 10^{-3} \text{ ainsi}$$

$$N(t) = \frac{1}{ke^{-0,4t} + 10^{-3}}.$$

$$\text{De plus } N(0) = 100 = \frac{1}{k + 10^{-3}}$$

$$\Leftrightarrow k = 10^{-2} - 10^{-3} = 0,009$$

$$\text{et } N(t) = \frac{1}{0,009e^{-0,4t} + 10^{-3}} = \frac{1000}{1 + 9e^{-0,4t}}.$$

$$3. N(t) \geq 500 \Leftrightarrow 9e^{-0,4t} + 1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -0,4t \leq \ln\left(\frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{9}\right)}{-0,4}$$

$$\Leftrightarrow t \geq 5,493$$

Si t est exprimée en mois, il faudra attendre environ 5 mois et demi pour atteindre les 500 franchises.

TP 3. La radioactivité et les équations différentielles

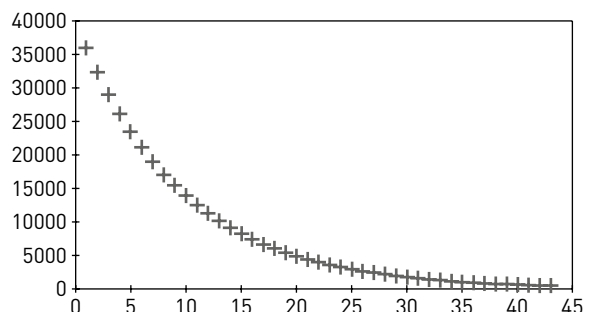
- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Simuler une situation, puis appliquer le modèle mathématique pour analyser le problème et appliquer sur un modèle concret : la datation au carbone 14.

A. Simulation de l'évolution du nombre de noyaux restants

```
from random import *
from pylab import *
def compte_noyaux_restants(n,p):
    N=n
    for i in range(n):
        if random() <= p:
            N=N-1
    return N
def Liste_nb_noyaux_restants(n,p):
    L=[]
    M=n
    while M>0.01*n:
        L.append(M)
        M=compte_noyaux_restants(M,p)
    return L
n=40000
L=Liste_nb_noyaux_restants(n,0.1)
print(L)
m=len(L)
plot(range(m),L,"r+")
show()
```

3. a) La commande `plot(range(m),L,"r+")` renvoie les points de coordonnées $(i; L[i])$ pour i allant de 0 à $m-1$.

b) La courbe obtenue avec $n = 40\,000$ et $p = 1/10$ représente une fonction de la forme $x \mapsto ne^{ax}$ avec a négatif.



B. Étude mathématique

On étudie la fonction $t \mapsto N_0 e^{-\lambda t}$.

1. La dérivée est $t \mapsto -\lambda N_0 e^{-\lambda t}$ strictement négative car λ , N_0 et $e^{-\lambda t}$ sont strictement positifs. La fonction est donc strictement décroissante, sa courbe a pour allure celle de la courbe vue en partie A.

2. a) Équation de la tangente

$T_0 : y = -\lambda N_0 t + N_0$, elle coupe (Ox) en t tel que

$$0 = -\lambda N_0 t + N_0, \text{ soit } t = \frac{1}{\lambda}.$$

b) Est ce que $N(5\tau) \leq (1 - 0,99)N_0$?

On a $N(5\tau) = N_0 e^{-\lambda \times \frac{5}{\lambda}} = N_0 e^{-5} \leq 0,001 N_0$. Affirmation vraie.

$$3. N_0 e^{-\lambda \left(t + \frac{t_1}{2} \right)} = \frac{1}{2} N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow N_0 e^{-\lambda \left(t + \frac{t_1}{2} \right)} = e^{\ln \left(\frac{1}{2} \right)} N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow N_0 e^{-\lambda \left(t + \frac{t_1}{2} \right)} = N_0 e^{-\lambda t - \ln 2}$$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{1}{\lambda} \times 0,693 \text{ s}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \times \frac{\ln 2}{3\,600} \quad h = \frac{1}{\lambda} \times \frac{\ln 2}{24 \times 3600} \text{ j. On a } 5\tau = t_1.$$

C. La méthode de datation du carbone 14

$$1. \text{ On a } t_1 = \frac{\ln 2}{\lambda} = 5570 \text{ ans}$$

$$\text{d'où } \lambda = \frac{\ln 2}{5\,570} \text{ année}^{-1}.$$

$$2. N_0 e^{-\lambda t} = 0,7 N_0 \text{ soit :}$$

$$t = -\frac{\ln 0,7}{\lambda} = -\frac{(\ln 0,7) \times 5\,570}{\ln 2} \approx 2866 \text{ ans.}$$

$$3. 13,5 e^{-\frac{\ln 2}{5570} \times t} = 4,8$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln \left(\frac{4,8}{13,5} \right)}{-\frac{\ln 2}{5570}} \approx 8\,310 \text{ années.}$$

$$4. e^{-35000} \times \frac{\ln 2}{5\,570} \approx 0,0128 \text{ de l'ordre de } 1 \% \text{ donc}$$

la teneur n'est plus détectable.

CHAPITRE 8 Calcul intégral

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre termine la partie Analyse du programme. Il donne les outils du calcul infinitésimal pour les études supérieures en définissant l'intégrale d'une fonction continue en centrant l'étude sur l'interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction positive puis négative pour terminer par le calcul de l'aire entre deux courbes.

L'accent dans ce chapitre est mis sur le sens de l'intégrale sans étude des propriétés abstraites.

Ainsi, le chapitre présente la définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive comme étant la généralisation d'un calcul d'aire. L'existence de primitive permet de généraliser cette définition à toute fonction continue.

La valeur moyenne est introduite comme généralisation de la moyenne d'une série statistique et permet d'accéder rapidement à l'interprétation graphique dans le cas des fonctions continues positives.

Objectifs

- Estimer une intégrale par calcul d'aire
- Calcul d'intégrale en utilisant les primitives
- Déterminer la valeur moyenne d'une fonction
- Calculer une aire sous la courbe d'une fonction
- Calculer une aire entre deux courbes

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 139

1. Calculer des aires

a) $11 < \mathcal{A}_A < 25$ et $16 < \mathcal{A}_B < 25$.

b) Rectangle ABCD : $AB \times AD$

Triangle EFG : $0,5(EF \times \text{hauteur})$

Demi-cercle HI : $0,25 \times \pi \times HI$

Trapeze JKML : $0,5(LM + JK) \times \text{hauteur}$

2. Déterminer graphiquement le signe d'une fonction

a) $f > 0$ sur $[-2 ; 2]$ et $f < 0$ sur $]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$.

b) $g > 0$ sur $]-3 ; -2[\cup]0 ; 3,5[$ et $g < 0$ sur $]-2 ; 0[\cup]3,5 ; 4[$.

c) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-2 ; 1,25[$ et en dessous sur $]-3 ; -2[\cup]1,25 ; 4[$.

3. Déterminer le signe d'une fonction

1. $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ donc g est positive sur $[1 ; +\infty[$ et négative sinon.

$x^2 + 2x - 3 = 0$ admet une solution évidente : 1. On en déduit la deuxième : -3. Donc f est positive sur $]-\infty ; -3] \cup [1 ; +\infty[$ et négative sur $]-3 ; 1[$.

2. On étudie le signe de

$$f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 3 - x + 1 = x^2 + x - 2.$$

1 est une racine évidente. On en déduit la deuxième : -2. $f(x) - g(x)$ est positif pour $x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$ et au-dessus sinon.

4. Justifier qu'une fonction est continue

a) $\mathbb{R}$

b) $]-\infty ; 0,5[\cup]0,5 ; +\infty[$

c) $]-\infty ; 1,5[$

5. Déterminer une primitive

a) $F(x) = x^5 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$

b) $G(x) = \frac{1}{-2(3+x^2)^2}$

c) $K(x) = -\sqrt{3-2x}$

d) $H(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1}$

e) $J(x) = \ln(x)$

f) $K(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2+1)$

Activités

p. 240

1 Évaluer l'intégrale d'une fonction continue et positive

• **Durée estimée** : 55 min

• **Objectif** : Il s'agit d'introduire la définition de l'intégrale d'une fonction continue positive.

La première partie consiste à déterminer l'aire sous la courbe de fonctions en utilisant des formules.

La deuxième partie consiste à présenter une méthode, celle des rectangles pour approcher l'aire sous la courbe d'une fonction décroissante qui ne se détermine pas par une formule évidente. En utilisant un programme Python, l'élève peut confirmer son intuition : l'aire sous la courbe est encadrée par deux suites qui ont la même limite : l'aire. La notation intégrale est indiquée à la fin de cette partie.

La troisième partie de l'activité est facultative et permet d'explicitier ces suites sur un exemple de fonction continue positive croissante.

A. Aire sous la courbe d'une fonction

a) $\mathcal{A} = \frac{AC \times CB}{2} = 8$

b) $\mathcal{A} = \frac{(1+3) \times 4}{2} = 8$

c) $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi$

B. Approximation de l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles

[ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur sur la définition de la fonction f . Il faut utiliser :

$$f(x) = e^{x \ln\left(\frac{9}{24}\right) + \ln(10)}.$$

1. On divise l'intervalle en 4 intervalles de même amplitude. On construit 4 rectangles hachurés de longueurs $f(6)$; $f(12)$; $f(18)$; $f(24)$. On construit 4 rectangles colorés $f(0)$; $f(6)$; $f(12)$; $f(18)$.

$$2. U_2 = 12(f(12) + f(24))$$

$$U_3 = 8(f(8) + f(16) + f(24))$$

$$V_2 = 12(f(0) + f(12))$$

$$V_3 = 8(f(0) + f(8) + f(16))$$

3. $\{U_n\}$ est l'aire des rectangles hachurés, elle est contenue dans l'aire sous la courbe. Plus l'intervalle devient petit, plus l'aire hachurée croît et se rapproche de l'aire sous la courbe : $\{U_n\}$ semble être une suite croissante convergente.

$\{V_n\}$ est l'aire des rectangles colorés et contient l'aire sous la courbe. Plus l'intervalle devient petit, plus l'aire colorée décroît et se rapproche de l'aire sous la courbe : $\{V_n\}$ est une suite décroissante convergente.

4. Il s'agit de déterminer $\{U_n\}$ et $\{V_n\}$ en fonction de n .

$$U_n = \frac{24}{n} \left(f\left(0 + \frac{24}{n} \times 1\right) + f\left(0 + \frac{24}{n} \times 2\right) + \dots + f\left(0 + \frac{24}{n} \times n\right) \right)$$

$$V_n = \frac{24}{n} \left(f\left(0 + \frac{24}{n} \times 0\right) + f\left(0 + \frac{24}{n} \times 1\right) + \dots + f\left(0 + \frac{24}{n} \times (n-1)\right) \right)$$

Le programme suivant permet de déterminer la valeur de U_n et celle de V_n .

```
def U(f, n):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S = S + f(k*24/n)
    return S*24/n
```

```
def V(f, n):
    S = 0
    for k in range(0, n):
        S = S + f(k*24/n)
    return S*24/n
```

On remarque en prenant une valeur de n assez grande que les deux suites convergent vers la même valeur.

C. Déterminer $\int_0^1 x^2 dx$ par la méthode des rectangles

des rectangles

1. Il pourrait être intéressant de modifier le programme pour qu'il s'adapte à toutes les fonctions.

2. a) $U_1 = 1 \times f(0) = 0$

$$U_2 = \frac{1}{2} \left(f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{1}{8}$$

$$U_3 = \frac{1}{3} \left(f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) \right) = \frac{5}{18}$$

$$V_1 = 1 \times f(1) = \frac{1}{2}$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \right) = \frac{5}{8}$$

$$V_3 = \frac{1}{3} \left(f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1) \right) = \frac{14}{27}$$

b) [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur sur l'expression de U_n . L'erreur est corrigée dans les éditions suivantes,

il faut utiliser $U_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$.

$$U_n = \frac{1}{n} \left(f\left(0 + \frac{0}{n}\right) + f\left(0 + \frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(0 + \frac{n-1}{n}\right) \right)$$

$$U_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^2} \right)$$

$$U_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

c) [ERRATUM] La première édition du manuel contient une erreur sur l'expression de V_n . L'erreur est corrigée dans les éditions suivantes, il faut utiliser

$$V_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

$$V_n = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1) \right)$$

$$V_n = \frac{1}{n} \times \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^2}$$

$$V_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

3. $\int_0^1 x^2 dx$ est l'aire sous la courbe de la fonction

carré entre 0 et 1. $\{U_n\}$ est contenue dans cette aire, $\{V_n\}$ contient cette aire.

On en déduit $U_n \leq \int_0^1 x^2 dx \leq V_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

2 Relier les notions d'intégrale et de primitive

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Il s'agit de calculer l'intégrale d'une fonction continue positive de manière différente : par le calcul d'aire et par l'image d'une fonction qui s'avère être celle de la primitive de la fonction intégrée.

La première partie permet de conjecturer la propriété sur un exemple.

La deuxième partie démontre la propriété sur un exemple.

La démonstration dans le cas général est traitée dans la rubrique « apprendre à démontrer » p. 252.

A. Intégrale d'une fonction affine

[ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur sur la définition de la fonction f .

Il faut utiliser $f(t) = \frac{1}{2}t + 2$.

N est le point d'abscisse $f(x)$.

1. [ERRATUM] La première édition du manuel présente une erreur, corrigée sur les éditions suivantes :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x.$$

$$\mathcal{A}(x) = \frac{\left(2 + \left(\frac{1}{2}x + 2 \right) \right) \times x}{2} = \frac{1}{4}x^2 + 2x$$

2. L'aire du trapèze est aussi l'aire sous la courbe

de la fonction f entre 0 et x donc $\mathcal{A}(x) = \int_0^x f(t) dt$.

$$3. \mathcal{A}'(x) = \frac{1}{4} \times 2 \times x^2 + 2 = f(x).$$

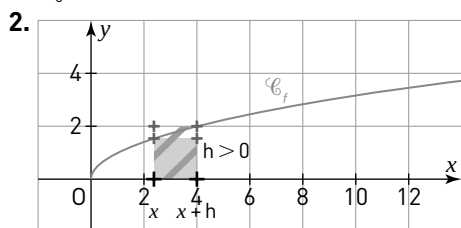
On en déduit que

$$\mathcal{A}(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ est une primitive de } f.$$

B. Intégrale de la fonction racine carrée

1. L'aire sous la courbe racine carrée entre 0 et x

est $\int_0^x \sqrt{t} dt$.



L'aire sous la courbe racine carrée entre x et $x+h$ est égale à $\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)$.

Elle est comprise entre l'aire égale à $h \times \sqrt{x}$ et l'aire égale à $h \times \sqrt{x+h}$ d'où :

$$h \times \sqrt{x} \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq h \times \sqrt{x+h}$$

et donc on a bien l'inégalité demandée.

$$3. -h\sqrt{x+h} \leq \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h) \leq -h\sqrt{x}$$

$$\text{donc } h\sqrt{x} \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq h\sqrt{x+h}.$$

$$\text{Ainsi : } \mathcal{A}(x+h) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq \mathcal{A}(x).$$

$$4. \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = \sqrt{x}.$$

La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\mathcal{A}'(x) = \sqrt{x}$.

On en déduit que $\mathcal{A}(x) = \int_0^x \sqrt{t} dt$ est une primitive de la fonction carrée.

3 Introduire l'intégration par parties

• **Durée estimée :** 15 min

• **Objectif :** Il s'agit de présenter la formule de l'intégration par parties sur un exemple puis de la démontrer.

1. La forme de f est un produit de deux fonctions qui ne correspond à aucune formule connue.

2. Une primitive de la fonction e^{-x} est $-e^{-x}$.

Une primitive de f est : $F(x) = -e^{-x} - f(x)$.

3. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur, il faut chercher à montrer

$$\text{que } \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b vu'.$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\text{On en déduit } \int_a^b uv' = \int_a^b (uv)' - \int_a^b vu'$$

$$\text{Donc } \int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b vu'.$$

4 Valeur moyenne d'une fonction

• **Durée estimée :** 15 min

• **Objectif :** Il s'agit de définir la valeur moyenne d'une fonction et son interprétation pour ensuite résoudre des problèmes. Ainsi, deux interprétations sont proposées : la première est la généralisation de la moyenne d'une série statistique, la deuxième comme étant la longueur d'un rectangle d'aire la surface sous la courbe.

1. a) La valeur moyenne est 32.

b) 32 est la quantité d'eau qui serait tombée par jour s'il avait plu la même quantité d'eau chaque jour.

C'est aussi la largeur d'un rectangle de côté 5 et d'aire la somme des 5 rectangles constituées par la série.

$$2. a) \mathcal{A} = \int_0^5 (1,5 + \cos(x)) dx$$

b) On cherche le nombre tel que $\mathcal{A} = 5 \times ?$.

$$\text{On a donc : } ? = \frac{1}{5} \int_0^5 (1,5 + \cos(x)) dx.$$

À vous de jouer

p. 243

1. On trace la courbe représentative de f définie par $f(x) = 2x$. L'intégrale est l'aire d'un trapèze de hauteur 3 et de bases 4 et 10.

$$\int_2^5 2x dx = \frac{(4 + 10) \times 3}{2} = 21 \text{ u.a.}$$

$$2. \int_{-4}^{-1} (-2u - 1) du = 12$$

$$3. \mathcal{A}_i = \frac{5}{10} \left(\ln(1) + \ln\left(1 + \frac{5}{10}\right) + \ln\left(1 + 2 \times \frac{5}{10}\right) + \dots + \ln\left(1 + 9 \times \frac{5}{10}\right) \right)$$

$$\mathcal{A}_i = \frac{5}{10} (\ln(1 \times 1,5 \times 2 \times 2,5 \times \dots \times 5,5)) \approx 5,28 \text{ u.a.}$$

$$\mathcal{A}_s = \frac{5}{10} \left(\ln\left(1 + \frac{5}{10}\right) + \ln\left(1 + 2 \times \frac{5}{10}\right) + \dots + \ln\left(1 + 9 \times \frac{5}{10}\right) + \ln(6) \right)$$

$$\mathcal{A}_s = \frac{5}{10} (\ln(1,5 \times 2 \times 2,5 \times \dots \times 5,5 \times 6)) \approx 6,18 \text{ u.a.}$$

4. On choisit une série de rectangles (inférieurs ou supérieurs) et on calcule leur aire $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} = 0,4 \times \sum_{i=0}^9 \{-2 + i \times 0,4\}^2$$

$$\mathcal{A} = 5,44 \text{ u.a.}$$

$$5. a) \int_{-1}^4 (x-1)^2 dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_{-1}^4 = \frac{27}{3} - \left(\frac{-8}{3} \right) = \frac{35}{3}$$

$$b) \int_2^3 \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} dx = [\ln(x^3 - x)]_2^3 = \ln(24) - \ln(6) = \ln(4)$$

6. a) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur, les bornes de l'intégrale ont

été modifiées, il faut lire : $\int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^2} dx$.

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^2} dx = -\frac{1}{3}$$

$$b) \int_0^1 2xe^{x^2} dx = e - 1$$

$$c) \int_1^2 xe^{-x^2} dx = \frac{-e^{-4} + e^{-1}}{2}$$

$$7. a) \int_0^\pi x \cos(x) dx = [x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x) dx = (-\cos(x))_0^\pi = \cos(\pi) - \cos(0) = -2$$

$$b) \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \frac{-2+e}{e}$$

8. a) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur, dans les éditions suivantes,

l'intégrale à chercher est $\int_1^e x^2 \ln(x) dx$.

$$\int_1^e x^2 \ln(x) dx = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

$$b) -4$$

$$9. \int_0^1 [2f(t) - g(t)] dt = 2 \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 g(t) dt = 11$$

$$10. 1,5$$

$$11. \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Donc

$$\int_2^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) dx \leq \int_2^4 f(x) dx \leq \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) dx$$

$$\text{donc } 2 \leq \int_2^4 f(x) dx \leq 2,5.$$

$$12. \int_0^1 e^{-n} dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n} dx$$

$$\text{Donc } e^{-n} \leq \int_0^1 f_n(x) \leq \frac{1}{n}.$$

La suite converge vers 0.

13. f est négative sur $[-5 ; -3]$ donc

$$\mathcal{A} = \int_{-5}^{-3} -\frac{1}{x} dx = \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

14. 1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) = 1$ car la fonction racine

cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit $x = 2$.

2. g est négative sur $]2 ; +\infty[$ donc :

$$\mathcal{A} = \int_{-3}^2 g(x) dx - \int_2^4 g(x) dx = \frac{8811}{256}.$$

15. $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2$. Le polynôme a deux racines -1 et 2 . Il est négatif sur $[-1 ; 2]$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^2 -(x^2 - x - 2) dx = 4,5.$$

16. $f(x) - g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 12$ donc $f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

ou $x = -4$.

$f - g$ est négative sur $[-4 ; 4]$ donc

$$\mathcal{A} = - \int_{-4}^4 (f(x) - g(x)) dx = 64.$$

$$17. u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^n \cos(t) (t-1) dt$$

Or, sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right] : t^n \cos(t) \geq 0$ et $t-1 \leq 0$ donc

$$t^n \cos(t) (t-1) \leq 0 \text{ donc } u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

La suite (u_n) est décroissante.

$$\text{Sur } \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right] : t^n \cos(t) \geq 0 \text{ donc } \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^n \cos(t) dt \geq 0 \text{ donc}$$

(u_n) est minorée par 0. (u_n) est décroissante et minorée, elle converge.

18. $0 \leq 1-t \leq 1$ donc $(1-t)^{n+1} \leq (1-t)^n$ donc la suite est décroissante et minorée par 0. Elle converge.

19. 1. $F'(t) = f(t)$

2. $\int_0^{10} f(t) dt = -220e^{-10} + 20 < 20$. Ils respectent le cahier des charges (de justesse).

20. 1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f'(x) = -(0,5x + 3)e^{-0,5x}.$$

f' est négative donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$2. F'(x) = (x+8)e^{-0,5x} = f(x).$$

Donc $F(x)$ est bien une primitive de $f(x)$.

3. x est exprimé en centaines d'euros donc 200 euros équivaut à $x = 2$.

$$f(2) = 10e^{-1} \approx 3,678\,794$$

$f(2)$ étant exprimé en milliers d'objets, pour un prix unitaire de 200 euros, la demande est de 3 678 objets à l'unité près.

$$4. \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{1}{2} (F(4) - F(2))$$

$$= \frac{1}{2} (-28e^{-2} + 24e^{-1})$$

$$\frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx \approx 5,039\,71 \text{ milliers d'objets.}$$

La valeur moyenne de la demande est 5 040 objets à 10 produits près.

Exercices apprendre à démontrer

p. 252

Pour s'entraîner

Soit $x_0 \in [a ; b]$ et $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a ; b]$. On

pose $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Selon le signe de h , on encadre

l'aire sous la courbe entre x_0 et $x_0 + h$ par des aires de rectangles, en utilisant la décroissance de f .
Ainsi, si $h > 0$:

$$hf(x_0 + h) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq hf(x_0).$$

Par continuité et en appliquant le théorème d'encadrement, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

On obtient de la même manière

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Par définition, F est dérivable en x_0 avec $F'(x_0) = f(x_0)$.

Exercices

calculs et automatismes

p. 253

21. Calcul d'intégrale (1)

b) et c) : inverser les termes pour reconnaître la relation de Chasles

22. Calcul d'intégrale (2)

a) Vrai : $-\ln\left(\frac{3}{5}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

b) Faux : la fonction intégrée est négative sur $[-2 ; 2]$.

23. Calcul d'intégrale (3)

Vrai : la fonction intégrée est impaire et la courbe est symétrique par rapport à 0.

$$\int_0^2 \frac{x}{x^4 + 1} dx = - \int_{-2}^0 \frac{x}{x^4 + 1} dx$$

24. Propriété de l'intégrale

Faux : $3 \int_0^\pi 1 dx = 3\pi$

25. Inégalité

Faux : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$

Donc $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$ donc $0 \leq \cos^6(x) \leq 1$ et

$$0 \leq \int_0^\pi \cos^6(x) dx \leq \pi.$$

26. Intégration par parties

a) : appliquer la propriété avec $u'(x) = e^x$.

c) : les bornes de l'intégrale ne sont pas dans l'ordre usuel.

27. Calcul d'intégrale (4)

[ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, le choix d) doit être

$$\int_{-4}^1 (x+1) dx.$$

d) : $\int_{-1}^2 g(x) dx = -4,5$ et c'est l'opposé de l'aire d'un demi carré de côté 3.

28. Calcul d'intégrale (5)

d) : estimer l'intégrale en calculant des aires.

29. Aire sous la courbe

[ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, le choix d) est :

$$2 \times \int_{-4}^{-3} (0,5x^2 + 0,5x - 3) dx - \int_{-3}^2 (0,5x^2 + 0,5x - 3) dx.$$

d) : on élimine la réponse c) en estimant l'aire sans calculer l'intégrale.

30. Estimer une intégrale

[ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur, les expressions doivent être :

a) $\int_{-1}^1 f(x) dx < \int_{-1}^1 g(x) dx.$

b) $\int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 g(x) dx.$

a) Vrai.

b) Vrai : on détermine graphiquement la position relative des deux courbes.

31. Aire entre deux courbes

b) : la courbe $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $[-4 ; 0]$.

Les réponses c) et d) sont éliminées en estimant l'aire entre les deux courbes.

Exercices d'application

p. 254

Déterminer une intégrale par calcul d'aire

32. 1. $\mathcal{A}_f = 6$

2. $\mathcal{A}_g = 12$

33. [ERRATUM] La première édition comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes : on considère le point B sur la droite d'équation $y = -2x$ et d'abscisse **-2**.

$\mathcal{A}_{OAB} = 5$

34. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions

suivantes : on calcule $\int_1^3 (-x + 4)dx$.

$\int_1^3 (-x + 4)dx = 4$

35. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions

suivantes : on calcule $\int_{-0,5}^2 (x + 2)dx$.

$\int_{-0,5}^2 (x + 2)dx = 4,875$

36. a) $\int_0^1 xdx = 0,5$

b) $\int_1^3 (2t + 1)dt = 10$

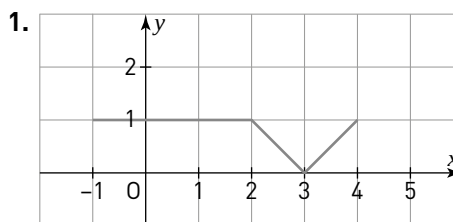
c) $\int_2^4 (-y + 3)dy = 0$

37. a) 4,5

b) 6

c) 4,5

38. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur dans la définition de la fonction, corrigée dans les éditions suivantes. Il faut lire $t - 3$ si $t \in]3 ; 4]$.



2. La fonction est continue sur l'intervalle et $f(t) \geq 0$ sur l'intervalle.

3. $\int_{-1}^4 f(t)dt = 4$

39. a) 8

b) 12

Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

40. 1. 0,2

2. Aire colorée = 0,2

Aire hachurée = $0,2 \times \frac{1}{1,2} = \frac{1}{6}$

3. Aire des 5 rectangles hachurés :

$0,2 \left(\frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,6} + \frac{1}{1,8} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1627}{2520}$.

Aire des 5 rectangles colorés :

$0,2 \left(1 + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,6} + \frac{1}{1,8} \right) = \frac{1879}{2520}$.

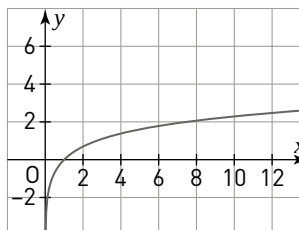
La fonction inverse est décroissante donc

$\frac{1627}{2520} \leq \int_0^1 \frac{1}{x} dx \leq \frac{1879}{2520}$.

41. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \leq \int_0^4 f(x)dx \leq 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}$

Donc $4 \leq \int_0^4 f(x)dx \leq 6$.

42. 1.



$$2. 3,08 \leq \int_5^{10} \ln(t) dt \leq 3,88$$

Pour réaliser cet encadrement, on peut notamment utiliser un algorithme Python.

```
import numpy as np
def ln(x) :
    return np.log(x)
def U(n) :
    S=0
    for k in range(5, n+1) :
        S=S+ln(k*5/n)
    return S*5/n
def V(n) :
    S=0
    for k in range(5, n) :
        S=S+ln(k*5/n)
    return S*5/n
print ("U", U(10), "V", V(10))
```

Calculer des intégrales à l'aide d'une primitive

43. 1. $F'(x) = 3x^2 - 6x - 4 = f(x)$ donc F est une primitive de f .

$$2. \int_{-1}^2 f(x) dx = [x^3 - 3x^2 - 4x]_{-1}^2 = -12$$

$$44. a) \frac{7}{3} \quad b) 20 \quad c) \ln(5)$$

$$45. a) 4 \quad b) -\frac{99}{2}$$

$$c) 1 \quad d) \frac{85}{2}$$

$$46. a) 1 - \ln(4)$$

$$b) \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$c) \frac{2}{3}$$

$$47. a) \int_0^1 2te^{t^2} dt = (e - 1)$$

$$b) \int_0^{\ln(2)} 3t^2 e^{t^3} dt = e^{\ln(2)^3} - 1$$

c) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions

suivantes, il faut lire : $\int_1^e \frac{2}{2t^3} dt$.

$$\int_1^e \frac{2}{2t^3} dt = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

d) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions

suivantes, il faut lire : $\int_1^e (t^2 - 1) \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) dt$.

$$\int_1^e (t^2 - 1) \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) dt = \ln \left(\frac{e^3 - 3e}{2} \right)$$

$$e) \int_{-1}^2 (1 - 2t) e^{-t^2+t+1} dt = 0$$

$$48. a) \frac{e^2(e-1)}{2}$$

$$b) 0$$

$$c) -\frac{9}{4}$$

$$d) 3 - \sqrt{6}$$

$$49. a) \frac{1}{2} (\ln(1 + e^2) - \ln(2))$$

$$b) 3\ln(11)$$

$$c) \frac{1}{4} \ln(8)$$

$$d) \ln \left(\frac{e^3 + 2}{3} \right)$$

50. La fonction $x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{x}$ est une primitive de f .

$$\int_2^3 f(t) dt = \ln \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{6}$$

$$51. a) \int_{-1}^2 4t(2t^2 + 3)^2 dt = \left[\frac{1}{3} (2x + 3)^3 \right]_{-1}^2 = 402$$

$$b) \int_{-7}^{-2} \frac{t}{(t^2 - 1)^5} dt = \left[-\frac{1}{8} \frac{1}{(x^2 - 1)^4} \right]_{-1}^2 = -\frac{65\,535}{42\,467\,328}.$$

52. 1. On a $f'(x) = (2x + 2)e^x$.

2. Ainsi, $I = \left[f(x) \right]_{-1}^0 = \frac{2}{e}$.

3. La fonction $x \mapsto (2x + 2)e^x$ est continue et positive sur $[-1 ; 0]$.

Calculer une intégrale

avec une intégration par parties

53. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes. Il faut lire : « en posant $u(x) = e^x$ et $v'(x) = x$. »

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1$$

54. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, il faut lire : « Calculer $\int_1^2 \frac{\ln x^2}{x} dx$ en posant $u'(x) = \frac{1}{x^2}$ et $u(x) = \ln x$. »

$$\text{On a } \int_1^2 \frac{\ln(x^2)}{x} dx = \ln(2)^2.$$

$$\mathbf{55. a)} \int_0^{10} (2t + 1)e^{-t} dt = 3 - 23e^{-10}$$

$$\mathbf{b)} \int_{-\frac{1}{3}}^0 (4 - 3t)e^{3t+1} dt = 39e - 42$$

$$\mathbf{56. a)} -6\pi$$

$$\mathbf{b)} \pi + 2$$

57. a) On effectue deux intégrations par parties

successives pour trouver $\frac{(\pi - 1)^2 + 1}{3}$.

$$\mathbf{b)} \frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

$$\mathbf{58. a)} \frac{(\pi - 1)^2 + 1}{3}$$

b) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée sur les éditions sui-

vantes. Il faut lire $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} t + \frac{\pi}{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt$.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} t + \frac{\pi}{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt = 1,196$$

$$\mathbf{59. 1.} \int_1^5 \ln(x) dx = [x \ln(x) - x]_1^5 = 5 \ln(5) - 4.$$

2. La fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On obtient en effectuant une intégration par parties et en utilisant la question précédente $5 \ln(5)^2 - 10 \ln(5) + 8$.

Utiliser la linéarité de l'intégrale

$$\mathbf{60.} I + J = \int_0^\pi x(\cos^2(x) + \sin^2(x)) dx = \frac{\pi^2}{2}$$

61. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions

suivantes. Il faut lire $\int_a^b t f(t) dt = 2e$.

$$\mathbf{a)} 9 + 4e$$

$$\mathbf{b)} 30 + 9e$$

$$\mathbf{c)} 29 + 10e$$

$$\mathbf{d)} 4e + \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

62. 1. Si $t \in [0 ; 1]$, $t^3 \leq t^2$; on passe ensuite à l'intégrale.

2. Sur $[2 ; 3]$, $t^2 \leq t^3$.

63. Il suffit de constater que pour $t \in [0 ; 2]$, $2t(t - 2) \leq 0$ et sur $[2 ; 3]$, $0 \leq t^3$. L'intégrale négative est ainsi plus petite que l'intégrale positive.

64. 1. $\int_a^d f(t) dt = e$

2. $\int_a^c f(t) dt = 5(\sqrt{2} - 1)$

3. $\int_b^c f(t) dt = -1$

4. $\int_b^c f(t) dt = -1$

65. a) $' = e^2 - e^{-2} - \frac{1}{e} + 1$

b) $J = 0$

Encadrer une intégrale

66. a) La fonction est négative sur $[-2 ; -1]$ donc

$$\int_{-2}^{-1} -\frac{1}{x} dx \leq 0.$$

b) La fonction est positive sur $[-3 ; -1]$ donc

$$\int_{-3}^{-1} (2x^2 + 1) dx \geq 0.$$

c) La fonction est positive sur $[0 ; 11]$ donc

$$\int_0^{11} 2xe^x dx \geq 0.$$

d) La fonction est négative sur $[0,5 ; 1]$ donc

$$\int_{0,5}^1 \ln(x) dx \leq 0.$$

67. a) $f(t) = \cos(t)$

b) $f(t) = -(t+1)(t-2)$

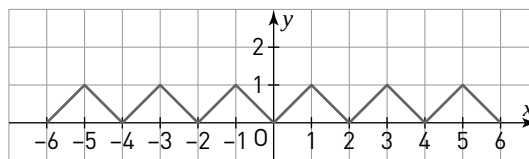
c) $f(t) = 3|t|$

Utiliser la relation de Chasles

68. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée sur les éditions suivantes, il faut lire $t - 3$ si $t \in]3 ; 4]$.

$$\int_{-1}^4 f(t) dt = \int_{-1}^2 dt + \int_2^3 (-t+3) dt + \int_3^4 (t+3) dt = 4$$

69. 1. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, l'ensemble de définition est $[-6 ; 6]$.



2. 0,5

3. $\int_{-1}^1 g(t) dt = 1$

$\int_{-6}^6 g(t) dt = 6$

70. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions

suivantes, il faut lire $\frac{-x+3}{2}$ si $2 \leq x \leq 3$.

$$\int_0^3 f(x) dx = \ln 2 + \frac{11}{12}$$

Calculer la valeur moyenne d'une fonction

71. a) $\frac{13}{3}$

La fonction f est positive sur $[-2 ; 2]$ donc la valeur moyenne est la largeur d'un rectangle de longueur 4 et d'aire $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

b) $\frac{1}{4-e} \left(-\frac{1}{26} + \frac{1}{2e^2-6} \right)$

La fonction g est positive sur $[e ; 4]$ donc la valeur moyenne est la largeur d'un rectangle de longueur

$4 - e$ et d'aire $\int_e^4 g(x) dx$.

72. $2\ln 2$

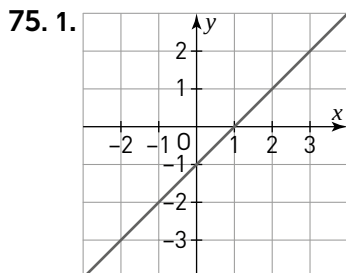
73. La fonction étant paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt = 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt.$$

Or $\frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt = \frac{2}{\pi}$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt = \frac{1}{2}$.

74. Soit $k \in \mathbb{R}$. Si $f(x) = kx$ alors la valeur moyenne de la fonction sur $[a ; b]$ est $\frac{k(a+b)}{2}$.

Calculer une aire à l'aide d'une intégrale



2. a) -4,5

b) 2

3. $f \leq 0$ sur $[-2 ; 1]$ et $f \geq 0$ sur $[1 ; 3]$.

4. $\mathcal{A} = \int_{-2}^1 -f(x)dx = 4,5$

5. $\mathcal{A}' = \int_{-2}^1 -f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = 4,5 + 2 = 6,5 \text{ u.a.}$

76. 1. h est négative sur $[-3 ; -2] \cup [1 ; 4]$ et positive sinon.

2. $\frac{81}{8} \text{ u.a.}$

3. $-\frac{81}{8} + \frac{81}{8} = 0 \text{ u.a.}$

77. 1. f est positive sur $[-5 ; -3] \cup [5 ; 6]$, négative sinon.

2. $\frac{167}{6} \text{ u.a.}$

3. $-\frac{187}{12}$

4. L'aire sous la courbe d'une fonction de signe non constant n'est pas égale à l'intégrale de la fonction.

78. a) $\int_{-2}^{-1} (x+3)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x+3)^3 \right]_{-2}^{-1} = \frac{7}{3}$.

b) $\int_{-3}^2 (x^3 + 2x^2 - 3x + 3)dx = \frac{343}{12}$

c) $\int_0^9 \left(-\frac{x^3}{27} + \frac{x^2}{3} \right) dx = \frac{81}{4}$

d) $\int_1^2 \left(-x - \frac{2}{x} + 3 \right) dx = \frac{3}{2} - 2\ln(2)$

Calculer une aire entre deux courbes

79. 1. $f(x) > g(x)$ si $x \in]2 ; +\infty[$

2. $\int_{-4}^2 (g(x) - f(x))dx = 18 \text{ u.a.}$

3. $\mathcal{A} = \int_{-4}^2 (g(x) - f(x))dx + \int_2^7 (f(x) - g(x))dx = 30,5 \text{ u.a.}$

80. 1. Les abscisses sont 2 et -2.

2. L'inégalité est vraie sur $[-2 ; 2]$.

3. $\frac{16}{3} \text{ u.a.}$

81. Pour $x \in [0 ; 1]$, on a : $1 - x^2 > x^2 - 1$.

Ainsi, l'aire voulue est donnée par :

$\int_{-1}^1 (-2x^2 + 1)dx = \frac{2}{3}$.

82. 1. $f - g \leq 0$ sur $[2 ; 4]$.

2. $\int_2^4 [-2x^2 + 10x - 9 - (x^2 - 8x + 15)]dx = 4$

Exercices d'entraînement

p. 258

Calcul intégral à l'aide d'une primitive

83. On reconnaît des fonctions usuelles dont on connaît des primitives :

a) $\int_{-1}^2 4t(2t^2 + 3)^2 dt = \left[\frac{1}{3}(2t^2 + 3)^3 \right]_{-1}^2 = 402$

b) $\int_{-7}^2 \frac{t}{(t^2 - 1)^5} dt = \left[\frac{-1}{8(t^2 - 1)^4} \right]_{-7}^2 = -\frac{1}{8} \left(\frac{1}{3^4} - \frac{1}{48^4} \right)$

$$84. \text{ a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos(x) \sin^2(x) dx = \left[\sin^3(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{b) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx = \left[2\sqrt{\sin(x)} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2} \left(3^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}} \right)$$

$$85. \text{ a) } \int_0^1 e^t (e^t - 1)^2 dt = \left[\frac{1}{3} (e^t - 1)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} (e - 1)$$

b) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée sur les éditions suivantes, il faut lire : $\int_0^1 \frac{e^{-t} + 2}{e^{-t} - 2t} dt$.

$$\int_0^1 \frac{e^{-t} + 2}{e^{-t} - 2t} dt = \left[t - \ln(1 - 2e^t) \right]_0^1 \text{ impossible à calculer}$$

sur l'intervalle car pour $t = 1$, l'expression $1 - 2e^t$ est négative, hors de l'intervalle de définition de $\ln$.

86. 1. La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in [-1 ; 0]$, $f'(x) = 2e^x + f(x)$.

2. La question précédente nous donne une primitive de la fonction que l'on veut intégrer :

$$\int_{-1}^0 (2x + 2)e^x dx = \left[f(x) \right]_{-1}^0 = \frac{2}{e}$$

3. La fonction considérée est positive sur l'intervalle $[-1 ; 0]$ et continue. Son intégrale correspond donc à l'aire sous la courbe.

$$87. \text{ 1. } u_0 = \int_0^1 dx = 1 ; u_1 = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}.$$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n + 1}$$

$$3. \text{ On a } u_4 = \frac{1}{9}.$$

88. 1. Pour tout réel x , on a :

$$1 - \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \frac{e^{-x} + 1 - e^{-x}}{e^{-x} + 1} = f(x)$$

$$2. \int_0^{\ln(2)} f(t) dt = \left[x + \ln(e^{-x} + 1) \right]_0^{\ln(2)} = \ln(3)$$

89. 1. La fonction f est dérivable comme composée de fonctions dérivables sur $[0 ; 1]$.

Pour $x \in [0 ; 1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{4}{4 - x^2} = \frac{1}{\frac{2-x}{2+x}} = \frac{1}{2-x}$$

2. La question précédente nous fournit une primitive de la fonction à intégrer.

$$\int_0^1 \frac{1}{4 - t^2} dt = f(1) - f(0) = \frac{\ln(3)}{4}$$

90. 1. D'après le théorème d'existence d'une primitive, la fonction $t \mapsto 4t + 2$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est dérivable de dérivée $t \mapsto 4t + 2$.

2. On a, pour tout réel x :

$$\int_1^x (4t + 2) dt = \left[2t^2 + 2t \right]_1^x = 2x^2 + 2x - 4$$

$$3. 2x^2 + 2x - 4 = 2(x - 1)(x + 2)$$

L'équation admet exactement deux solutions.

Intégration par parties

91. Les fonctions concernées dans cet exercice sont produits de fonctions infiniment dérivables, le calcul d'intégration par parties est donc possible.

$$\text{a) } \int_0^1 t^2 e^t dt = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \left[2x e^x \right]_0^1 + \int_0^1 2e^t dt = e - 2$$

b)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cos(t) dt &= \left[x^2 \sin(x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[2x \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(t) dt \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4} + 1 \right) \end{aligned}$$

92. On peut mener cette exercice par primitivation par parties ou alors en intégrant par parties avec une variable en borne.

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2 e^t dt &= \left[t^2 e^t \right]_0^x - \int_0^x 2te^t dt = \left[t^2 e^t \right]_0^x - \left[2te^t \right]_0^x + 2 \int_0^x e^t dt \\ &= e^x(x^2 + x + 2) + 2.\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto e^x(x^2 - 2x + 2)$ est une primitive qui convient.

93. On pose $I = \int_0^\pi e^t \sin(t) dt$ et $J = \int_0^\pi e^t \cos(t) dt$.

1. On intègre un produit de fonctions infiniment dérivables, on peut donc effectuer une intégration par parties :

$$I = \int_0^\pi e^t \sin(t) dt = \left[e^x \sin(x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^t \cos(t) dt = -J.$$

$$\begin{aligned}\text{De plus : } \int_0^\pi e^t \cos(t) dt &= \left[e^x \cos(x) \right]_0^\pi + \int_0^\pi e^t \sin(t) dt \\ &= -e^\pi - 1 + I.\end{aligned}$$

2. Ainsi, I et J sont solutions du système :

$$\begin{cases} I + J = 0 \\ J - I + 1 + e^\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I = -\frac{1+e^\pi}{2} \\ J = \frac{1+e^\pi}{2} \end{cases}$$

94. 1. On a :

$$((ax^2 + bx + c)e^x)' = e^x(ax^2 + (2a + b)x + c + b)$$

2. On déduit de la question précédente qu'une primitive de f peut être donnée par $x \mapsto e^x(x^2 - x + 2)$.

3. On écrit par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x (t^2 + t + 1)e^t dt = \int_0^x t^2 e^t dt + \int_0^x t e^t dt + \int_0^x e^t dt$$

On retrouve ensuite le résultat.

95. On pose $f(t) = \frac{e^{-t}}{e^t + 1}$ et $g(t) = \frac{1}{(e^t + 1)^2}$.

1. On a pour tout réel t :

$$1 - \frac{e^t}{e^t + 1} - \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} = \frac{(e^t + 1)^2 - e^t(e^t + 1) - e^t}{(e^t + 1)^2} = g(t).$$

2. a) On a $\int_0^1 \frac{e^t}{e^t + 1} dt = \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^1 = \ln(e + 1) - \ln(2)$

$$\text{et } \int_0^1 \frac{e^t}{(e^t + 1)^2} dt = \left[-\frac{1}{e^x + 1} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e + 1}.$$

b) Ainsi, d'après les questions précédentes et par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^1 g(t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{e + 1} + \ln\left(\frac{2}{e + 1}\right)$$

3. a) La fonction f est infiniment dérivable comme quotient bien défini et dérivable. On peut utiliser une intégration par parties en dérivant le terme inverse et en primitivant l'exponentielle décroissante :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t) dt &= \left[\frac{-e^{-x}}{e^x + 1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-t} e^t}{(e^t + 1)^2} dt \\ &= -\frac{1}{e^2 + e} + \frac{1}{2} - \int_0^1 g(t) dt\end{aligned}$$

b) Finalement, $\int_0^1 f(t) dt = -e^{-1} + \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$.

c) La fonction f est positive sur son ensemble de définition. Ainsi, l'aire, en unités d'aire, sous la courbe représentative de f sur $[0 ; 1]$ est égale à

$$-e^{-1} + \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right).$$

96. On pose $f(t) = t^3 e^{-\frac{t^2}{2\pi}}$ pour $t \geq 0$.

1. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions

suivantes, il faut lire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 2\pi^2$

La fonction f est un produit de fonctions infiniment dérivables. On peut effectuer une intégration par parties en primitivant la partie composée par exponentielle et en dérivant la fonction carrée restante : soit $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2 \times t e^{-\frac{t^2}{2\pi}} dt &= \left[-\pi t^2 e^{-\frac{t^2}{2\pi}} \right]_0^x + \int_0^x 2\pi t e^{-\frac{t^2}{2\pi}} dt \\ &= \left[-\pi t^2 e^{-\frac{t^2}{2\pi}} \right]_0^x - \left[2\pi^2 e^{-\frac{t^2}{2\pi}} \right]_0^x = -\pi e^{-\frac{x^2}{2\pi}} (x^2 + 1) + 2\pi^2.\end{aligned}$$

Une utilisation correcte du théorème des croissances comparées nous donne :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\pi e^{-\frac{x^2}{2\pi}(x^2+1)} = 0;$$

et finalement, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = 2\pi^2.$$

2. L'intégrale dite impropre $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est bien définie

et correspond, la fonction étant positive, à l'aire sous la courbe de la fonction sur $[0 ; +\infty[$.

Étudier une fonction définie par une intégrale

97. La fonction $t \mapsto 2e^{-3t}$ est continue et positive. D'après le théorème d'existence d'une primitive, la fonction F est son unique primitive qui s'annule en 0.

On a $F'(x) = 2e^{-3x}$.

98. 1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème d'existence d'une primitive, la fonction F est son unique primitive qui

s'annule en 0. On a $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2. F est dérivable sur $[2 ; +\infty[$ d'après le théorème d'existence d'une primitive. Pour déterminer le sens de variations d'une fonction dérivable, on étudie sa dérivée.

On a $F'(x) = \frac{\ln(x^2)}{x-1}$, pour $x \geq 2$. Sur cet intervalle cette dérivée est positive, la fonction F est donc croissante sur $[2 ; +\infty[$.

On a $F'(x) = \frac{\ln(x^2)}{x-1}$, pour $x \geq 2$. Sur cet intervalle cette dérivée est positive, la fonction F est donc croissante sur $[2 ; +\infty[$.

cette dérivée est positive, la fonction F est donc croissante sur $[2 ; +\infty[$.

99. 1. F est définie sur $]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

2. On a $F'(x) = 2x \times \frac{1}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$.

Calculer l'aire d'une surface

100. 1. Le signe de $f(x)$ s'obtient en étudiant le signe d'un produit. Pour tout réel x , $e^{1-x^2} > 0$ et pour tout $x \in [-2 ; 0]$, $-2x > 0$.

Ainsi $f(x) > 0$ sur $[-2 ; 0]$.

2. La fonction f est continue comme produit et composée de fonctions polynomiales et exponentielles. Ainsi, f est continue et positive, l'aire sous sa courbe représentative est donc l'intégrale suivante :

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = \left[e^{1-t^2} \right]_{-2}^0 = e - e^{-3}$$

101. 1. La fonction f est dérivable sur $[e^{-1} ; 1]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. On a alors :

$$f'(x) = -(\ln(x) + 1).$$

Or $\ln(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-1}$. La fonction f est donc décroissante sur $[e^{-1} ; 1]$, avec $f(1) = 0$ et $f(e^{-1}) = e^{-1}$. Remarquons que ceci nous donne ainsi la positivité de la fonction f .

2. La fonction g est dérivable sur $[e^{-1} ; 1]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. On a alors :

$$g'(x) = 4x \ln(x) + 2x.$$

On en déduit qu'une primitive de f est donnée par la fonction :

$$x \mapsto -\frac{1}{4}(g(x) + x^2).$$

3. D'après la première question, la fonction f est donc continue et positive sur l'intervalle $[e^{-1} ; 1]$. Ainsi :

$$\int_{e^{-1}}^1 f(t) dt = \left[-\frac{1}{4}(g(x) + x^2) \right]_{e^{-1}}^1 = -\frac{1}{2}e^{-2}.$$

102. 1. Les fonctions $x \mapsto e^{x-2}$ et $x \mapsto e^{2-x}$ sont respectivement continues sur $] -\infty ; 2]$ et $[2 ; +\infty[$ comme composées de fonctions continues. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

Ensuite, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{x-2} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{2-x} = 1;$$

$$f(2) = 1.$$

La fonction est donc continue pour $x = 2$.

$$2. \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 e^{x-2} dx + \int_2^4 e^{2-x} dx = e^2 - e^{-2}$$

103. a) Déterminons les points d'intersection de ces courbes. On résout :

$$x^2 + 3x - 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0.$$

Ainsi il s'agit de regarder l'intégrale :

$$\int_{-2}^1 (2t + 1 - (t^2 + 3t - 1)) dt = - \int_{-2}^1 (t^2 + t - 2) dt \\ = - \left[\frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 - 2t \right]_{-2}^1 = \frac{35}{6}.$$

b) [ERRATUM] La première édition contient une erreur sur la figure corrigée dans les éditions suivantes.

On recherche :

$$\int_{1,5}^3 (-10e^{-t} + t^2) dt = \left[10e^{-x} + \frac{1}{3} x^3 \right]_{1,5}^3 \\ = 10(e^{-3} - e^{-1,5}) + \frac{63}{8}.$$

104. 1. On procède par intégration par parties avec une fonction logarithme qui est dérivable et de dérivée continue sur $[1; e]$:

$$J = \left[x(\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(t) dt = e - 2I.$$

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\ln(x) > (\ln(x))^2 \Leftrightarrow 0 > (\ln(x))^2 - \ln(x) \\ \Leftrightarrow 0 > \ln(x)(\ln(x) - 1) \Leftrightarrow x \in [1; e].$$

$$\mathbf{3.} \quad A = \int_1^e (\ln(t) - (\ln(t))^2) dt \\ = I - e + 2I = 3I - e$$

$$\text{Or } I = \int_1^e \ln(t) dt = 1 \text{ d'où } A = 3 - e.$$

105. 1. Déterminons les points d'intersection de ces courbes. On résout :

$$\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x - 3 = -\frac{1}{2} (x - 3)(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 3.$$

On a $A(-2; 0)$ et $B(3; 0)$.

2. La courbe représentative de la fonction f est au-dessus de celle de g sur l'union $]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$.

$$\mathbf{3.} \quad - \int_{-2}^3 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x - 3 + \frac{1}{2} (x - 3)(x + 2) \right) dx \\ = - \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 - 6x \right]_{-2}^3 = \frac{125}{6}$$

106. 1. a) On calcule $N(2) = 0$.

b) On développe puis on identifie :

$$(x - 2)(bx^2 + cx + d) = bx^3 + (c - 2b)x^2 + (d - 2c)x - 2d.$$

On a $b = 1$; $c = 4$ et $d = 8$.

$$\mathbf{c)} \quad \text{On a } f(x) - g(x) = \frac{N(x)}{2(x + 2)} = \frac{(x - 2)(x^2 + 4x + 8)}{2(x + 2)}.$$

Or pour tout réel, $x^2 + 4x + 8 > 0$. Ainsi, pour $x \in [0; 2]$, $f(x) - g(x) \leq 0$ et pour $x > 2$, $f(x) - g(x) > 0$.

$$\mathbf{2.} \quad \text{Si } a < 2, \quad A(D) = \int_0^a (g(t) - f(t)) dt = -\frac{a^3}{6} + 8 \ln \left(\frac{a + 2}{2} \right).$$

$$\mathbf{3.} \quad \text{Si } a \geq 2, \quad A(D) = \int_0^2 (g(t) - f(t)) dt + \int_2^a (f(t) - g(t)) dt \\ = \frac{a^3}{6} - \frac{8}{3} + 8 \ln \left(\frac{8}{a + 2} \right).$$

107. 1. a) $a = 2,1$

b) On peut donner le tableau :

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - g(x)$	-	+	

2. a) h est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$. On a : $h'(x) = \ln(x) + 2$.

$$\text{On a } f(x) - g(x) = \ln(x) - \frac{1}{x} + 1 = \frac{x \ln(x) + x - 1}{x} = \frac{h(x)}{x}.$$

La fonction h et son signe permettent d'étudier les positions des deux courbes.

b) On a : $\ln(x) + 2 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-2}$. h est décroissante sur $]0; e^{-2}[$ et croissante sur $]e^{-2}; +\infty[$. Les variations de h nous permettent d'avoir $x = 1$ comme unique solution de $h(x) = 0$.

c) La courbe représentative de f est au-dessus de celle de g sur $[1; +\infty[$.

3. L'aire est donnée par :

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 \left(\frac{1}{t} - 1 - \ln(t) \right) dt = \left[(1 - x) \ln(x) \right]_{\frac{1}{e}}^1 = \frac{e - 1}{e}.$$

4. a) $\int_1^a \left(-\frac{1}{t} + 1 + \ln(t) \right) dt = (a-1)\ln(a)$

b) La fonction k est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

On a $k'(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x} = f(x) - g(x)$. La fonction k est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

c) La continuité de k , avec $k(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$

et le théorème des valeurs intermédiaires, nous donne une unique solution $a \in [1 ; +\infty[$ à l'équation

$$\frac{e-1}{e} = k(x).$$

La calculatrice nous donne l'encadrement suivant : $1,94 < a < 1,95$.

Utiliser les propriétés de l'intégrale

108. 1. Pour $x \in [0 ; 1]$, $1 + x^2 > 0$. La fonction f est donc continue comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur $[0 ; 1]$. f est positive comme inverse d'une quantité positive.

Enfin, en utilisant une composée de fonctions ou une étude de dérivée, on démontre que la fonction f est décroissante sur $[0 ; 1]$. L'aire sous la courbe représentative de f sur $[0 ; 1]$ correspond donc à l'intégrale de cette fonction sur cet intervalle.

2. a) On a $f(0) = 1$ et $f(1) = \frac{1}{2}$.

Par décroissance de f sur $[0 ; 1]$:

$$f(1) \leq f(x) \leq f(0).$$

b) On obtient par inégalité d'intégrale :

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1.$$

3. On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ d'où $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq f(0)$

$$\text{et } f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Ainsi : } \frac{13}{20} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{9}{10}$$

4. On partage l'intervalle considéré en cinq intervalles de la forme $\left[\frac{k}{5}; \frac{k+1}{5}\right]$. On encadre alors

la fonction puis son intégrale sur chacun de ces intervalles pour obtenir :

$$0,7337 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 0,8337.$$

109. 1. On a : $u_0 = 0$;

$$u_1 = \int_0^1 f(t) dt = 1;$$

$$u_2 = \int_0^2 f(t) dt = 4;$$

$$u_3 = u_2 + \int_2^3 f(t) dt = 8.$$

2. Pour tout $n > 2$, on a $u_n = 4(n-1)$.

110. 1. Il s'agit de regarder la continuité de la fonction en $x = 2$. En effet, les deux expressions données sont continues sur leurs ensembles de définition par composées, et opérations usuelles sur les fonctions continues.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 2x\sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{2} = f(2).$$

La fonction f est donc continue sur $[0 ; 3]$.

2. D'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(t) dt &= \left[8\sqrt{x+1} \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 \\ &= 8(\sqrt{2}-1) + \frac{2}{3} \left(10^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned}$$

111. 1. On peut traiter l'encadrement en prenant chaque inégalité à part. Pour la première, on peut

déterminer la tangente de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui

est convexe, au point d'abscisse 0 : $y = 1 - x$.

Pour la deuxième, il s'agit de constater que

$$\frac{x^3}{1+x} > 0 \text{ pour } x > 0.$$

2. On primitive l'inégalité :

$$\int_0^x (1-t)dt \leq \ln(1+x) \leq \int_0^x (1-t+t^2)dt.$$

D'où :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

112. [ERRATUM] La première édition comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, il faut lire :

$$f(x) = \begin{cases} -xe^{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Les fonctions $x \mapsto xe^{x^2}$ et $x \mapsto -xe^{x^2}$ sont respectivement continues sur $]-\infty; 0]$ et $]0; +\infty[$ comme produit composé de fonctions continues. Ainsi la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ensuite, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} xe^{x^2} = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} -xe^{x^2} = 0;$$

$$f(0) = 0.$$

La fonction est donc continue pour $x = 0$.

2. [ERRATUM] Les bornes de l'intégrale sont -2 et 2 .

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = 2 \int_0^2 xe^{x^2}dx = e^4 - 1$$

113. 1. On calcule :

$$I - 3J = \int_0^{\ln(8)} \frac{e^t}{e^t + 4} dt = \left[\ln(e^x + 4) \right]_0^{\ln(8)} = \ln\left(\frac{12}{5}\right).$$

De plus $I + J = \ln(8)$.

2. On résout le système :

$$\begin{cases} I - 3J = \ln\left(\frac{12}{5}\right) \\ I + J = \ln(8) \end{cases}$$

$$\text{On obtient } I = \ln(8) - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{10}{3}\right) \text{ et } J = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{10}{3}\right).$$

114. 1. Par définition de la valeur absolue :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x \geq 2 \\ 4 - 2x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

2. a) On a :

$$\int_{-1}^2 (4 - 2x)dx = 9; \int_2^3 (2x - 4)dx = 1.$$

b) Finalement $\int_{-1}^3 f(x)dx = 10$.

115. 1. Pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} x^2 dx = n^2 + n + \frac{1}{3}.$$

2. On a $n^2 + n + \frac{1}{3} > 0$ pour tout entier naturel.

La suite (I_n) est donc croissante.

115.1. Pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} x^2 dx = n^2 + n + \frac{1}{3}.$$

2. On a $n^2 + n + \frac{1}{3} > 0$ pour tout entier naturel.

La suite (I_n) est donc croissante.

116. 1. La fonction f est dérivable sur $[e; e^2]$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas. On a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < e^{\frac{1}{2}}.$$

f est donc décroissante sur $[e; e^2]$.

2. On a $f(e^2) \leq f(t) \leq f(e)$ pour tout $t \in [e; e^2]$.

3. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes. Il faut lire $\frac{2(e-1)}{e^3}$.

Finalement, on obtient l'encadrement :

$$\begin{aligned} (e^2 - e)f(e^2) &\leq \int_e^{e^2} f(t)dt \\ &\leq (e^2 - e)f(e) \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{2(e-1)}{e^3} \leq \int_e^{e^2} f(t)dt \leq \frac{e-1}{e}.$$

117. 1. Pour tout $t \in [0 ; 1]$,

$$f(t) - t = \frac{-t^3}{1+t^2} \leq 0.$$

2. L'inégalité précédente nous donne, par passage

à l'intégrale $\int_0^1 f(t)dt \leq \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}.$

118. La fonction f est dérivable comme composée de fonctions dérivables. On a alors $f'(t) = -2te^{-t^2} < 0$ sur $[0 ; 1]$. La fonction est donc décroissante sur cet intervalle.

On dresse alors l'encadrement suivant :

$$f(1) \leq f(t) \leq f(0).$$

Qui donne par passage à l'intégrale :

$$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq 1.$$

Étudier une suite d'intégrales

119. Les fonctions monôme et exponentielle sont toutes deux infiniment dérivables donc on peut appliquer le calcul d'intégration par parties :

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 t^{n+1} e^{-t} dt = \left[-x^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 (n+1)t^n e^{-t} dt \\ &= -\frac{1}{e} + (n+1)I_n. \end{aligned}$$

120. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_1^2 ((2-t)^{n+1} - (2-t)^n) e^t dt = \int_1^2 (2-t)^n e^t (1-t) dt.$$

Pour tout $t \in [1 ; 2]$, $1-t < 0$ et $(2-t)^n e^t > 0$. Ainsi, en tant qu'intégrale d'une fonction continue et négative, $u_{n+1} - u_n$ est négative. La suite (u_n) est décroissante.

121. 1. Pour tout entier naturel n , $f_n(0) = 1$.

2. a) Sur $[0 ; 1]$, la fonction est positive et continue pour tout entier. L'intégrale I_n correspond donc à l'aire sous la courbe de f_n sur $[0 ; 1]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 -x(1-x)^n e^{-x} dx \leq 0.$$

La suite (I_n) est ainsi décroissante.

c) La suite converge comme suite décroissante et minorée par 0.

122. 1. a) Pour tout entier naturel n et $t \in [0 ; 1]$, $(1-t)^n e^t \geq 0$.

Comme intégrale d'une fonction continue et positive, u_n est positif pour tout entier n .

b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = - \int_1^2 t(1-t)^n e^t dt \leq 0.$$

La suite (u_n) converge car elle est décroissante et minorée par 0.

2. a) Par croissance de la fonction exponentielle : $t \leq 1 \Leftrightarrow e^t \leq e$.

Ainsi, pour tout entier naturel n et $t \in [0 ; 1]$:

$$(1-t)^n e^t \leq e(1-t)^n.$$

Ainsi : $u_n \leq e \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{e}{n+1}.$

b) Le théorème des gendarmes nous permet de conclure que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Interpréter une intégrale

123. 1. Les fonctions polynomiale et exponentielle sont infiniment dérivables, on peut utiliser une intégration par parties.

Pour tout réel positif x :

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)dt &= \left[-4te^{-t} \right]_0^x + 4 \int_0^x e^{-t} dt \\ &= -4e^{-x}(x+1) + 4. \end{aligned}$$

On pose alors $F(x) = -4e^{-x}(x+1)$.

F est une primitive de f .

2. On obtient alors : $\int_0^1 f(t)dt = F(1) - F(0) = 4 - \frac{8}{e}.$

124. Il s'agit de calculer la valeur moyenne de la fonction :

$$\frac{1}{70} \int_0^{70} f(t)dt = \frac{45}{70} \int_0^{70} e^{0,01t} dt = \frac{450}{7} (e^{0,7} - 1).$$

Le débit moyen est donc environ de $65,17 \times 10^6 \text{ m}^3$.

125. 1. Si $x = 0$, alors $y = 4$, d'où $c = 4$.

Si $x = 3$, alors $y = 0$, d'où $a = -\frac{4}{9}$.

2. On a $\int_{-3}^3 \left(-\frac{4}{9}t^2 + 4 \right) dt = 16$.

3. L'aire de la façade est égale à trois fois l'aire de l'ouverture.

126. A. Étude du prix proposé par le fournisseur

1. Par limite d'une fonction fractionnelle :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = 1.$$

2. La fonction P est dérivable sur $[100; +\infty[$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$P'(x) = -\frac{200}{(x+100)^2}.$$

3. Pour $x \in [100; +\infty[$, $P(x) < 0$ donc P est décroissante avec $P(100) = 2$.

B. Étude de la somme à dépenser par le supermarché

1. Par produit de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = +\infty$.

2. La fonction S est dérivable sur $[100; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

$$S'(x) = P(x) + xP'(x) = \frac{x^2 + 200x + 30\,000}{(x+100)^2}$$

$$\begin{aligned} 3. S(x) &= \frac{(x+100)(x+200) - 20\,000}{x+100} \\ &= x + 200 - \frac{20\,000}{x+100} \end{aligned}$$

4. Pour tout $x \in [100; +\infty[$, on pose

$$T(x) = \frac{x^2}{2} + 200x - 20\,000 \ln(x+100).$$

C. Étude de différentes situations

1. On résout l'inéquation :

$$\begin{aligned} S(x) \leq 900 &\Leftrightarrow x^2 - 60x - 90\,000 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 300 - 300\sqrt{2})(x - 300 + 300\sqrt{2}) \leq 0 \end{aligned}$$

On peut ainsi considérer que l'on peut acheter jusqu'à 724 kg de fruits.

2. On calcule la valeur moyenne de la fonction S :

$$\frac{1}{200} \int_{400}^{600} S(x) dx = \frac{1}{200} (T(600) - T(400)) = 700 + 100 \ln \left(\frac{5}{7} \right).$$

La somme moyenne est donc environ de 666 euros.

127. Travail de l'élève.

128. Travail de l'élève.

Exercices bilan

p. 262

129. Aire et intégrale

1. a) $f'(x) = 2ax + b + d(1-x)e^{-x}$

b) On a $f(0) = 0$ d'où $c = 0$.

Les données $f(1) = \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$; $f'(0) = 0$ et $f'(1) = 0$ nous

donnent ensuite $a = \frac{1}{2}$; $b = -1$ et $d = 1$.

2. a) On a $\int_{-1}^{1,59} xe^{-x} dx = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^{1,59} = \frac{2}{e} - 2,59e^{-1,59}$.

b) $A = 0,3 \times 2,59 - \int_{-1}^{1,59} f(x) dx \approx 1,23$

130. Suite et intégrale

1. a) Pour tout entier naturel n , la fonction f_n est continue et positive sur $[0; 1]$. Les valeurs u_1 , u_2 , u_3 sont respectivement les aires sous la courbe de f_1 , f_2 , f_3 entre 0 et 1.

b) L'aire sous la courbe semble de plus en plus en grande. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{t+1}{t+2} \left(e^{-\frac{t}{n+1}} - e^{-\frac{t}{n}} \right) dt.$$

Pour $t \in [0; 1]$, $-\frac{t}{n+1} > -\frac{t}{n} \Rightarrow e^{-\frac{t}{n+1}} > e^{-\frac{t}{n}}$.

Ainsi, par positivité de l'intégrale d'une fonction positive : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite (u_n) est croissante.

3. On a, pour $t \in [0; 1]$:

$$1 - \frac{1}{t+2} = \frac{t+2-1}{t+2} = \frac{t+1}{t+2}.$$

4. On peut alors déterminer une primitive de la fonction :

$$J = \int_0^1 \frac{t+1}{t+2} dt = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

5. Pour $t \in [0 ; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$e^{-\frac{1}{n}} \leq e^{-\frac{t}{n}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{t+1}{t+2} e^{-\frac{1}{n}} \leq f_n(t) \leq \frac{t+1}{t+2}$$

$$\Leftrightarrow J e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq J.$$

6. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$. Le théorème des gendarmes nous permet de conclure que la convergence (u_n) se fait vers $1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

131. Suite d'intégrales

1. a) La fonction $x \mapsto -x^2$ est décroissante sur $[0 ; 1]$. Ainsi, par composée de fonctions f est décroissante sur $[0 ; 1]$. Ainsi, pour $x \in [0 ; 1]$:

$$f(1) \leq f(x) \leq f(0)$$

d'où l'encadrement : $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.

b) En passant cet encadrement à l'intégrale :

$$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq 1.$$

2. On utilise une primitive usuelle ainsi :

$$u_1 = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} - \frac{e}{2}.$$

3. a) Pour tout $x \in [0 ; 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n f(x) \geq 0$. Ainsi, pour tout entier naturel, $u_n \geq 0$ comme intégrale d'une fonction positive.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^n (x-1) f(x) dx.$$

Or $x-1 \leq 0$ sur $[0 ; 1]$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout entier naturel et ainsi la suite est décroissante.

c) En tant que suite décroissante et minorée par 0, la suite (u_n) converge.

4. a) Pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$f(x) \leq 1 \Rightarrow x^n f(x) \leq x^n.$$

$$\text{Ainsi : } u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

b) Le théorème des gendarmes nous permet de conclure sur la convergence de la suite vers 0.

Préparer le BAC Je me teste

p. 264

132. B et D

133. A

134. B et D

135. A et C

136. A

137. B et D

138. c

139. c

140. c

Préparer le BAC Je révise

p. 265

141. Aire sous la courbe

$$1. F(x) = -e^{-kx}$$

$$2. A_{\text{OCB}} = \frac{1 \times k e^{-k}}{2}$$

$$\mathcal{A}_D = \int_0^1 f(x) dx - \mathcal{A}_{\text{OCB}} = -e^{-k} + 1 - \frac{k e^{-k}}{2}$$

$$3. -e^{-k} + 1 - \frac{k e^{-k}}{2} = k e^{-k} \text{ équivaut à}$$

$$\left(-\frac{3}{2}k - 1\right)e^{-k} + 1 = 0.$$

On étudie la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(k) = \left(-\frac{3}{2}k - 1\right)e^{-k} + 1.$$

$$g'(k) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}k e^{-k}. g \text{ admet un minimum en } k = \frac{1}{3}$$

et elle est continue et strictement croissante de

$\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[\text{ dans } \left]g\left(\frac{1}{3}\right); 1\right[. 0 \in]-1 ; 1[\text{ donc il admet un unique antécédent dans } \left[\frac{1}{3}; +\infty\right[.$

Sur $\left]0; \frac{1}{3}\right]$, la fonction g est strictement décroissante et continue de $\left]0; \frac{1}{3}\right]$ dans $\left]g\left(\frac{1}{3}\right); 0\right]$.
 0 n'appartient pas à ce dernier intervalle, il n'a pas d'antécédent par la fonction g sur $\left]0; \frac{1}{3}\right]$.

Ainsi, il existe une unique valeur de k strictement positive qui annule g et donc telle que l'aire de la surface $\mathcal{D}$ soit le double de celle du triangle OCB.

142. Bénéfice d'une entreprise

Vérifier que $f(1) = f(e^2) = 0$.

1. F est la primitive de f donc $F' = f$. f est positive sur $[1; 7,2]$, négative sinon donc F est croissante sur $[1; 7,2]$, décroissante sinon. C'est la courbe 2 qui correspond.

2. L'aire correspond à $F(7,2) - F(1)$ soit 12,5.

3. a) $(x \ln(x) - x)' = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$

b) $F(x) = -x^2 + (e^2 - 1)(x \ln(x) - x) + 2x$

c) $\frac{1}{e^2 - 1} \int_1^{e^2} f(x) dx = \frac{F(e^2) - F(1)}{e^2 - 1} = \frac{(e^2 - 2)(e^2 + 1)}{e^2 - 1}$

143. Aire entre deux courbes

1. $f(x) - g(x) = e^x(\sin(x) + 1)$ donc $f - g$ est positive sur $\mathbb{R}$ et la courbe de f est en dessous de la courbe de g .

2. a)

$$H'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{2} - \frac{\cos(x)}{2} \right) e^{-x} - \left(-\frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin(x)}{2} - 1 \right) e^{-x}$$

$$= (\sin(x) + 1) e^{-x}$$

b) $D = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx = H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$= -0,5 \left(e^{\frac{3\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}} \right) \text{ u.a.} \approx 55,55 \text{ u.a.}$$

1 u.a. = 4 cm² donc $D \approx 222 \text{ cm}^2$.

144. Suite d'intégrale

1. a) $f_1(x) = \ln(1+x)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$.

b) f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) $I_1 = \int_0^1 \ln(1+x) dx = [x \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$
 $= 2 \ln(2) - 1$

2. a) $0 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq \ln(1+x^n) \leq \ln(2)$ et $0 \leq I_n \leq \ln(2)$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \ln\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right) dx$

$0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ donc $0 < \frac{1+x^{n+1}}{1+x^n} \leq 1$ donc

$\ln\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right) < 0$ et $I_{n+1} - I_n < 0$.

La suite (I_n) est décroissante.

c) La suite (I_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente.

3. a) $g'(x) = \frac{-x}{1+x}$. g' est négative sur $\mathbb{R}_+$ donc g est

décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) $g(0) = 0$ et g est décroissante donc g est négative sur $\mathbb{R}_+$.

$x > 0$ donc $x^n > 0$. On en déduit $g(x^n) < 0$ et donc $\ln(1+x^n) \leq x^n$.

c) $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$ donc $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Par le théo-

rème des gendarmes, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

Exercices vers le supérieur

p. 266

145. Intégration par parties et linéarité

1. a) On travaille sur les fonctions avant de travailler sur les intégrales :

$$\frac{t^2}{\sqrt{t^2-3}} - \sqrt{t^2-3} = \frac{t^2}{\sqrt{t^2-3}} - \frac{t^2-3}{\sqrt{t^2-3}} = \frac{3}{\sqrt{t^2-3}}.$$

Ainsi

$$J - K = \int_2^3 \frac{t^2}{\sqrt{t^2-3}} dt - \int_2^3 \sqrt{t^2-3} dt$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{t^2}{\sqrt{t^2-3}} - \sqrt{t^2-3} \right) dt$$

$$= \int_2^3 \frac{3}{\sqrt{t^2-3}} dt = 3I.$$

b) La fonction $u : t \mapsto \sqrt{t^2 - 3}$ est dérivable sur $[2 ; 3]$ avec $u'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 3}}$. u' est donc continue

sur $[2 ; 3]$. On peut effectuer une intégration par parties sur K .

$$\begin{aligned} K &= \int_2^3 \sqrt{t^2 - 3} dt \\ &= \left[x\sqrt{x^2 - 3} \right]_2^3 - \int_2^3 \frac{t^2}{\sqrt{t^2 - 3}} dt = 3\sqrt{6} - 2 - J \end{aligned}$$

2. On considère $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 3})$.

a) La fonction $\ln(v)$ est dérivable à la condition où v est dérivable et ne s'annule pas. $v : x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 3}$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $[2 ; 3]$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. Ainsi f est dérivable sur $[2 ; 3]$ et l'on a :

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}}{x + \sqrt{x^2 - 3}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

b) La question précédente nous fournit une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2 - 3}}$.

Ainsi :

$$I = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t^2 - 3}} dt = f(3) - f(2) = \ln(3 + \sqrt{6}) - \ln(3).$$

3. On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} J - K = 3\ln\left(\frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) & (L1) \\ J + K = 3\sqrt{6} - 2 & (L2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} J = \frac{1}{2} \left(3\ln\left(\frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) + 3\sqrt{6} - 2 \right) & (L1) + (L2) \\ J + K = 3\sqrt{6} - 2 & (L2) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} J = \frac{1}{2} \left(3\ln\left(\frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) + 3\sqrt{6} - 2 \right) \\ K = -\frac{3}{2} \ln\left(\frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) + \frac{1}{2} (3\sqrt{6} - 2) \end{cases} \end{aligned}$$

146. Linéarité

1. On travaille, comme dans l'exercice précédent, sur les fonctions avant de travailler sur les intégrales :

$$\frac{t^2}{t^2 - 9} = \frac{t^2 - 9 + 9}{t^2 - 9} = 1 + \frac{9}{t^2 - 9}.$$

Ainsi on obtient, en intégrant sur $[0 ; 1]$:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{t^2}{t^2 - 9} dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{9}{t^2 - 9} \right) dt = 1 + 9 \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 9} dt \\ &= 1 + 9I. \end{aligned}$$

2. On considère $f : x \mapsto \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$.

a) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes. Il faut utiliser l'intervalle **[0 ; 1]**.

La fonction $\ln(v)$ est dérivable à la condition où v est dérivable et ne s'annule pas.

$v : x \mapsto \frac{3+x}{3-x}$ est dérivable comme quotient de

fonctions dérivables sur $[0 ; 1]$ avec un dénominateur qui ne s'annule pas, et ne s'annule pas sur cet intervalle.

Ainsi f est dérivable sur $[0 ; 1]$ et l'on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{9}{(3-x)^2}}{\frac{3+x}{3-x}} = \frac{9}{(3-x)(3+x)} = \frac{-9}{x^2 - 9}.$$

b) Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 9}$ est donnée par

$$x \mapsto -\frac{1}{9} f(x).$$

$$\text{Ainsi } I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 9} dt = -\frac{1}{9} (f(1) - f(0)) = -\frac{\ln(2)}{9}.$$

Finalement $J = 1 - \ln(2)$.

147. Fonctions rationnelles

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

a) On part du membre à identifier :

$$a + \frac{b}{x+1} = \frac{ax + a + b}{x+1}$$

Ainsi, par identification des numérateurs polynômes :

$$f(x) = a + \frac{b}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle est donc :

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$$

b) Cette décomposition nous permet, par linéarité de l'intégrale, d'effectuer le calcul suivant :

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = 1 - \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = 1 - \ln(2)$$

2. Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x(x+1)}$.

a) On part du membre à identifier :

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$$

Ainsi, par identification des numérateurs polynômes :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle est donc :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

b) Cette décomposition nous permet, par linéarité de l'intégrale, d'effectuer le calcul suivant.

$$\begin{aligned} \int_2^3 f(x) dx &= \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_2^3 \frac{1}{x} dx - \int_2^3 \frac{1}{x+1} dx \\ &= 2\ln(3) - \ln(8) \end{aligned}$$

3) C'est à nous de refaire la décomposition en éléments simples sans guide cette fois !

L'idée amorcée dans les deux dernières questions était de factoriser le dénominateur de la fonction afin de faire apparaître des termes polynomiaux de degré 1 qui seront nos éléments simples dans la décomposition.

On considère alors $h(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$.

Ainsi, on cherche deux réels a et b tels que

$$h(x) = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}. \text{ On a :}$$

$$\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} = \frac{(a-b)x + a+b}{(1-x)(1+x)}.$$

L'identification des coefficients des numérateurs nous donne le système :

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

Nous obtenons les valeurs $a = b = \frac{1}{2}$.

Finalement :

$$\begin{aligned} \int_2^3 h(x) dx &= \frac{1}{2} \left(\int_2^3 \frac{1}{1-x} dx + \int_2^3 \frac{1}{1+x} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[\ln|1-x| \right]_2^3 + \left[\ln|1+x| \right]_2^3 \right). \end{aligned}$$

On peut présenter les choses ainsi si l'on veut généraliser les primitives de fonctions inverses ou alors jouer avec les signes dans l'intégrale de départ.

$$\int_2^3 h(x) dx = \frac{1}{2} (\ln(4) - \ln(3) + \ln(2)) = \ln \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)$$

148. Dérivée d'une fonction intégrale

Soit la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

1. On découpe l'intégrale en passant par 1 en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt &= \int_x^1 \frac{\cos(t)}{t} dt + \int_1^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt \\ &= F(2x) - F(x). \end{aligned}$$

2. D'après le théorème d'existence d'une primitive, la fonction F est dérivable et sa dérivée est donnée par $F'(x) = \frac{\cos(x)}{x} - \cos(1)$. De plus, la fonction $x \mapsto F(2x)$ est la composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{\cos(2x)}{2x} - \frac{\cos(x)}{x}.$$

149. Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

$$F : x \mapsto \int_0^x e^{-t} \ln(1 + e^t) dt.$$

1. a) On a, pour tout réel t :

$$\frac{1}{1+e^t} = \frac{1+e^t - e^t}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}.$$

b) Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt &= \int_0^x \left(1 - \frac{e^t}{1+e^t}\right) dt = x - \int_0^x \frac{e^t}{1+e^t} dt \\ &= x + \ln(2) - \ln(1 + e^x) \end{aligned}$$

2. La fonction $f : t \mapsto e^{-t} \ln(1 + e^t)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème d'existence d'une primitive, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = e^{-x} \ln(1 + e^x) - \ln(2) = f(x) - \ln(2).$$

La fonction dérivée est donc bien continue sur $\mathbb{R}$.

3. On est confronté à l'intégrale d'un produit de fonctions dérivables à dérivées continues. On peut donc effectuer une intégration par parties, en intégrant le terme exponentiel et en dérivant le terme logarithmique.

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t} \ln(1 + e^t) dt &= \left[-e^{-t} \ln(1 + e^t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+e^t} dt \\ &= \ln(2) - e^{-x} \ln(1 + e^x) + \int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt \\ &= -e^{-x} \ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^x) + x + 2\ln(2) \end{aligned}$$

On a de plus :

$$-\ln(1 + e^x) + x = -\ln(1 + e^x) + \ln(e^x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right).$$

$$\text{Finalement : } F(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) - f(x) + 2\ln(2).$$

4. On détermine les limites de chaque terme.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

par limite de composée de fonctions continues.

Concernant la fonction f , si l'on factorise :

$$f(x) = xe^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^{-x})$$

Ainsi, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ par croissances comparées et

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) &= 0 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

par produit de limites,

on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par somme de limites.

Finalement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 2\ln(2)$.

Reste à étudier $F(x) - x$ en $-\infty$:

$$F(x) - x = -(e^{-x} + 1)\ln(1 + e^x) + 2\ln(2)$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 1)\ln(1 + e^x) = 0$.

Ainsi, la droite d'équation $y = x - 2\ln(2)$ est asymptote oblique à la courbe en $-\infty$ et la droite $y = 2\ln(2)$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

150. Suite et aire

1. Soit $g : x \mapsto 1 - x + 2\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) g est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$g'(x) = \frac{-x+2}{x}.$$

Sur $]0 ; 2]$, g' est positive donc g est croissante.

Sur $]2 ; +\infty[$, g' est négative donc g est décroissante.

b) On commence par travailler sur $]0 ; 2]$. La fonction g est continue et strictement croissante sur cet intervalle. De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $g(2) = -1 + 2\ln(2)$. Comme $0 \in]-\infty ; -1 + 2\ln(2)]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (version strictement monotone), il existe une unique solution sur $]0 ; 2[$ à l'équation $g(x) = 0$.

On rédige de la même manière sur $]2 ; 4[$ avec $g(2) > 0$ et $g(4) < 0$; g est décroissante sur cet intervalle et le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone nous donne une unique solution α à l'équation $g(x) = 0$ sur $]2 ; 4[$.

2. a) Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1+2\ln(x)}{x^2} - \frac{x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

b) D'après la question 1, $g(x) \leq 0$ pour $x \geq 4$ donc

$$f(x) - \frac{1}{x} \leq 0. \text{ La stricte positivité de } f \text{ est immédiate.}$$

D'où l'encadrement, pour $x \geq 4$:

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

3. L'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ correspond à l'aire de la surface sous la courbe représentative de f fonction positive, entre 1 et α . Ainsi :

$$A(\alpha) = \int_1^{\alpha} f(t) dt = \int_1^{\alpha} \frac{1+2\ln(t)}{t^2} dt$$

$$= \int_1^{\alpha} \frac{1}{t^2} \times (1+2\ln(t)) dt.$$

L'intégrale opère sur un produit de fonctions dérivables, de dérivées continues sur $[1; \alpha]$. On peut donc effectuer une intégration par parties, cela en intégrant le terme inverse et en dérivant le terme logarithmique.

$$\int_1^{\alpha} \frac{1}{t^2} \times (1+2\ln(t)) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{x} \times (1+2\ln(x)) \right]_1^{\alpha} + \int_1^{\alpha} \frac{2}{t^2} dt$$

$$= -\frac{1-\alpha+2\ln(\alpha)}{\alpha} + 2 - \frac{2}{\alpha}$$

$$= 2 - \frac{2}{\alpha'}$$

sachant que $g(\alpha) = 0$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

a) Pour $x \geq 4$, $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$

en intégrant sur $[n; n+1]$, pour $n \geq 4$:

$$0 < \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

$$\text{or } \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln \frac{n+1}{n} \text{ d'où l'encadrement}$$

$$0 < I_n \leq \ln \left(\frac{n+1}{n} \right).$$

b) Tout d'abord, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = 0 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = 0 \end{array} \right.$$

par limite de composées.

Le théorème d'encadrement nous permet de conclure quant à la convergence de (I_n) avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

c) On note $S_n = \sum_{k=1}^n I_k$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} f(x) dx$$

$$= -\frac{n+2\ln(n+1)}{n+1} + 2 - \frac{2}{n+1}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(n+1)}{n+1} = 0 \text{ par}$$

croissances comparées. Au final $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

151. Encadrer une intégrale

Soit $f : t \mapsto \frac{e^{-t}}{1-t}$ définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

1. Ici, il est simple d'étudier la fonction sur l'intervalle. f est dérivable avec $f'(t) = \frac{te^{-t}}{(1-t)^2}$ qui est un produit et quotient de termes positifs sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Ainsi, f est croissante sur cet intervalle et on obtient l'encadrement :

$$f(0) \leq f(t) \leq f\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{D'où } 1 \leq f(t) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} \text{ pour } t \in \left[0; \frac{1}{2}\right].$$

2. a) On réduit l'expression :

$$(1+x)e^{-x} + x^2 f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

b) On est confronté à l'intégrale d'un produit de deux fonctions : une fonction polynomiale et une fonction exponentielle ; toutes deux dérivables et de dérivées continues. Une intégration par parties, afin de faire baisser le degré du polynôme, est donc envisageable :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (1+t)e^{-t} dt = \left[-(1+t)e^{-t} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt = -\frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 2.$$

3. [ERRATUM] Les questions 3 et 4 ont été inversées à partir de la deuxième édition du manuel. La correction ci-dessous correspond à l'encadre-

ment de $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$.

De la question 1 on obtient, en intégrant l'encadrement sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$:

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

4. [ERRATUM] Les questions 3 et 4 ont été inversées à partir de la deuxième édition du manuel. La correction ci-dessous correspond à l'encadrement de $\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 f(t) dt$.

On a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt - \int_0^{\frac{1}{2}} (1+t)e^{-t} dt.$$

D'où :

$$\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 f(t) dt \leq \frac{7}{2}e^{-\frac{1}{2}} - 2.$$

152. Une suite définie par une intégrale

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^n \frac{e^{-t}}{1+t} dt$.

1. Si $t \geq 0$, $\ln(1+t) \geq 0$ et une fonction exponentielle est strictement positive. Ainsi la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t}{n}} \ln(1+t)$ est positive donc son intégrale sur $[0; n]$ est positive.

2. u_n est l'intégrale d'un produit de deux fonctions dérivables à dérivées continues, on peut alors effectuer une intégration par parties. La question précédente suggère de dériver la partie exponentielle et d'intégrer la partie inverse pour faire apparaître une fonction $\ln$.

$$\begin{aligned} \int_0^n \frac{e^{-\frac{t}{n}}}{1+t} dt &= \left[e^{-\frac{t}{n}} \ln(1+t) \right]_0^n + \frac{1}{n} \int_0^n e^{-\frac{t}{n}} \ln(1+t) dt \\ &= \frac{1}{e} \ln(n+1) + \frac{1}{n} \int_0^n e^{-\frac{t}{n}} \ln(1+t) dt \end{aligned}$$

D'après la question 1.

$$\frac{1}{n} \int_0^n e^{-\frac{t}{n}} \ln(1+t) dt \geq 0 \text{ d'où l'inégalité :}$$

$$u_n \leq \frac{1}{e} \ln(n+1).$$

3. On a d'une part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ et d'autre part l'inégalité précédente donc d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

153. Convergence d'une suite

1. Pour se faire une idée de la manière de procéder, regardons le terme central de l'encadrement demandé :

$$\ln(n!) = \ln(2 \times 3 \times \dots \times n) = \sum_{k=1}^n \ln(k) = \sum_{k=2}^n \ln(k).$$

Travaillons alors sur un indice k avant d'effectuer une somme. On a, par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \ln(t) dt = \int_1^{n+1} \ln(t) dt.$$

La fonction $\ln$ étant croissante, on a, pour tout $t \in [k; k+1]$:

$$\begin{aligned} \ln(k) &\leq \ln(t) \Leftrightarrow \int_k^{k+1} \ln(k) dt \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt \\ &\Leftrightarrow \ln(k) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt \end{aligned}$$

On somme alors l'inégalité pour $k \in \{1; \dots; n\}$.

$$\sum_{k=1}^n \ln(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \ln(t) dt$$

$$\text{D'où : } \ln(n!) \leq \int_1^{n+1} \ln(t) dt.$$

On raisonne de la même manière pour le deuxième morceau : on a, pour tout $t \in [k-1; k]$,

$$\ln(t) \leq \ln(k) \Leftrightarrow \int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \ln(k)$$

On somme alors l'inégalité pour $k \in \{2; \dots; n\}$.

$$\sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(t) dt \leq \sum_{k=2}^n \ln(k)$$

$$\text{D'où } \int_1^n \ln(t) dt \leq \ln(n!).$$

2. Commençons par noter que $\ln(n^n) = n\ln(n)$.

Ensuite, on a eu l'occasion de la calculer plus d'une fois dans ce chapitre, une primitive de la fonction $\ln$ est connue.

$$\text{D'où } \int_1^n \ln(t) dt = n\ln(n) - n + 1$$

$$\text{et } \int_1^{n+1} \ln(t) dt = (n+1)\ln(n+1) - n.$$

$$\text{Ainsi } \frac{\int_1^n \ln(t) dt}{n \ln(n)} = 1 - \frac{n+1}{n \ln(n)} = 1 - \frac{1 + \frac{1}{n}}{\ln(n)}.$$

On détermine alors la limite de cette suite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) = +\infty.$$

$$\text{Par quotient de limite, on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\ln(n)} = 0.$$

$$\text{De même, on a } \frac{\int_1^{n+1} \ln(t) dt}{n \ln(n)} = \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)}.$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln(n)} = 1.$$

On conclut finalement l'exercice par le théorème d'encadrement pour obtenir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n!)}{\ln(n^n)} = 1.$$

154. Dérivées

$$\text{On pose } g(x) = \int_{x+a}^{x+b} f(t) \cos(t-x) dt, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

1. Attention, la variable de dérivabilité est à l'intérieur de l'intégrale, on ne peut pas appliquer directement le théorème fondamental. On commence par utiliser les formules de sommation des fonctions trigonométriques :

$$g(x) = \cos(x) \int_{x+a}^{x+b} f(t) \cos(t) dt + \sin(x) \int_{x+a}^{x+b} f(t) \sin(t) dt$$

Les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(t)$ et $t \mapsto f(t)\sin(t)$ sont continues, d'après le théorème fondamental, les

$$\text{fonctions } x \mapsto \int_{x+a}^{x+b} f(t) \cos(t) dt \text{ et } x \mapsto \int_{x+a}^{x+b} f(t) \sin(t) dt$$

sont dérivables.

g est alors dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables.

Enfin, nous obtenons :

$$g'(x) = - \int_{x+a}^{x+b} f(t) \sin(t-x) dt + f(x+a) \cos(a) - f(x+b) \cos(b).$$

2. L'hypothèse de continuité de la dérivée nous suggère l'utilisation d'une intégration par parties dans l'intégrale présente dans la dérivée. Les hypothèses sont bien vérifiées et l'on a :

$$g'(x) = \int_{x+a}^{x+b} f'(t) \cos(t-x) dt.$$

155. Étude de la fonction cosh

$$\text{On pose } \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

1. La fonction cosh est dérivable de dérivée continue comme somme de fonctions dérivables de dérivées continues. Commençons, pour voir comment avancer, par calculer la dérivée de cette fonction puis sa dérivée seconde :

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$\cosh''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$\text{Partons alors de l'intégrale } \int_0^x (x-t) \cosh(t) dt$$

afin de dériver la partie polynomiale et intégrer le cosinus hyperbolique :

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t) \cosh(t) dt &= \left[(x-t) \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right]_0^x + \int_0^x \frac{e^t - e^{-t}}{2} dt \\ &= \left[\cosh(t) \right]_0^x = \cosh(x) - \cosh(0). \end{aligned}$$

$$\text{Or } \frac{e^0 + e^0}{2} = 1 \text{ d'où } \cosh(x) = 1 + \int_0^x (x-t) \cosh(t) dt.$$

2. [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée sur les éditions suivantes, le résultat à démontrer est bien :

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \cosh(t) dt.$$

On mène cette fois une double intégration par parties sur le terme $\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \cosh(t) dt$. On obtient ainsi :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \cosh(t) dt = -\frac{x^2}{2} - 1 + \cosh(x).$$

D'où le résultat.

156. Suite récurrente

La relation entre I_p et I_{p+1} est déterminée par une intégration par parties. On intègre un produit de fonctions polynomiales, donc dérivables et de dérivées continues. L'idée est de faire monter le degré de l'un et de baisser l'autre ce qui se fait naturellement dans une intégration par parties.

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^1 x^p (1-x)^{n-p} dx \\ &= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} (1-x)^{n-p} \right]_0^1 + \frac{(n-p)}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{n-p-1} dx \\ &= \frac{-1}{p+1} + \frac{(n-p)}{p+1} I_{p+1}. \end{aligned}$$

157. Constante d'Euler

1. On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Si $k \leq x \leq k+1$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ on obtient

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

b) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions

suivantes : on calcule $\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$.

Commençons par calculer la partie intégrale du terme :

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx &= [\ln(t)]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k). \\ \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx &= \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \ln(n) - \ln(1) = \ln(n). \end{aligned}$$

Voici un exemple classique de somme télescopique.

c) [ERRATUM] La première édition du manuel comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes : on montre

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

On reprend l'encadrement du a) et l'on l'intègre sur $[k; k+1]$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

Puis l'on somme pour $k \in \{1; \dots; n-1\}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

2. On pose $u_n = S_n - \ln(n)$.

a) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \geq 0$ d'après la question précédente.

On a aussi $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \ln(n) \leq 0$.

Reprenons la somme $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

De plus :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - 1$$

Ainsi, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - 1 - \ln(n) \leq 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \leq 1$.

D'où l'encadrement $0 \leq u_n \leq 1$.

b) Plusieurs manières de démontrer ce résultat. Si les élèves sont rassuré·e·s dans l'idée d'une étude de fonction ; il est plus pratique d'utiliser la concavité de la fonction $\ln$. On vérifie aisément que la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0. Cette fonction étant concave, elle est en dessous de toutes ses tangentes. D'où le résultat.

$$\begin{aligned} \text{c) } u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Or pour $X > 0$, $\ln(1-X) < \ln(1+X) \leq X$, d'après la question précédente.

Ainsi $u_n - u_{n-1} < 0$ et la suite (u_n) est ainsi décroissante.

d) La suite (u_n) est décroissante et minorée donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite $0 \leq \gamma \leq 1$.

e) En utilisant un tableur, la calculatrice ou un programme, on obtient $\gamma \approx 0,577$.

158. Intégrale impropre

On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. a) On a, pour $n > 1$:

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx = \left[2\sqrt{x} \right]_{\frac{1}{n}}^1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 2$$

La fonction f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ l'intégrale impropre sur le semi-ouvert $]0 ; 1]$ correspond à l'aire de la surface sous la courbe sur cet intervalle. La convergence de cette aire signifie que la surface que l'on rajoute en se rapprochant de 0 finit par être négligeable.

$$\text{2. a) } \int_1^n f(x) dx = \left[2\sqrt{x} \right]_1^n = 2\sqrt{n} - 2$$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx = +\infty$ ainsi l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ n'est pas définie. La surface ajoutée plus on s'approche de $+\infty$ est non négligeable et l'aire grandit infiniment.

3. a) On calcule tout d'abord, pour $n > 0$

$$\int_0^n e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^n = 1 - e^{-n}.$$

$$\text{Alors, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-x} dx = 1.$$

L'intégrale impropre est bien définie et on écrit

$$\text{alors } \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

b) On calcule tout d'abord, pour $n > 0$,

$$\int_{-n}^0 \frac{e^x}{\sqrt{e^x}} dx = \left[2\sqrt{e^x} \right]_{-n}^0 = 2 - \sqrt{e^{-n}} \text{ alors :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^0 \frac{e^x}{\sqrt{e^x}} dx = 2$$

L'intégrale impropre est bien définie et on écrit

$$\text{alors } \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{\sqrt{e^x}} dx = 2.$$

c) On calcule tout d'abord, pour $n > 0$,

$$\int_0^n \frac{x}{x^2 + 1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]_0^n$$

$$= \frac{1}{2} \ln(n^2 + 1).$$

$$\text{Alors, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{x}{x^2 + 1} dx = +\infty.$$

L'intégrale impropre n'est donc pas définie et on ne peut pas écrire $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$.

159. Irrationalité de e

On pose $I_n = \int_0^1 t^n e^{1-t} dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer un encadrement d'une intégrale, c'est intégrer un encadrement de fonctions.

Notons f la fonction définie par $f(x) = e^{1-x}$ pour $x \in [0 ; 1]$. f est dérivable avec $f'(x) = -e^{1-x} < 0$. f est donc décroissante sur $[0 ; 1]$ d'où, pour tout $x \in [0 ; 1]$ l'encadrement :

$$f(1) \leq f(x) \leq f(0)$$

et ainsi $1 \leq f(x) \leq e$.

De cela on obtient, pour tout $x \in [0 ; 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $x^n \leq x^n f(x) \leq ex^n$.

On intègre alors l'encadrement sur $[0 ; 1]$:

$$\int_0^1 t^n dt \leq \int_0^1 t^n e^{1-t} dt \leq \int_0^1 et^n dt$$

$$\text{or } \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

2. Une relation de récurrence avec des intégrales suggère une intégration par parties. On souhaite faire baisser le degré de la partie polynomiale, on va donc la dériver et intégrer la partie exponentielle. Les fonctions sont toutes les deux dérivables de dérivées continues, cette intégration par parties est donc réalisable. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{n+1} e^{1-t} dt &= \left[-e^{1-t} t^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 (n+1) t^n e^{1-t} dt \\ &= -1 + (n+1) \int_0^1 t^n e^{1-t} dt \end{aligned}$$

On obtient donc la relation de récurrence recherchée, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} = -1 + (n+1) I_n.$$

3. On pose $J_n = e \times n! - I_n$.

a) Le point précédent nous fournit une relation de récurrence sur I_n , on peut alors obtenir une relation de récurrence sur J_n : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= e \times (n+1)! - I_{n+1} \\ &= (n+1)(e \times n! - I_n) + 1 \\ &= (n+1)J_n + 1. \end{aligned}$$

On multiplie les termes par des entiers étapes par étapes, pourquoi ne pas se lancer dans un raisonnement par récurrence ?

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que J_n est un entier naturel.

Initialisation : pour $n = 0$,

$$J_0 = e \times 0! - I_0 = e - \int_0^1 e^{1-t} dt = 1.$$

Ainsi, $J_0 \in \mathbb{N}$.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier naturel $n > 0$ tel que J_n soit entier.

$$J_{n+1} = (n+1)J_n + 1.$$

Par hypothèse de récurrence, J_n est entier donc J_{n+1} , comme produit et somme d'entiers, est un entier naturel.

Conclusion : on a $J_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout entier naturel n , si l'on suppose J_n entier alors J_{n+1} est un entier. Ainsi, par raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ J_n est un entier naturel.

b) Si $n \geq 2$, alors $0 < \frac{1}{n+1} < 1$ et $0 < \frac{e}{n+1} < 1$. Ainsi, d'après la première question, $0 < I_n < 1$. I_n n'est donc pas un entier pour $n \geq 2$.

c) On a $I_n = e \times n! - J_n$. Si $e \times n!$ était un entier, alors, comme $J_n \in \mathbb{N}$, I_n est un entier. Mais ceci contredirait la question précédente, donc $e \times n!$ n'est pas entier.

4. Effectuons un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe p et q premiers entre eux tels que $e = \frac{p}{q}$. Considérons alors, pour

$n \geq 2e \times n! = \frac{p}{q} \times n!$ et choisissons un tel n supérieur à q . On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} \times n! &= \frac{p}{q} \times 1 \times 2 \times \dots \times (q-1) \times q \times (q+1) \times \dots \times n \\ &= p \times 1 \times 2 \times \dots \times (q-1) \times (q+1) \times \dots \times n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ainsi pour $n \geq q$, $e \times n!$ est un entier ; ce qui est absurde d'après la question précédente.

e est donc irrationnel.

Lemme pour les exercices 160 et 161

On démontre un résultat fondamental qui aurait sa place dans le cours.

Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a ; b]$. On a :

$$\int_a^b f(t) dt = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0, t \in [a ; b].$$

Considérons la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$. D'après

le théorème d'existence d'une primitive, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$. Par hypothèse, on a

(i) f est positive sur $[a ; b]$;

(ii) $F(b) = 0$.

De (i), on tire $\int_a^x f(t) dt \geq 0$, donc F est positive $[a ; b]$.

De plus on tire que F est croissante sur $[a ; b]$. Ainsi, pour $x \in [a ; b]$, $F(x) \leq F(b)$.

De (ii), on tire $F(x) = 0$ pour $x \in [a ; b]$. On obtient $F'(x) = f(x) = 0$ pour $x \in [a ; b]$.

160. Valeur moyenne

La fonction f est continue sur le segment $[a ; b]$. Les hypothèses sont sur les valeurs moyennes de la fonction sur ce segment et de sa fonction carrée. On considère l'intégrale de la fonction g .

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b (1 - f(x))^2 dx \\ &= \int_a^b (1 - 2f(x) + f^2(x)) dx \\ &= \int_a^b dx - 2 \int_a^b f(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx \end{aligned}$$

On a alors par hypothèse $\int_a^b g(x) dx = 0$. De plus, la fonction g est positive et continue sur $[a ; b]$. Donc $g(x) = 0$ pour tout $x \in [a ; b]$. Ainsi $f(x) = 1$ pour tout $x \in [a ; b]$.

161. Égalités en puissances

La fonction f est continue sur le segment $[a ; b]$. Les hypothèses font intervenir des résultats sur trois puissances successives de cette fonction. L'idée est de penser de quelle manière l'on peut introduire ensemble ces trois puissances.

La question suggère alors de développer :

$(f^2 - f)^2 = f^4 - 2f^3 + f^2$. Utilisons alors la linéarité de l'intégrale afin de voir ce que les hypothèses vont impliquer :

$$\int_a^b (f^2(t) - f(t))^2 dt = \int_a^b f^4(t) dt - 2 \int_a^b f^3(t) dt + \int_a^b f^2(t) dt.$$

Les intégrales qui interviennent alors sont toutes égales par hypothèse, ainsi

$$\int_a^b (f^2(t) - f(t))^2 dt = 0.$$

Or, la fonction $t \mapsto (f^2(t) - f(t))^2$ est positive et continue, son intégrale sur $[a ; b]$ étant nulle, cela signifie que la fonction est nulle.

Pour tout $t \in [a ; b]$:

$$f^2(t) - f(t) = f(t)(f(t) - 1) = 0.$$

Ce produit nul est équivalent à l'un des deux facteurs nuls. Ainsi, pour $t \in [a ; b]$:

$$f(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 1.$$

Mais là n'est pas la fin car cela ne fournit pas directement la réponse et la constance de la fonction.

La fonction f est continue donc elle ne peut être constante par morceaux. C'est donc que f est constante sur $[a ; b]$, soit nulle, soit égale à 1.

162. Lemme de Riemann-Lebesgue

1. La fonction f est dérivable, de dérivée continue et $\sin$ est une fonction circulaire donc infiniment dérivable. On peut alors considérer le calcul de

$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt &= \left[-\frac{1}{n} f(t) \cos(nt) \right]_a^b - \int_a^b \left(-\frac{1}{n} \right) f'(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{f(a) \cos(na) - f(b) \cos(nb)}{n} + \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt. \end{aligned}$$

On pose alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{f(a) \cos(na) - f(b) \cos(nb)}{n}.$$

2. a) f' est continue sur un segment, elle est donc bornée et atteint ses bornes d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a ; b]$, $|f'(x)| < M$.

b) Nous obtenons alors, par inégalité triangulaire:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt \right| &\leq \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t) \cos(nt)| dt \\ &= \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t)| |\cos(nt)| dt \leq \frac{1}{n} \int_a^b M \times 1 dt. \end{aligned}$$

On utilise dans la dernière ligne la majoration usuelle d'une fonction cosinus ainsi que la majoration de la question précédente. Or,

$$\int_a^b M \times 1 dt = M(b - a).$$

Finalement, nous obtenons :

$$\left| \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \cos(nt) dt \right| \leq \frac{M(b - a)}{n}.$$

3. Commençons par démontrer la convergence de la suite (u_n) . $u_n = (f(a) \cos(na) - f(b) \cos(nb)) \times \frac{1}{n}$ est

un produit d'un terme borné par un terme qui tend vers 0. Ainsi par produit de limites, (u_n) converge vers 0.

De même, la suite de terme général $\frac{M(b - a)}{n}$ converge vers 0.

On démontre ensuite que la suite de terme général

$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt$ converge vers 0. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| \leq u_n + \frac{M(b - a)}{n}$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_a^b f(t) \sin(nt) dt \right| = 0$$

On en déduit ensuite le résultat.

163. Série harmonique

On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. a) Si $k \leq x \leq k + 1$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0 ; +\infty[$ on obtient $0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

d'où, en intégrant sur $[k ; k + 1]$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$$

b) On somme l'inégalité précédente pour $k \in \{1; \dots; n\}$:

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

d'où $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq H_n$.

c) On commence par calculer le membre de gauche :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

Ensuite, on précise sa limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$$

Finalement, d'après le théorème de comparaison, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty$.

2. a) Si $k-1 \leq x \leq k$, pour $2 \leq k$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$ on obtient $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$ d'où, en intégrant sur $[k-1; k]$:

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$$

b) On somme l'inégalité précédente pour $k \in \{2; \dots; n\}$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$$

d'où $H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx$.

c) On a :

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln(n)$$

3. [ERRATUM] La première édition comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes, on cherche bien

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n).$$

On obtient alors $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n)$.

4. On complète le programme et on calcule les valeurs.

```
import math
def H(n) :
    s=0
    for i in range(1, n+1) :
        s=s+1/i
    return s
def U(n) :
    return H(n) - math.log(n)
print (H(2))
print (U(100))
print (U(1000))
print (U(10000))
```

La suite semble converger vers une valeur dont une approximation peut être donnée par 0,577.

164. Intégrale de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

1. Les premiers calculs sont directs :

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2};$$

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

2. a) [ERRATUM] Une erreur a été imprimée sur la première édition du manuel, corrigée dans les éditions suivantes. On cherche bien à montrer

$$\text{que : } W_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t) \cos^2(t) dt.$$

Si $n > 1$, on peut écrire

$\sin^n(t) = \sin^{n-1}(t) \sin(t)$ ce qui permet de considérer W_n comme intégrale d'un produit de fonctions infiniment dérivables. On peut donc effectuer une intégration par parties.

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(t) \sin(t) dt \\ &= \left[-\sin^{n-1}(t) \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t) \cos^2(t) dt \end{aligned}$$

Or $\left[-\sin^{n-1}(t) \cos(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$, d'où le résultat.

b) Une égalité trigonométrique classique nous donne :

$$\begin{aligned} (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t) \cos^2(t) dt &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t) (1 - \sin^2(t)) dt \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t) dt - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$W_n = (n-1)W_{n-2} - (n-1)W_n$$

et on en déduit la relation de récurrence.

3. La démonstration par récurrence utilisera la relation démontrée précédemment. On mènera les deux démonstrations dans une unique récurrence.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}; W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Initialisation : pour $n = 0$, on a :

$$W_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{2^0(0!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = 1 = \frac{2^0(0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!}$$

Hérédité : supposons qu'il existe un entier n pour lequel les deux égalités soient vraies. On a alors, par la relation de récurrence :

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

par hypothèse de récurrence. Or

$$\frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \times \frac{2n+2}{2n+2}$$

$$= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2}.$$

On obtient donc la première égalité vraie au rang $n+1$. Ensuite :

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1}$$

$$= \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!},$$

ce qui correspond à la deuxième égalité vraie au rang $n+1$.

Conclusion : les deux égalités sont vraies au rang $n=0$; de plus, si on les suppose vraies à un certain rang quelconque, elles le restent au rang suivant. Ainsi par raisonnement par récurrence elles sont vraies pour tout entier naturel.

165. Développement en série de l'exponentielle

1. Pour $x > 0$, on note :

$$f_n(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} e^t, t \in [0; x].$$

a) La fonction exponentielle est croissante sur $[0; x]$ donc pour $t \leq x$, $e^t \leq e^x$. Ainsi, pour $t \in [0; x]$:

$$\frac{(x-t)^n}{n!} e^t \leq \frac{(x-t)^n}{n!} e^x.$$

De plus $x-t \geq 0$, finalement on a

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{(x-t)^n}{n!} e^x, t \in [0; x].$$

b) On intègre sur $[0; x]$ l'inégalité précédente :

$$\int_0^x f_n(t) dt \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^x dt.$$

Calculons alors le membre de droite sans oublier que l'on intègre par rapport à t .

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^x dt = \frac{e^x}{n!} \int_0^x (x-t)^n dt$$

$$= \frac{e^x}{n!} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x$$

$$= \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}.$$

$$\text{On obtient } \int_0^x f_n(t) dt \leq \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}.$$

c) Il s'agit de déterminer tout d'abord la limite de la suite de terme général $\frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}$. Ce résultat est un résultat de croissance de la puissance comparée au factoriel. Rappelons ici une manière de procéder en considérant la suite définie par :

$$u_n = \frac{x^n}{n!}, x > 0.$$

On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$ qui converge vers 0. Ainsi,

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \varepsilon$. Choisissons alors un

$\varepsilon \in]0; 1[$. Un raisonnement par récurrence nous donne alors $u_n < \varepsilon^{n-N} u_N$ le terme de droite tend vers 0 donc, d'après le théorème d'encadrement, avec $0 < u_n < \varepsilon^{n-N} u_N$, (u_n) converge vers 0.

Revenons alors à l'objet de la question. La suite de

terme général $\frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!} = u_n e^x$ converge vers 0, donc

d'après le théorème d'encadrement sur

$$0 \leq \int_0^x f_n(t) dt \leq \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}, \text{ on obtient } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x f_n(t) dt = 0.$$

2. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Initialisation : pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^0 \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} e^t dt = \int_0^x e^t dt = e^x.$$

Hérédité : supposons qu'il existe un entier n pour lequel l'égalité est vraie. Considérons alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \right]_0^x \\ &\quad + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = e^x, \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence.

Conclusion : l'égalité est vraie pour $n = 0$ et pour tout entier naturel n , si on la suppose vraie au rang n alors elle est vraie au rang suivant. Ainsi, par raisonnement par récurrence, l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. D'après la première question, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = 0.$$

$$\text{Ainsi, } e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

166. Suite d'intégrales

On pose $f(x) = (2x^3 - 4x^2)e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Rappelons le théorème des croissances comparées : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x} - 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$$

par linéarité des limites.

Ensuite, il suffit d'effectuer un produit de limites infinies avec règles des signes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = -\infty.$$

2. La fonction f est dérivable comme produit de fonction polynomiale avec une fonction exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$f'(x) = -2x(x^2 - 5x + 4)e^{-x}.$$

3. On continue la factorisation amorcée de $f'(x)$ afin de déterminer son signe :

$$f'(x) = -2x(x-1)(x-4)e^{-x}.$$

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+	-
f	$-\infty$				0

4. On pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$. Calculons I_1 à l'aide d'une intégration par parties, on intègre un produit de fonctions infiniment dérivables :

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -\frac{2}{e} + 1.$$

5. Une intégration par parties sur I_n permet d'obtenir la relation de récurrence, en faisant baisser le degré du monôme :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n e^{-x} dx = \left[-x^n e^{-x} \right]_0^1 + n \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + n I_{n-1}. \end{aligned}$$

6. La relation de récurrence permet ainsi d'obtenir $I_2 = -\frac{5}{e} + 2$; $I_3 = -\frac{16}{e} + 6$.

7. Sur l'intervalle $[0 ; 1]$, la fonction f est positive. Ainsi, l'aire de la surface du plan sous la courbe représentative de f entre 0 et 1 correspond à l'intégrale :

$$\int_0^1 f(x) dx = 2I_3 - 4I_2$$

par linéarité de l'intégrale.

L'aire est donnée par $-\frac{12}{e} + 4 \text{ cm}^2$.

167. Placements avec taux d'intérêt instantané variable

A. Somme de départ

On s'intéresse au système différentiel $\begin{cases} y'(t) = i(t)y(t) \\ y(0) = S_0 \end{cases}$

1. Si $i(t) = b$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, alors les solutions de l'équation différentielle homogène $y'(t) = by(t)$ sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{bt}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On détermine

cette constante avec la condition initiale. Finalement, $S(t) = S_0 e^{bt}$.

2. a) D'après le théorème d'existence d'une primitive, on a $I(t) = \int_0^t i(x) dx$. De plus I est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

b) [ERRATUM] La première édition comporte une erreur. La fonction ϕ est bien définie par :

$$\phi(t) = e^{-I(t)} S(t).$$

On pose $\phi(t) = e^{-I(t)} S(t)$. La fonction $t \mapsto e^{-I(t)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables. Par hypothèse, la fonction S est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ donc, par produit de fonctions dérivables, la fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

On a :

$$\phi'(t) = e^{-I(t)} \{-I'(t)S(t) + S'(t)\}.$$

$$\text{Or, } I'(t) = i(t) \text{ et } S'(t) = i(t)S(t).$$

Ainsi $\phi'(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et la fonction ϕ est constante, égale à $\phi(0) = S_0$ sur $\mathbb{R}_+$.

Finalement $S(t) = S_0 e^{I(t)}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

B Application numérique

On pose $i(t) = b(1 + a \sin(t)e^{-t})$.

1. Pour calculer cette intégrale de produit de fonctions infiniment dérivables, on va effectuer deux intégrations par parties pour utiliser le caractère cyclique de la dérivée des fonctions circulaires :

$$\begin{aligned} \int_0^t \sin(x)e^{-x} dx &= \left[-\sin(x)e^{-x} \right]_0^t + \int_0^t \cos(x)e^{-x} dx \\ &= \left[-\sin(x)e^{-x} \right]_0^t + \left[-\cos(x)e^{-x} \right]_0^t - \int_0^t \sin(x)e^{-x} dx \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\int_0^t \sin(x)e^{-x} dx = -\frac{e^{-t}}{2}(\cos(t) + \sin(t)) + \frac{1}{2}$$

2. D'après la partie précédente, on a

$$S(t) = S_0 e^{I(t)},$$

$$\text{avec } I(t) = -\frac{ae^{-t}}{2}(\cos(t) + \sin(t)) + \frac{a}{2} + bt, \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+.$$

168. Série et intégrale

On pose $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ pour $x > 0$.

1. La fonction f est quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On a :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Or $1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x < e$. Ainsi, f est croissante sur $]0 ; e]$ puis décroissante sur $[e ; +\infty[$.

$$\mathbf{2.} \quad f(e) = \frac{1}{e} ; f(e^2) = \frac{2}{e^2} \text{ et } f\left(\frac{1}{e}\right) = -e.$$

3. On donne l'équation réduite de la tangente en $\frac{1}{e}$: $y = 2e^2x - 3e$.

4. Pour $x \geq k \geq 3$, la fonction f étant décroissante sur $[e ; +\infty[$, on a :

$$\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{\ln(k)}{k}.$$

Ainsi, en intégrant sur $[k ; k+1]$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

puis en sommant pour $k \in \{1 ; \dots ; n\}$:

$$\int_1^n \frac{\ln(t)}{t} dt = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leq u_n.$$

Reste à calculer $\int_1^n \frac{\ln(t)}{t} dt$.

On a :

$$\int_1^n \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{\ln(t)^2}{2} \right]_1^n = \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)^2}{2} = +\infty,$$

et, par théorème de comparaison, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

5. [ERRATUM] La première édition comporte une erreur corrigée dans les éditions suivantes : on cherche le couple tel que $e^{y \ln(x)} = e^{x \ln(y)}$.

On raisonne par équivalence en utilisant la stricte croissance de l'exponentielle avec $1 < x < y$:

$$e^{y \ln(x)} = e^{x \ln(y)} \Leftrightarrow y \ln(x) = x \ln(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

Il s'agit de déterminer qu'il existe une unique valeur $\alpha \in f(\mathbb{R}_+^*)$ qui admet exactement deux antécédents entiers.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la stricte décroissante de f sur $[e; +\infty[$ nous permet de travailler avec un antécédent dans $[e; +\infty[$ et un antécédent dans $]0; e]$. On teste alors $x = 1$ ou $x = 2$. On a $f(1) = 0$ et $f(2) = \frac{\ln(2)}{2}$.

On résout alors $f(y) = \frac{\ln(2)}{2}$ et l'on obtient ainsi le couple $(2; 4)$.

Travaux pratiques

p. 270

TP 1. Méthodes numériques de calcul intégral

- **Durée estimée** : 55 min
- **Objectifs** : On s'intéresse dans ce TP à deux méthodes numériques pour approcher le calcul d'intégrales : les méthodes des rectangles et des trapèzes.

On programmera en langage Python ces deux méthodes et on étudiera l'efficacité de chacune d'entre elles dans les exemples choisis.

Ce TP permet de s'entraîner avec les boucles, les listes et leur représentation graphique sous Python.

On commence par programmer la fonction $f : x \mapsto (x+1)e^{-x} + 1$.

```
def test(x):
    y=(x+1)*exp(-x)+1
    return y
```

On calcule alors avec une intégration par parties $I = 3 \left(1 - \frac{1}{e} \right)$.

A. Méthode des rectangles

1. Soit n un entier naturel non nul. On découpe l'intervalle $[a; b]$ en n sous-intervalles de même longueur. On construit alors des rectangles dans le but d'approximer l'aire sous la courbe d'une fonction f . L'aire du k -ième rectangle est donnée par le produit de la longueur $f(x_k)$ par la largeur $\frac{b-a}{n}$.

Finalement :

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

2. La fonction `rectangle(f, 0, 1, 10)` renvoie la valeur I_{10} où l'intervalle que l'on découpe en 10 sous-intervalles est $[0; 1]$.

On obtient $I_{10} \approx 1,909\ 3$ qui fournit un arrondi de I à 10^{-1} près ; $I_{100} \approx 1,897\ 7$ qui est égal à I à 10^{-2} près et $I_{1\ 000} \approx 1,896\ 5$ qui est égal à I à 10^{-3} près.

B. Méthode des trapèzes

1. L'aire du k -ième trapèze est donnée par la somme des deux bases de la longueur $f(x_k) + f(x_{k+1})$ multiplié par la demi hauteur $\frac{b-a}{2n}$.

Finalement :

$$J_n = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(x_{k+1})$$

2. La fonction `trapeze(f, 0, 1, 10)` renvoie la valeur J_{10} où l'intervalle que l'on découpe en 10 sous-intervalles est $[0; 1]$.

On programme cette fonction :

```
def test(x):
    y=(x+1)*exp(-x)+1
    return y
```

On obtient alors $J_{10} \approx 1,896\ 0$ qui est égal à I à 10^{-1} près ; $J_{100} \approx 1,896\ 358$ qui est égal à I à 10^{-4} près et $J_{1\ 000} \approx 1,896\ 361$ qui est égal à I à 10^{-7} près.

C. Comparaison des méthodes

1. On programme la fonction gauss :

```
def gauss(x):
    y=exp(-x**2)/2
    return y
```

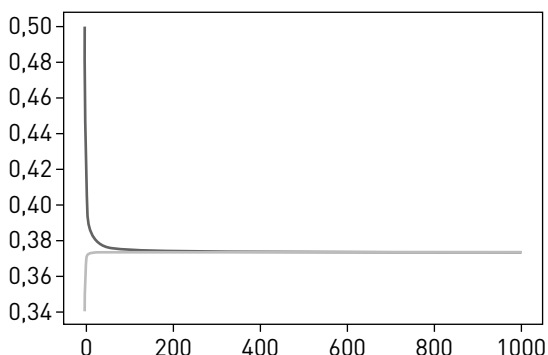
On obtient alors $I_{10} \approx 0,388\ 9$; $I_{100} \approx 0,375\ 0$ et $I_{1\ 000} \approx 0,373\ 6$, puis $J_{10} \approx 0,373\ 1$; $J_{100} \approx 0,373\ 4$ et $J_{1\ 000} \approx 0,373\ 4$.

2. La liste des valeurs approchées de J_n est donnée par la fonction `liste_trapeze(f, a, b, N)` :

```
def liste_trapeze(f, a, b, N):
    L=[]
    for k in range(1, N+1):
        L=L+[trapeze(f, a, b, k)]
    return L
```

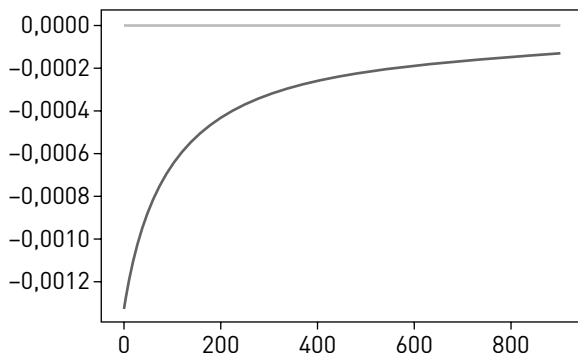
3. On représente les deux listes :

```
I=liste_rectangle(gauss,0,1,1000)
J=liste_trapeze(gauss,0,1,1000)
print(I)
print(J)
x=np.array([k for k in range(1000)])
y=np.array(I)
z=np.array(J)
plt.plot(x, y)
plt.plot(x, z)
plt.show()
```



4. On choisit d'évaluer l'erreur par rapport à l'intégrale calculée en début de TP. On programme les listes des erreurs commises pour chacune des deux méthodes et on représente ces listes. Pour se faire, on ne s'intéresse pas aux 100 premières valeurs :

```
def liste_erreurs_rect(f,a,b,E,N):
    L=[]
    for k in range(100,N+1):
        L=L+[E-rectangle(f,a,b,k)]
    return L
def liste_erreurs_trap(f,a,b,E,N):
    L=[]
    for k in range(100,N+1):
        L=L+[E-trapeze(f,a,b,k)]
    return L
ex=3*(1-1/exp(1))
X=np.array(liste_erreurs_rect(test,0,1,ex,1000))
Y=np.array(liste_erreurs_trap(test,0,1,ex,1000))
plt.plot(X,X)
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```



La méthode des trapèzes converge plus rapidement vers la solution. On choisit cette méthode pour approcher une valeur de l'intégrale.

TP 2. Méthode de Monte Carlo

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** La méthode numérique présentée dans ce TP nous familiarise avec l'utilisation d'un procédé aléatoire afin d'obtenir une valeur numérique approchée. Bien que son utilisation dans le calcul d'intégrale en dimension 1 ne soit pas des plus pertinents, le TP permet son introduction de manière simple et en lien avec le programme de terminale spécialité. Il y sera travaillé la bibliothèque random sous Python ainsi que la loi des grands nombres.

A. Aire d'un quart de cercle

1. On a $A = \frac{\pi}{4}$.

2. a) $x, y \in [0 ; 1]$ donc $M[x ; y] \in [0 ; 1] \times [0 ; 1]$ qui est le carré C .

b) On peut décrire le quart de disque comme l'ensemble $\{(x ; y) \in [0 ; 1]^2 ; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

c) La probabilité que le point M se trouve sur le quart de disque est donnée par $\frac{\pi}{4}$ soit l'aire de cette surface.

3. On complète la fonction monteCarlo :

```
from math import *
import random
def monteCarlo1(n):
    C=0
    for k in range(n):
        x=random.random()
        y=random.random()
        if x**2+y**2 <= 1:
            C=C+1
    return C/n
print(monteCarlo1(10000))
```

4. La fonction ainsi programmée simule une détermination de fréquence d'appartenance au quart de disque. Lorsque n augmente, cette fréquence tend vers la fréquence théorique soit la probabilité que le point se trouve sur la surface donnée ; de par la loi des grands nombres. Cette probabilité est égale au quotient de l'aire de la surface par l'aire du carré, soit donc égale à l'aire de la surface.

B. Généralités et application à d'autres calculs d'aire

1. La fonction continue est supposée positive, ainsi, son aire est donnée par $\int_0^1 f(t)dt$. Cette valeur est égale à la probabilité qu'un point M du carré de côté 1 se trouve sur la surface correspondante.
2. On décrit alors la surface concernée par l'ensemble : $\{(x; y) \in [0; 1]^2; y \leq f(x)\}$.
3. On programme enfin une fonction Python afin d'obtenir monteCarlo2 et monteCarlo3 :

```
def monteCarlo (n, f) :
    C = 0
    for k in range (n) :
        x = random.random ()
        y = random.random ()
        if y <= f(x) :
            C = C + 1
    return C/n
def carre (x) :
    y = x**2
    return y
def gauss (x) :
    y = 1/sqrt(2*pi)*exp(-x**2/2)
    return y
print (monteCarlo(10000, carre))
print (monteCarlo(10000, gauss))
```

TP 3. Quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède

- **Durée estimée** : 55 min
- **Objectif** : La résolution de la quadrature de la parabole par Archimède marque un point culminant dans l'étude des mesures d'aire durant l'Antiquité. En faisant intervenir une suite géométrique, Archimède parvient à rendre possible un calcul d'aire en utilisant comme acquis des résultats de limites d'encadrement.

A. Construction du triangle de base [AB] d'aire maximale

1. Construction sur Geogebra.
2. GeoGebra affiche la valeur de 15,625 pour l'aire du triangle ABC.
4. L'aire $\mathcal{A}$ se calcule par une intégrale. Une équation réduite de la droite [AB] est donnée par $y = x + 8$.

$$\mathcal{A} = \int_{-4}^1 x + 8 - (x + 2)^2 dx = \frac{125}{6}.$$

On remarque que $\frac{4}{3}a_0 = \mathcal{A}$.

B. Démonstration de l'égalité $\mathcal{A} = \frac{4}{3}$ Aire (ABC)

1. a) Les deux triangles ACD et CBE ont la même aire, égale à 1,95.

b) $a_1 = \frac{1}{4}a_0$.

c) Les quatre triangles ont une aire égale à 0,24 d'après GeoGebra.

On a $\frac{a_1}{a_2} = 4$.

d) Si l'on utilise les résultats donnés et que l'on exagère une conjecture, on peut considérer que la suite est géométrique.

e) La somme des termes correspond à la somme des aires de tous les triangles construits. On peut conjecturer que pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^n a_k \leq \mathcal{A}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = \mathcal{A}$$

2. a) Si l'on admet les résultats donnés, on peut considérer $q = \frac{1}{4}$ et $a_n = \frac{a_0}{4^n}$ pour tout entier naturel n .

b) C'est le résultat de somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}}.$$

c) La raison vérifiant $0 < q < 1$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = \frac{4}{3}a_0.$$

Le TP admet ici que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k = \mathcal{A}$.

Rappelons que sans cette donnée il n'est pas possible de conclure.

TP 4. Calculer une surface

- **Durée estimée** : 55 min
- **Objectif** : Manipuler l'interpolation polynomiale avec GeoGebra.

A. 1^{re} approximation: la courbe est une parabole

1. Si l'on suppose que $f(x) = b - ax^2$, alors, des conditions $f(0) = 20$ et $f(20) = 0$, on tire $b = 20$ et

$$a = \frac{1}{20}.$$

2. Finalement, on obtient :

$$\int_{-20}^{20} f(t) dt = \left[20x - \frac{1}{60} x^3 \right]_{-20}^{20} = \frac{1600}{3} \text{ soit une aire de}$$

façade d'environ 533 m².

B. 2^e approximation : la courbe est une fonction du type $f(x) = (ax + b)e^{2x}$

1. On trouve, en réalisant l'interpolation polynomiale avec GeoGebra, $a = -2$ et $b = 1$.

2. La fonction f est produit de fonctions polynomiale et exponentielle, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}$. f est donc dérivable avec $f'(x) = (2ax + a + 2b)e^{2x}$.

Si $f(x) = (ax + b)e^{2x}$, les conditions nous donnent $f'(0) = 0$ et $f(0) = 1$.

On retrouve alors $a = -2$ et $b = 1$.

Finalement $f(x) = (-2x + 1)e^{2x}$.

3. Il s'agit de calculer l'intégrale suivante, au moyen d'une intégration par parties. On vérifie les hypothèses de dérivées continues.

$$\int_{-1,2}^{0,4} f(t) dt = 0,6e^{0,8} - 2,2e^{-2,4}$$

Soit une aire environ égale à 454 m².

CHAPITRE 9 Vecteurs, droites et plans de l'espace

Manuel p. 276-305

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Nous allons formaliser les notions élémentaires dans l'espace à partir des positions relatives entre droites et plans, puis nous formaliserons l'utilisation des vecteurs pour définir des notions importantes de combinaison linéaire ou de colinéarité.

Objectifs

- Représenter des combinaisons linéaires et caractériser des plans dans l'espace. Décrire la position relative de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans.
- Construire la section d'un solide par un plan dans l'espace.
- Exprimer un vecteur comme une combinaison linéaire de vecteurs.
- Décomposer un vecteur dans une base par lecture graphique et déterminer une base ou un repère du plan ou de l'espace par le calcul.
- Déterminer une représentation paramétrique d'une droite.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 277

1. Calculer des coordonnées de vecteurs

a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $-2\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix}$

2. Construire des points et déterminer leurs coordonnées

a) Pour les coordonnées de F on doit résoudre le système :
$$\begin{cases} x_F + 2 = -2 \times 1 + 3 \times 3 \\ y_F - 1 = -2 \times 1 + 3 \times (-3) \end{cases}$$

d'où $F(5 ; -10)$.

b) Pour les coordonnées de G on doit résoudre le système :
$$\begin{cases} 0 - x_G = -2 - 2 \times (-3) \\ -3 - y_G = 4 - 2 \times 3 \end{cases}$$

d'où $G(-4 ; -1)$.

c) Pour les coordonnées de H on doit résoudre le système :
$$\begin{cases} x_H - 1 = 5 \times (-1) + 2 \times (-3) \\ y_H + 2 = 5 \times (-1) + 2 \times 3 \end{cases}$$

d'où $H(-10 ; -1)$.

3. Déterminer si des vecteurs dans le plan sont colinéaires

1. $\vec{w} = -\vec{u}$ et $\vec{t} = 3\vec{u}$

2. $\vec{t} = -\vec{v}$

4. Résoudre des systèmes

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -21 \\ 43 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 9 \\ 43 \end{pmatrix}$

d) Pas de solution.

5. Utiliser la relation de Chasles

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

2. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3. Non car les vecteurs ne sont pas colinéaires.

6. Déterminer l'équation d'une droite

a) $2x - y + 4 = 0$

b) $-2x + 5y - 4 = 0$

c) $-3x + y + 4 = 0$

d) $2x + y + 5 = 0$

Activités

p. 278

1 Découvrir les vecteurs dans l'espace

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Construire des vecteurs dans l'espace à l'aide de GeoGebra.

1. 2. 3. 4. Constructions et coordonnées dans la fenêtre d'algèbre.

$$5. \vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{BC}$$

$$6. \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{AG}$$

$$7. \vec{u} + \vec{v} = \vec{EG}$$

2 Utiliser des combinaisons linéaires de vecteurs

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir les combinaisons linéaires de vecteurs.

$$1. \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BG} - \frac{1}{4}\vec{BC}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AH} - \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{AE}) - \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$$

$$2. \vec{AN} = \vec{AD} + \vec{DN} = \vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{DC} + 2\vec{DH}$$

$$= \vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AB} + 2\vec{AE}$$

$$3. 4\vec{AM} - \vec{AN} = \frac{11}{3}\vec{AB}$$

4. C'est bien une combinaison linéaire et le point A appartient au plan (BMN).

3 Découvrir les plans de l'espace

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir les plans de l'espace.

$$1. 2. \vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{AE}$$

$$= \vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BF}$$

$$3. \vec{BN} = \vec{BC} + \vec{CN} = \vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{CG}$$

$$= \vec{BC} + \frac{2}{3}\vec{BF}$$

$$4. 5. \vec{BM} + \vec{BN} = \vec{AM} = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BF}$$

$$= \vec{BH}$$

6. La section est le parallélogramme BMHN.

4 Utiliser des coordonnées dans l'espace

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir les coordonnées de points dans l'espace.

$$1. A(0; 0; 0) B(1; 0; 0) C(1; 1; 1) D(0; 1; 1) P(4; 0; 0) M(0; 3; 3) N(4; 3; 3)$$

$$2. \vec{AP} = 4\vec{i}, \vec{AM} = 3\vec{j} \text{ et } \vec{AN} = 4\vec{i} + 3\vec{j}.$$

$$3. a) \vec{AR} = \vec{AN} + \vec{NR} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$b) E(0; 0; 1) F(1; 1; 0) G(1; 1; 1) H(0; 1; 1)$$

$$Q(0; 3; 5) S(4; 0; 5) \text{ et } T(0; 0; 5).$$

5 Découvrir les représentations paramétriques de droites de l'espace

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir les représentations paramétriques de droites dans l'espace.

$$A. 1. M_0(2; -1; 0), M_1(1; 2; 2)$$

$$2. M_2(0; 5; 4), M_3(5; -10; -6)$$

$$3. \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{CD} \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ d'où :}$$

$$\vec{CD} = -5\vec{AB} \text{ et } \vec{AC} = 2\vec{AB}$$

donc les points sont alignés.

$$4. \text{Par exemple } M_{-1}(3; -4; -2) \text{ vérifie } \vec{AM_{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\vec{AB}$$

donc il est aussi aligné.

$$B. 1. \vec{AM_t} \begin{pmatrix} -t \\ 3t \\ 2t \end{pmatrix} = t\vec{AB}$$

2. Les points sont sur la droite (AB).

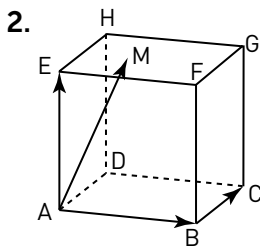
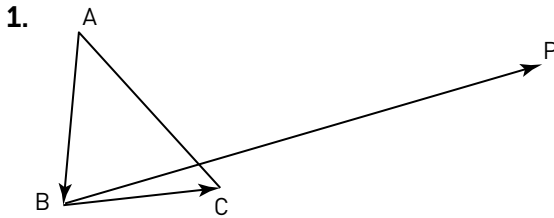
3. a) Le segment [AB].

b) La demi-droite [AB].

c) Le segment $[BB']$ où B' est le symétrique de B par rapport à A .

À vous de jouer

p. 281



3. 1. Le plan (SAC) est caractérisé par les vecteurs $\overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{SC}$.

2. $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC})$ donc O appartient au plan (SAC) par conséquent I aussi.

4. 1. $(B; \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG})$

2. $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$

5. a) (AB) et (FH) sont non coplanaires.

b) (AF) et (CH) sont non coplanaires.

c) (CFH) et (AB) sont sécants.

6. a) (AB) et (CD) sont non coplanaires.

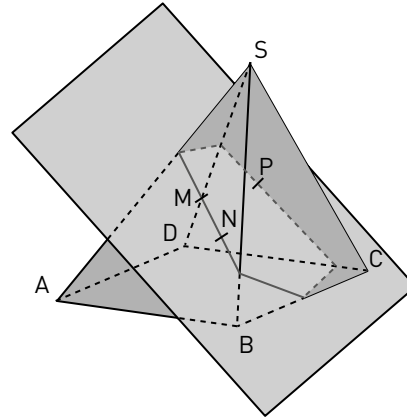
b) (AC) et (BCD) sont sécants.

c) (AC) et (BD) sont non coplanaires.

7. a) (SB) b) (SO) c) Vide

d) Une droite parallèle à (AB) passant par S .

8. 1. (MN) et la droite parallèle à (MN) passant par S .
2.



$$\begin{aligned} 9. \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ &= -2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BA} = 6\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10. \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11. \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

$$12. \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$

$$13. \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

14. $ABGH$ est un rectangle donc les points sont coplanaires mais le point E n'est pas dans le même plan donc le triplet est bien une base.

15. Non ce n'est pas une base car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

$$16. \text{ (DK) } \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 3 + 3t \\ z = t \end{cases}$$

$$17. \text{ (CG) } \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 4 - 5t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$$

$$18. \text{ (NY) } \begin{cases} x = -2 + t \\ x = -2 + t \\ z = -4t \end{cases}$$

$$19. d \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 9 - 2t \\ z = -t \end{cases}$$

$$20. 1. a) \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$$

b) Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est combinaison linéaire de deux vecteurs du plan (DBH) donc il lui est parallèle.

$$2. a) \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$b) \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DH}$$

c) (MN) parallèle à (BDH).

$$21. a) B(1; 0; 0), I\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ et } K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right) \text{ d'où :}$$

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BI}.$$

$$b) \begin{cases} x = 1 - k \\ y = \frac{1}{2}k \\ z = \frac{1}{2}k \end{cases}$$

22.

$$1. a) \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$$

b) (IJ) est parallèle à (ACE).

$$2. a) \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$b) \text{ Donc } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}.$$

$$23. 1. \text{ Leurs vecteurs directeurs sont : } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

$$2. \text{ On a : } \begin{cases} 1 - 2k = 2 - 4t \\ 2 + k = -2t \\ 3k = -1 + t \end{cases} \text{ avec les deux premières}$$

$$\text{équations on obtient } k = -\frac{5}{4} \text{ et } t = -\frac{3}{8} \text{ mais ces}$$

valeurs ne vérifient pas la troisième équation donc les droites ne sont pas coplanaires.

$$24. 1. \text{ Leurs vecteurs directeurs sont : } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

qui sont colinéaires donc les droites sont parallèles ou confondues.

2. pour par exemple $k = 0$ on obtient le point $(4; -3; 0)$ de la première droite qui n'appartient pas à la deuxième droite donc elles sont strictement parallèles ;

$$25. 1. \text{ Leurs vecteurs directeurs sont : } \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

qui ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

$$2. \text{ On a : } \begin{cases} -2 - 3k = 1 + 3t \\ k = -3 + t \\ -1 - 2k = 1 + 2t \end{cases} \text{ avec les deux dernières}$$

équations on obtient $k = 4$ et $t = 1$ mais ces valeurs

ne vérifient pas la première équation donc les droites ne sont pas coplanaires.

Exercices

apprendre à démontrer

p. 290

Pour s'entraîner

Le plan (ABC) peut être défini par le point A et les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Si le point M appartient au plan (ABC) donc il a des coordonnées $(a; b)$ dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ce qui donne : $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$.

Réciproquement si $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ alors les points A, B, C et M sont coplanaires et donc M appartient au plan (ABC).

Exercices

calculs et automatismes

p. 291

26. Positions relatives de droites et de plans

1. c)
2. a)
3. a)
4. b)

27. Utiliser les bons symboles

1. Faux
2. Faux
3. Vrai
4. Faux
5. Vrai
6. Vrai

28. Lecture d'un schéma

1. b)
2. b)
3. a)

29. Représentations paramétriques de droites (1)

b) ou d)

30. Représentations paramétriques de droites (2)

1. Faux
2. Vrai
3. Faux
4. Vrai

31. Colinéarité ou non ?

1. Non
2. Oui
3. Oui
4. Non

32. Propriété et réciproque

1. Faux
2. Vrai

33. Vecteur directeur d'une droite

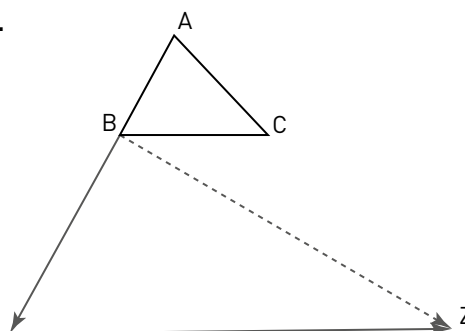
b) ou d)

Exercices d'application

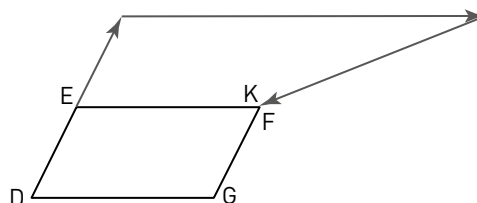
p. 292-294

Représenter des combinaisons linéaires de vecteurs

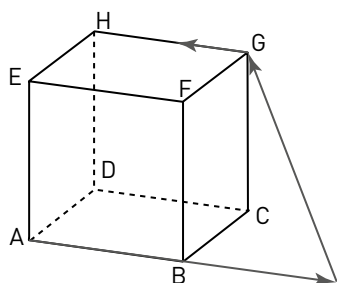
34.



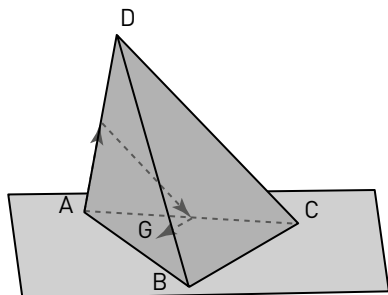
35.



36.



37.



Caractériser des plans dans l'espace

38. 1. Le plan (CMN) est défini par le point C et les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{CA}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ donc le point A n'appartient pas au plan (CMN) .

39. 1. Le plan (CEM) est défini par le point M et les vecteurs $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{ME}$.

2. On a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME}$ donc le point N appartient au plan (CEM) .

40. 1. Les points B, R et G définissent un plan car ils ne sont pas alignés.

2. Le plan (BRG) est défini par le point B et les vecteurs $\overrightarrow{BR}$ et $\overrightarrow{BG}$.

3. Soit I le milieu de $[AE]$, on a : $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BR} + \overrightarrow{RI} = \overrightarrow{BR} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$ donc il appartient au plan (BRG) .

Décrire des positions relatives dans l'espace sans coordonnées

41. a) non coplanaires

b) non coplanaires

c) non coplanaires

d) non coplanaires

42. a) parallèles

b) sécants

c) sécants

d) parallèles

43. a) sécants

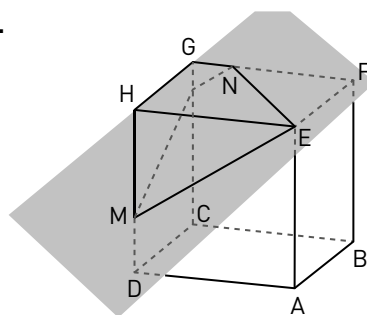
b) parallèles

c) sécants

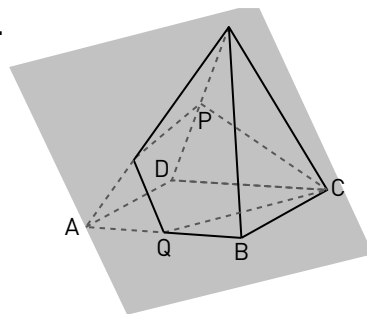
d) sécants

Construire des sections dans l'espace

44.



45.



Décomposer des vecteurs

46. 1. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et

$\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

2. On en déduit que : $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{CM}$ donc que les points sont alignés.

47. 1. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ et

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$.

2. On en déduit que : $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{BI}$ donc que les droites sont parallèles.

48. Les points sont alignés si $\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ donc si $k = -\frac{3}{4}$.

49. a) $\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

c) $\overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

d) $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$

e) $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

f) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

50. 1. MCEF et ADEN sont des parallélogrammes.

$$\begin{aligned} 2. \overrightarrow{DN} - 2\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} - 2 \times \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE} \end{aligned}$$

3. Les vecteurs sont donc combinaison linéaire donc ils ne forment pas une base.

51. 1. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} \text{ d'où}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG}.$$

2. Les sont donc combinaison linéaire donc ils ne forment pas une base.

52. 1. Les deux premières viennent d'une définition du milieu et la troisième du parallélogramme.

$$2. 2\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{DJ} - 2\overrightarrow{DI}$$

que l'on peut transformer en $\overrightarrow{DJ} = 4\overrightarrow{DI}$ et donc la droite (IJ) passe par D.

Déterminer des vecteurs formant une base

53. 1. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ et les points A, B, C et D sont dans le même plan donc les vecteurs ne forment pas une base.

2. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$ et la droite (FH) n'est pas incluse dans le plan (AEH).

$$54. 1. \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HE}$$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{BP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{BP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ils sont donc combinaison linéaire et ne forment pas une base.

2. Les points B, E et G forment un plan et les points N, P et C un autre plan sécant au précédent.

55. On suppose qu'il existe a et b tels que :

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \text{ ce qui donne le système : } \begin{cases} 1 = 2a - b \\ -1 = -3a + 2b \\ 2 = a + b \end{cases}$$

qui n'a pas de solution donc les vecteurs forment une base.

56. On suppose qu'il existe a et b tels que :

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \text{ ce qui donne le système : } \begin{cases} -1 = 2a + b \\ -1 = 3a + 2b \\ 3 = -2a + b \end{cases}$$

qui a pour solution $a = -1$ et $b = 1$ donc les vecteurs sont combinaison linéaire et ne forment pas une base.

$$57. 1. 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

2. Donc les vecteurs sont combinaison linéaire et ne forment pas une base.

$$58. 1. 2\vec{u} \neq \vec{v}$$

$$2. \text{ On a le système : } \begin{cases} 3 = a + 2b \\ -1 = -a \\ 0 = a + b \end{cases} \text{ qui n'a pas de solution.}$$

3. Donc les vecteurs forment une base.

Repérage dans l'espace

$$59. \text{ a) } \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ b) } \overrightarrow{AQ} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ c) } \overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{ d) } \overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \overrightarrow{\text{EM}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \overrightarrow{\text{NQ}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{60. a) } \vec{u} & \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} & \text{b) } \vec{v} & \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \text{c) } \vec{w} & \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} & \text{d) } \vec{t} & \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

61. On suppose qu'il existe a et b tels que :

$\overrightarrow{\text{OC}} = a\overrightarrow{\text{OA}} + b\overrightarrow{\text{OC}}$ ce qui donne le système :

$$\begin{cases} 7 = 2a + b \\ -12 = -4b \\ 22 = -a + 8b \end{cases} \quad \text{qui a pour solution } a = 2 \text{ et } b = 3 \text{ donc}$$

les vecteurs sont combinaison linéaire et ne forment pas une base.

$$\text{62. } \overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{\text{AC}} \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{AD}} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ d'où : } \overrightarrow{\text{AD}} = 2\overrightarrow{\text{AB}} - \overrightarrow{\text{AC}}$$

donc les vecteurs sont combinaison linéaire et ne forment pas une base.

63. On suppose qu'il existe a et b tels que :

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \text{ ce qui donne le système : } \begin{cases} -2 = -a + b \\ -1 = a - 2b \\ 1 = 2a - b \end{cases}$$

qui n'a pas de solution donc les vecteurs forment une base.

64. On suppose qu'il existe a et b tels que :

$$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \text{ ce qui donne le système : } \begin{cases} -2 = a + 4b \\ 3 = -a - 2b \\ -1 = -2a - 18b \end{cases}$$

qui a pour solution $a = -4$ et $b = \frac{1}{2}$ donc les vecteurs sont combinaison linéaire et ne forment pas une base.

Déterminer des positions relatives dans l'espace avec des coordonnées

$$\text{65. } \overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{CD}} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires donc}$$

les droites ne sont pas parallèles. Par ailleurs $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\overrightarrow{\text{CD}} + 3\overrightarrow{\text{AC}}$ donc les points sont coplanaires et donc les droites sont sécantes.

$$\text{66. } \overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{AC}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires}$$

donc (ABC) est un plan.

$$\text{2. } \overrightarrow{\text{DE}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc il faut résoudre le système :}$$

$$\begin{cases} -3 = 3a + 2b \\ 2 = a + b \\ 0 = -2a - 4b \end{cases} \quad \text{qui n'a pas de solution donc les vec-}$$

teurs forment une base.

3. Par conséquent la droite (DE) coupe le plan (ABC).

$$\text{67. } \overrightarrow{\text{AD}} = 2\overrightarrow{\text{BC}}$$

2. $2\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{CD}} = \overrightarrow{\text{AD}}$ donc les points sont coplanaires.

3. On en déduit que les droites sont sécantes.

$$\text{68. D'une part } \overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{AC}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et d'autre part}$$

$$\overrightarrow{\text{DE}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\text{DF}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ ne sont pas colinéaires deux à deux donc les plans sont sécants.}$$

$$\text{69. } \vec{a} = \vec{0}$$

2. Donc les plans sont parallèles.

70. Ils sont parallèles car le vecteur $\overrightarrow{OA}$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Déterminer des représentations paramétriques de droites

71. 1. On a :
$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = -2 + k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$$

2. Pour $k = 1$ on obtient B.

3. Non pas de k possible.

72. a) $(0 ; -1 ; -3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) $(-2 ; 0 ; -4)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) $(3 ; 1 ; 0)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

d) $(0 ; 1 ; 2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

73. a) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = -k \\ z = -2 + 3k \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 2 - 3k \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 1 - 2k \\ z = 1 - 2k \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = k \\ z = 2 - k \end{cases}$

74. a) Non.

c) Oui pour $k = -1$.

b) Oui pour $k = 1$.

d) Oui pour $k = -2$.

75. 1.
$$\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 2 - 2k \\ z = -3 + 4k \end{cases}$$

2. a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

b) Pour $k = 2$.

3.
$$\begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = -2 - 2k \\ z = 5 + 4k \end{cases}$$

76.
$$\begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = 1 + k \\ z = 2 + 3k \end{cases}$$

a) k réel

b) $k \in [0 ; 1]$

c) $k \in [0 ; +\infty[$

77. Axe des abscisses $\begin{cases} x = k \\ y = 0, \text{ axe des ordonnées} \\ z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \text{ et axe des cotes} \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$

78. a) (CE) $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - k \end{cases}$

b) (FH) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = k \\ z = 1 \end{cases}$

c) (BG) $\begin{cases} x = 1 \\ y = k \\ z = k \end{cases}$

Exercices d'entraînement p. 295-297

Des vecteurs dans tous les sens

79. Comme $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$ et que les points A, B, D, E et H ne sont pas coplanaires alors les vecteurs forment une base.

80. 1. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

2. $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

3. A, P et Q sont alignés.

4. Ils ne forment pas une base car $\vec{PC}$ et $\vec{FB}$ sont colinéaires.

5. Comme $\vec{EH} = \vec{BC}$ et que les points A, B, C et Q ne sont coplanaires alors les vecteurs forment une base.

81. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$, on cherche s'il

existe les réels a et b tels que : $\vec{AB} = a\vec{AC} + b\vec{AD}$

ce qui donne le système :
$$\begin{cases} 1 = -2a - 2b \\ 1 = 3a - 7b \\ -\frac{1}{2} = 2b \end{cases}$$
 qui a pour

solution $b = -\frac{1}{4}$ et $a = -\frac{1}{4}$ donc ces vecteurs ne forment pas une base.

82. 1. Ce sont des parallélogrammes.

2. $\vec{DF} - 2\vec{DJ} = \vec{DA} + \vec{DE} - (\vec{DA} + \vec{DC}) = \vec{CE} = \vec{IJ}$

3. On en déduit que les vecteurs sont combinaison linéaire.

4. Les points sont coplanaires.

83. 1. $\vec{HI} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{AK} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{HJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Il faut résoudre le système :
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \\ 1 = b \\ 1 = -a - b \end{cases}$$
 qui

n'a pas de solution.

3. Ces vecteurs forment une base.

84. A. 1. $\vec{IL} = \vec{KJ}$ donc IKJL est un parallélogramme.

2. Et : $\vec{IK} + \vec{IL} = \vec{IJ}$.

B. 1. $I \begin{pmatrix} 0; 0; \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $J \begin{pmatrix} 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $K \begin{pmatrix} \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1 \end{pmatrix}$ et $L \begin{pmatrix} \frac{1}{2}; 0; 0 \end{pmatrix}$.

2. $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{IK} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{IL} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. $\vec{IK} + \vec{IL} = \vec{IJ}$

85. A. 1. $-\vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AC} = -2\vec{AI} + 2\vec{AJ} = 2\vec{IJ}$

2. $\vec{AB} - 2\vec{AD} + \vec{AC} = 2\vec{AI} - 2\vec{AD} = 2\vec{DI} = 3\vec{DG}$

3. On cherche à résoudre le système :
$$\begin{cases} 1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b \\ 1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b \\ 1 = \frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b \end{cases}$$

qui a pour solution

$a = b = -6$ et donc $\vec{u} = -6\vec{IJ} - 6\vec{DG}$.

B. 1. $I \begin{pmatrix} \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \end{pmatrix}$, $J \begin{pmatrix} 0; 0; \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $G \begin{pmatrix} \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{IJ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{DG} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

3. Et $\vec{u} = -6\vec{IJ} - 6\vec{DG}$.

86. 1. PQRS parallélogramme donc $\vec{PQ} = \vec{SR}$ et alors $\vec{PQ} + \vec{PS} = \vec{PR}$.

2. On introduit le point A à l'aide de la relation de Chasles dans tous les vecteurs de la somme ce qui donne :

$7\vec{MA} + \vec{AC} + \vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AH} + \vec{AD} + \vec{AF} = 7\vec{MA} + 3\vec{AG} = \vec{0}$.

87. 1. $\vec{FB} = \vec{FC} + \vec{FD}$

2. G est le centre de gravité de ACD donc :

$\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} + 2\vec{GF} + \vec{FB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \vec{GF} + \vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GF} + 2\vec{GE} = \vec{0}$

3. On en déduit l'alignement des points et on a :
 $\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.

D'autres représentations d'une droite

88. a) Ces deux droites ont le même vecteur directeur donc elles sont parallèles. Par ailleurs elles sont confondues car pour $k = 0$ on obtient le même point que pour $k' = -2$.

b) Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires et le point $k = 0$ pour d correspond au point $k' = 2$ pour d' .

89. Le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} x + y = 1 - k \\ -x + y = -1 + k \\ z = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases} \quad \text{qui est bien une représentation paramétrique d'une droite.}$$

Des intersections de droites

90. Leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires donc les droites sont sécantes en un point pour $t = 0$ ou $k = 3$ soit $(-5 ; 15 ; 13)$.

91. 1. Leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires donc les droites ne sont pas parallèles.

2. A(1 ; 0 ; -1) et B(-1 ; -1 ; 0).

3. C(3 ; 2 ; 0) et D(4 ; 1 ; 2).

4. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et on cherche à résoudre

$$\text{le système : } \begin{cases} -2 = 2a + 3b \\ -1 = 2a + b \\ 1 = a + 3b \end{cases} \quad \text{qui n'a pas de solution}$$

donc ils forment une base.

5. On en déduit que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires donc les droites ne sont pas sécantes et coplanaires.

$$92. 1. \text{ (FG) } \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -1 + 6k \\ z = 2 - 5k \end{cases}$$

2. Leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

3. Le système : $\begin{cases} -4 + t = 1 + 3k \\ -11 + 2t = -1 + 6k \\ -1 - t = 2 - 5k \end{cases}$ a pour solution
 $t = 17$ et $k = 4$ ce qui donne le point H(13 ; 23 ; -18).

$$93. 1. \text{ On a : } \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 - 2k \\ z = 3 - k \end{cases}$$

$$2. \text{ On a : } \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

3. Il appartient à d pour $k = 5$ mais n'appartient pas à d' .

4. Les deux droites se coupent au point A car pour $t = \frac{1}{2}$ il appartient à d' .

94. 1. Elles sont concourantes au point (0 ; 3 ; 1).

2. Leurs vecteurs directeurs forment-ils une base ?

$$\text{Le système : } \begin{cases} -1 = 3a + 4b \\ 1 = -3a + 4b \\ 2 = -4a \end{cases} \text{ n'a pas de solution donc}$$

oui et par conséquent les droites ne sont pas coplanaires.

95. 1. On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} 2 + k = 3 + 3k_2 \\ 1 - k_1 = 3 + 2k_2 \\ 5 + 2k_1 = 1 - k_2 \end{cases} \quad \text{qui n'a pas de solution donc les}$$

droites ne sont pas coplanaires.

$$2. 3. \text{ Par exemple : } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

96. Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et le système suivant n'a pas de solution :

$$\begin{cases} -2 + k = k' \\ 1 + k = -2k' \\ 4 + 3k = 8 + 3k' \end{cases}$$

97. (GK) $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$ leurs vecteurs directeurs sont égaux et pour $t = 0$ on obtient le même point que pour $k = -2$ donc elles sont confondues.

98. 1. (GI) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 1 - k \\ z = 1 - \frac{1}{2}k \end{cases}$

2. Les points du plan (ABC) vérifient $z = 0$ donc le point d'intersection est $(-1; -1; 0)$.

99. 1. (GI) $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}k \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}k \\ z = -\frac{1}{3}k \end{cases}$

2. $J(1; 0; 1)$ appartient à (GI) pour $k = -3$.

3. Non.

100. 1. $\left(0; 0; \frac{1}{2}\right), J\left(0; \frac{1}{2}; 0\right), K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; 0\right), G\left(0; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ et $H\left(\frac{2}{3}; 0; 0\right)$.

2. a) $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IH} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ doivent vérifier le

système : $\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{2}{3}b \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{3}a \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}a - \frac{1}{2}b \end{cases}$ qui a pour solution :

$a = b = \frac{3}{4}$.

- b) On en déduit que les points sont coplanaires.

3. a) (IG) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}k \\ y = \frac{1}{4}k \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}k \end{cases}$ et (HK) $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}t \\ y = \frac{1}{4}t \\ z = 0 \end{cases}$

- b) Elles sont sécantes.

- c) Elles se coupent au point K.

101. 1. a) $\overrightarrow{JK} = -3\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{JG} = -2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.

- b) D'où : $2\overrightarrow{JK} = 3\overrightarrow{JG}$.

2. a) $J(3; 3; 0)$ et $K\left(0; 0; \frac{3}{2}\right)$

b) (JK) $\begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 3 - 3k \\ z = \frac{3}{2}k \end{cases}$

- c) Pour $k = \frac{2}{3}$ on a $G(1; 1; 1)$.

102. 2. a) $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

- c) D'où : $2\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{NP}$.

2. a) $M(-1; 0; 0), N\left(0; 1; -\frac{1}{2}\right)$ et $P\left(2; 3; -\frac{3}{2}\right)$.

b) (MN) $\begin{cases} x = -1 + k \\ y = k \\ z = -\frac{1}{2}k \end{cases}$

- c) Pour $k = 3$.

103. Une représentation paramétrique serait :

$\begin{cases} x = x_A + \alpha a + \beta p \\ y = y_A + \alpha b + \beta q \\ z = z_A + \alpha c + \beta r \end{cases}$

104. 1. Des formes géométriques de l'espace.

2. Travail de l'élève.

Exercices bilan

p. 298

105. Une position

1. $\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ non colinéaires.

2. a) Car les points sont coplanaires.

b) On obtient le système :
$$\begin{cases} x_K - 1 = -\frac{1}{2}a \\ y_K = b \\ z_K - 1 = -a - \frac{1}{2}b \end{cases}$$
 d'où les

coordonnées de K.

c) (BH) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = k \\ z = k \end{cases}$ d'où $k = \frac{2}{7}$ et $K\left(\frac{5}{7}; \frac{2}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

3. a) Les points sont coplanaires et les vecteurs non

colinéaires. Leur intersection vérifie :
$$\begin{cases} 1 - \frac{2}{7}k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ \frac{2}{7}k = t \\ 1 - \frac{5}{7}k = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

qui donne les solutions $t = \frac{1}{3}$ d'où $L\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

b) Et $\overrightarrow{LI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$.

106. Distance minimale

1. $\overrightarrow{AM} = t \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{t}{2}\overrightarrow{AB}$ d'où $M(t; -1; 5)$ et

$\overrightarrow{CN} = t \frac{\overrightarrow{CD}}{CD} = \frac{t}{5}\overrightarrow{CD}$ d'où $N\left(11; \frac{4}{5}t; 1 + \frac{3}{5}t\right)$.

2. a) $\overrightarrow{CD} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ donc (CD) est incluse dans le plan.

b) On a : $\overrightarrow{CE} = -\vec{j} + 4\vec{k}$.

c) E appartient à (AB) pour $t = 11$.

d) Non sécantes.

3. a) $MN^2 = (11 - t)^2 + (0,8t + 1)^2 + (0,6t - 4)^2$
 $= 2t^2 - 25,2t + 138$

b) Ce polynôme du second degré est minimal pour
 $t = \frac{25,2}{4} = 6,3$ s.

107. Dans le cube

1. Car les points sont coplanaires.

2. On a le système :
$$\begin{cases} x_Z - 1 = -b \\ y_Z = a \\ z_Z = a + b \end{cases}$$

3. (CE) $\begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = k \end{cases}$

4. Alors Z se trouve pour $a = b = \frac{k}{2}$ ce qui donne Z

$Z\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

108. Droites concourantes

1. M(1 ; 1 ; 0), N(1 ; 0 ; 1) et P(0 ; 1 ; 1).

2. (DM) $\begin{cases} x = k_1 \\ y = k_1 \\ z = 1 - k_1 \end{cases}$, (CN) $\begin{cases} x = k_2 \\ y = 1 - k_2 \\ z = k_2 \end{cases}$ et (BP) $\begin{cases} x = 1 - k_3 \\ y = k_3 \\ z = k_3 \end{cases}$

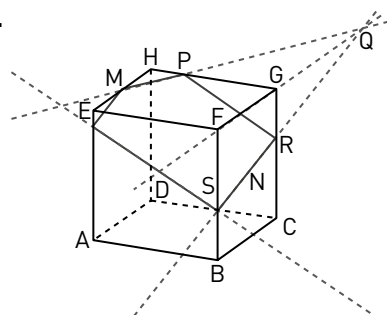
3. On résout une intersection et on vérifie avec l'autre droite, alors on obtient : $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{2}$ et

$Q\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

109. Une section

1. 2. Les droites sont coplanaires et non parallèles donc sécantes.

3.



Préparer le bac
Je me teste

p. 300

110. A et D

111. A

112. B et C

113. A et B

114. D

115. A

116. B

Préparer le bac
Je révise

p. 301

117. Inclusion

1. Pour $k = 0$.

2. Pour $k = 1$.

3. On a le système :
$$\begin{cases} 0 = b \\ 1 = -a - b \\ 1 = -a + 2b \end{cases}$$
 qui donne $a = -1$

et $b = 0$.

4. Les points A, B, C et D sont coplanaires et donc d est incluse dans (ABC).

118. Alignement

1. $I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ et $J\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

2. (IJ)
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}k \\ y = k \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. $M\left(0; \frac{1}{3}; 1\right)$, $N\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$ et $K\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

4. Pour $k = \frac{1}{3}$ le point K appartient à la droite (IJ).

119. Encore une intersection

1. (AD)
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \text{ et } (MN) \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{3}k \\ y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \\ z = 0 \end{cases}$$

2. $L\left(0; \frac{5}{4}; 0\right)$

3. (PL)
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{4} + t \\ z = -t \end{cases}$$

4. $K\left(0; 1; \frac{1}{4}\right)$

5. La droite est incluse dans les deux plans.

6. (KL)
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}s \\ z = s \end{cases}$$

120. Parallélisme

1. $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{PF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$

2. $\overrightarrow{EQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{PF}$ combinaison linéaire donc ils ne forment pas une base.

3. Donc (PF) est parallèle au plan (EGQ).

121. Vrai-faux

1. Faux

2. Faux

3. Faux

4. Vrai

Exercices vers le supérieur

p. 302

122. Lieu

1. $L\left(3 - \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}k'; 4 - 4k - k'; 6 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k'\right)$

2. $\overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k + \frac{1}{2}k' \\ -4k - k' \\ -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k' \end{pmatrix} = k\vec{u} + k'\vec{v}$

3. Le point L varie sur le plan défini par le point K et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

123. Trafic aérien

1. On cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} 3+k=0,5+2k' \\ 9+3k=4+k' \\ 2=4-k' \end{cases} \text{ qui n'a pas de solution donc les}$$

droites ne sont pas coplanaires.

2. a) b) Car les droites ne sont pas parallèles entre elles.

3. Les deux plans se coupent selon une droite qui passe par S et qui coupe chacune des deux droites dans chacun des deux plans car sinon les trois droites seraient parallèles entre elles.

124. Position et section

1. Coplanaires dans le plan (SBD).

2. a) $\vec{BF} = \vec{BS} + \vec{SF} = -\vec{SB} + \frac{1}{3}\vec{SD}$

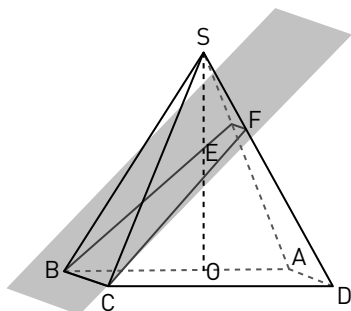
b) $\vec{BE} = \vec{BS} + \frac{1}{2}\vec{SO} = \vec{BS} + \frac{1}{4}(\vec{SB} + \vec{SD}) = -\frac{3}{4}\vec{SB} + \frac{1}{4}\vec{SD}$

c) D'où : $\vec{BE} = \frac{3}{4}\vec{BF}$.

3. a) (BEC) et (ABC) se coupent selon (BC) et (BEC) et (SCD) selon (CE).

b) D'après le théorème du toit ils se coupent selon une droite parallèle à (BC).

c)



125. Paramètre

1. $\vec{AM}_0 = \vec{AB} + \vec{AC}$, $\vec{AM}_1 = \frac{3}{2}\vec{AB}$ et $\vec{AM}_{-0,5} = 3\vec{AC}$.

2. $a = \frac{3}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

3. $\vec{DM}_t = \vec{DA} + \vec{AM}_t = \frac{1-t}{1+t} \left(-\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC} \right)$

4. $f'(t) = \frac{-2}{(1+t)^2}$ donc f est décroissante.

5. M_t appartient au plan (ABD).

126. Système particulier

On obtient :
$$\begin{cases} x = \frac{a}{c}k \\ y = \frac{b}{c}k \\ z = k \end{cases}$$

127. Section

A. 1. (IJ)
$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

2. OK

3. On a le système :
$$\begin{cases} 1-t = \frac{3}{4} + k \left(a - \frac{3}{4} \right) \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t = k \\ t = 1-k \end{cases}$$

qui donne $k = t = \frac{1}{2}$ et qui doit vérifier la première

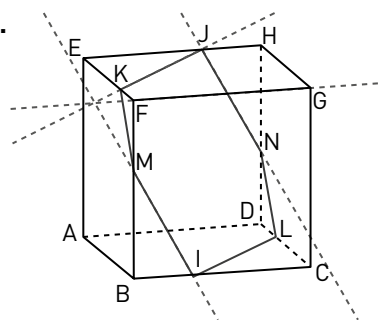
équation : $\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(a - \frac{3}{4} \right) \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

4. $L \left(\frac{1}{4}; 1; 0 \right)$

B. 1. $\vec{IL} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{JK} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ opposé donc IKJL est un

parallélogramme.

2. 3. 4.



128. Représentations paramétriques

1. A(1 ; 1 ; 1)

2. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u'} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas combinai-

son linéaire car le système :
$$\begin{cases} 2 = -b \\ -8 = -a + 4b \\ 1 = -3a \end{cases}$$
 n'a pas

de solution, donc B n'appartient pas au plan.

3. a) $f(t) = (1+t)^2 + (4+4t)^2 + 1 = 17t^2 + 34t + 18$

b) Minimum pour $t_0 = -1$.

c) $M_0(3; -7; 1)$

d) C'est le projeté orthogonal du point B sur la droite d' .

129. Aire maximale

1. L'intersection du plan et de la droite (AB) est la parallèle à (BC) passant par M et l'intersection du plan et de la droite (CD) est la parallèle à (AD) passant par M.

2. Un rectangle.

3. $A(x) = x(8-x) = -x^2 + 8x$

4. Cette aire est maximale pour $x_0 = 4$ c'est-à-dire quand M est au milieu du segment et alors la section est un carré.

130. Mouvement d'un point

1. La vitesse est donnée par :
$$\begin{cases} x'(t) = 2 \\ y'(t) = 1 \\ z'(t) = 3 \end{cases}$$
 qui est bien constante.

2. La vitesse est donnée par :
$$\begin{cases} x'(t) = 2 - 2t \\ y'(t) = 0 \\ z'(t) = 0 \end{cases}$$
 puis

$$x''(t) = -2$$

l'accélération par : $y''(t) = 0$

$$z''(t) = 0$$

Travaux pratiques

p. 304-305

TP 1. Barycentre d'un système de points pondérés

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir la notion de barycentre.

A. Avec deux points

1. $\vec{AG} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{AB}$

2. Ici : $\vec{AG} = \frac{3}{4} \vec{AB}$.

3. Si a et b sont de même signe alors G est entre A et B et sinon il est à l'extérieur du segment [AB].

4. Dans ce cas G n'existe pas.

B. Avec plusieurs points

1. $a\vec{GA} + b\vec{GB} + c\vec{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (a+b)\vec{GH} + a\vec{HA} + b\vec{HB} + c\vec{GC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\vec{GH} + c\vec{GC} = \vec{0}$$

2. On construit H barycentre de (A, 1) (B, 2) qui vérifie donc : $\vec{AH} = \frac{2}{3} \vec{AB}$, puis ensuite G est le milieu du segment [HC] car les coefficients de H et de C sont égaux.

3. De même on construit le barycentre H de (A, -1) (B, 3) qui vérifie $\vec{AH} = \frac{3}{2} \vec{AB}$ et le barycentre

K de (C, 2) (D, 1) qui vérifie $\vec{CK} = \frac{1}{3} \vec{CD}$ et enfin G est

le barycentre de (H, 2) (K, 3) et vérifie $\vec{HG} = \frac{3}{5} \vec{HK}$.

C. Terre-Lune

1. 2. Le barycentre vérifie : $\vec{AG} = \frac{m_L}{m_L + m_T} \vec{AB} = \frac{1}{82} \vec{AB}$

ce qui donne $AG = 4\,688$ km donc à l'intérieur de la Terre.

TP 2. Utilisations du barycentre d'un système de points pondérés

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Exploiter une application du TP 1.

1. Le barycentre H de (A, 1) (B, 1) est le milieu du segment [AB] et G est alors le barycentre de (H, 2) (C, 1) et vérifie alors : $\vec{CG} = \frac{2}{3} \vec{CH}$ c'est donc le centre de gravité du triangle BCD.

2. a) On a : $\vec{CE} = \vec{BD} = \vec{BE} + \vec{ED}$ et donc E est barycentre de (B, 1) (C, -1) (D, -1).

b) G est barycentre de $\{A, 1\} \{C, 1\} \{D, 1\}$ donc G est barycentre de $\{A, 1\} \{B, 1\} \{E, 1\}$ et donc de $\{I, 2\} \{E, 1\}$.

c) On a : $\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{IE}$.

3. a) A est barycentre de $\{C, 1\} \{J, 1\}$, B de $\{A, 1\} \{K, 1\}$ et C de $\{B, 1\} \{I, 1\}$.

b) Le centre gravité de IJK est isobarycentre de $\{I, 1\} \{J, 1\} \{K, 1\}$ donc de $\{C, 2\} \{B, -1\} \{A, 2\} \{C, -1\} \{B, 2\} \{A, -1\}$ c'est-à-dire de $\{A, 1\} \{B, 1\} \{C, 1\}$ donc c'est aussi le centre de gravité de ABC.

4. On regroupe les points deux à deux pour les bimédianes et par trois pour les médianes.

TP 3. Fonction vectorielle de Leibniz

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Étudier une fonction particulière.

A. Cas où $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ et $\alpha_1 \neq 0$

$$1. \vec{f}(M) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\vec{MG}_i + \vec{G_iA_i}) = 0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{G_iA_i}$$

$$2. \text{D'où : } \vec{f}(M) = \alpha_1 \vec{G_1A_1}.$$

B. Cas où $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$

$$1. \vec{f}(M) = \sum_{i=1}^n (\vec{MG} + \vec{GA_i}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{MG} \right)$$

$$2. \text{a) } 2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 4\vec{MG}$$

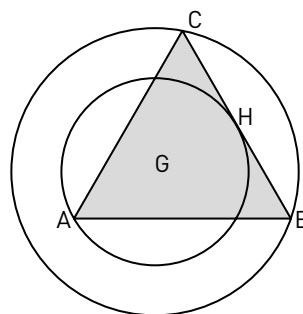
b) Cela revient à : $4\vec{MG} = 8\sqrt{7}$ soit encore : $\vec{MG} = 2\sqrt{7}$ et donc M appartient au cercle de centre G et de rayon $2\sqrt{7}$.

c) On construit G à l'aide du milieu H de [BC] et alors G est milieu de [AH].

On a de plus : $AH = 4\sqrt{3}$ et donc $AG = GH = 2\sqrt{3}$.

Puis Pythagore dans BGH nous donne :

$$BG = \sqrt{16 + 12} = 2\sqrt{7}.$$



d) L'ensemble cherché est entre les deux cercles.

CHAPITRE 10 Produit scalaire et plans de l'espace

Manuel p. 306-333

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Nous verrons tout d'abord l'utilisation du produit scalaire dans l'espace. Nous verrons ensuite l'introduction de l'équation cartésienne d'un plan afin de manipuler les intersections dans l'espace, les projetés orthogonaux et les distances.

Objectifs

- Calculer un produit scalaire et l'utiliser pour calculer un angle ou une longueur.
- Déterminer une équation cartésienne d'un plan.
- Déterminer la distance entre un point et son projeté orthogonal sur un plan.
- Résoudre des problèmes de grandeurs et de mesures dans l'espace.
- Déterminer une intersection entre un plan et une droite quelconques.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 307

1. Calculer des produits scalaires dans le plan

a) $\vec{AB} \cdot \vec{OE} = 6 \times 3 = 18$

b) $\vec{AC} \cdot \vec{DE} = 6 \times 3 = 18$

c) $\vec{CB} \cdot \vec{OD} = 6\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times \cos 105^\circ$

d) $\vec{CO} \cdot \vec{OE} = (3 + 3\sqrt{2}) \times 3$

2. Déterminer un vecteur normal à une droite

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer une équation cartésienne d'une droite

a) $-x - 3y - 7 = 0$

b) $x - y + 1 = 0$

c) $-2x + 3y - 13 = 0$

d) $x + 2y = 0$

4. Déterminer

le projeté orthogonal sur une droite

a) La perpendiculaire passant par A a pour équation : $2x + y - 5 = 0$. Les coordonnées du projeté vérifient le système : $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ -x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$ ce qui donne

le point $\left(\frac{12}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

b) La perpendiculaire passant par A a pour équation : $x - 3y - 5 = 0$. Les coordonnées du projeté vérifient le système : $\begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ 3x + y + 4 = 0 \end{cases}$ ce qui donne le

point $\left(-\frac{7}{10}; -\frac{19}{10}\right)$.

c) La perpendiculaire passant par A a pour équation : $2x + 3y - 5 = 0$. Les coordonnées du projeté vérifient le système : $\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ -3x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$ ce qui donne

le point $\left(\frac{4}{13}; -\frac{7}{13}\right)$.

d) La perpendiculaire passant par A a pour équation : $2x + y - 5 = 0$. Les coordonnées du projeté vérifient le système : $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$ ce qui donne

le point $\left(\frac{12}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

Activités

p. 308

1 Découvrir le produit scalaire dans l'espace

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Découvrir le produit scalaire dans l'espace.

1. a) Ils sont sur une face du cube.

b) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = a^2$ par projection.

2. $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BH} = 2a^2$, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BF} = a^2$, $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{PG} = \frac{1}{2}a^2$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CG} = 0$.

3. a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CQ} = -\frac{1}{2}a^2$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}a^2$.

b) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ})$

4. a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HE} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF} = a^2$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{HE} = 0$, $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$, $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{HE} = -a^2$, $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$ donc par somme le produit scalaire est nul.

b) Donc $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HF} = 0$ on en déduit que (AG) et (HF) sont orthogonales.

5. a) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AG} \cdot (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}) = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GH} = 2a^2 + (-a^2) = a^2$

b) Par ailleurs

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BH} = AG \times BH \times \cos \alpha \Leftrightarrow a^2 = a\sqrt{3} \times a\sqrt{3} \times \cos \alpha$$

d'où $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ et donc l'angle entre les diagonales vaut environ $70,53^\circ$.

2 Imaginer les équations de plans de l'espace

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir les équations de plans dans l'espace.

A. Des plans particuliers du cube

1. (ABC) a pour équation $z = 0$.

2. (EFG) $z = 1$, (ABE) $y = 0$, (CDE) $y = 1$, (ADE) $x = 0$ et (BCG) $x = 1$.

3. (BD) $y = -x + 1$

4. F(1 ; 0 ; 1) et H(0 ; 1 ; 1).

B. Étude du plan (AFH)

$$1. \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE} \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}) = \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CG} = -1 + 1 = 0$$

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{EH} = 1 - 1 = 0$$

2. (CE) est perpendiculaire au plan (AFH)

3. Par conséquent (CE) est orthogonale à toutes les droites du plan (AFH).

4. $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AM} = -x - y + z$ et donc une équation du plan est $-x - y + z = 0$.

3 Observer

un projeté orthogonal dans l'espace

- **Durée estimée :** 20 min

- **Objectif :** Découvrir le projeté orthogonal dans l'espace.

1. Un vecteur normal est : $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$2. d \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 2 - k \\ z = -3 + 3k \end{cases}$$

3. Système à 4 équations.

4. On obtient l'équation : $2(-1 + 2k) - (2 - k) + 3(-3 + 3k) - 1 = 0$ qui donne $k = 1$ et donc H(1 ; 1 ; 0).

5. H, M(2 ; 0 ; -1) et N(0 ; 2 ; 1).

6. $AM = \sqrt{17}$, $AN = \sqrt{17}$ et $AH = \sqrt{14}$.

7. C'est la plus petite.

4 Manipuler le tétraèdre régulier

- **Durée estimée :** 15 min

- **Objectif :** Découvrir des propriétés du tétraèdre régulier.

1. À l'aide de la relation de Chasles on obtient : $\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HG} = 4\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{AG} = \vec{0}$.

$$2. \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = a^2 \cos - a^2 \cos 60 = 0$$

3. Elles sont orthogonales.

$$\begin{aligned} 4. \vec{AG} \cdot \vec{BC} &= (\vec{AD} + \vec{DG}) \cdot \vec{BC} \\ &= \vec{AD} \cdot \vec{BC} + \vec{DG} \cdot \vec{BC} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

5. Elle est perpendiculaire au plan.

À vous de jouer

p. 311

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 0 - 3 = -9$

2. $\vec{AC} \cdot \vec{AF} = a\sqrt{2} \times a\sqrt{2} \times \cos 60 = a^2$

3. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3\sqrt{2} \times AC \times \cos 60$
 $\Leftrightarrow -6 = 3\sqrt{2} \times AC \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $AC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3 + 6 + 0 = 3$

et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{10} \times \sqrt{14} \times \cos \alpha$

donc $\cos \alpha = \frac{3}{2\sqrt{35}}$ d'où : $\alpha \approx 75,31^\circ$.

5. De la forme $2x - 3y - 4z + d = 0$ et passe par C
 donc : $-4 - 3 + 12 + d = 0$ donc : $2x - 3y - 4z - 5 = 0$.

6. De la forme $-3y + 5z + d = 0$ et passe par G donc :
 $-3 + 5 + d = 0$ donc : $-3y + 5z - 2 = 0$.

7. La droite perpendiculaire passant par C a pour

représentation :
$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = -1 + k \end{cases}$$

L'intersection avec le plan donne : $2(1 + 2k) - 3(2 - 3k) + [-1 + k] - 1 = 0$ d'où : $k = \frac{3}{7}$ et le projeté de C

est donc le point : $H\left(\frac{13}{7}; \frac{5}{7}; -\frac{4}{7}\right)$ et la distance est :

$$CH = \frac{3\sqrt{14}}{7}.$$

8. Le plan passant par B et perpendiculaire à la droite a pour équation : $3x + y - 2z + 3 = 0$.

L'intersection de ce plan et de la droite vérifie :

$$3(2 + 3k) + [-1 + k] - 2(-2k) + 3 = 0 \text{ d'où } k = -\frac{4}{7} \text{ et}$$

on obtient le point $H\left(\frac{2}{7}; -\frac{11}{7}; \frac{8}{7}\right)$ et la distance

$$BH = \frac{\sqrt{707}}{7}.$$

9. 1. On a : $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{IK} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{IL} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. $V = \frac{1}{3} \times \frac{IJ \times IK}{2} \times IL = \frac{4^3}{6} = \frac{32}{3}$

10. On a : $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ alors :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow 24 = \sqrt{33} \times 6 \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{4}{\sqrt{33}} \text{ et } \widehat{BAC} \approx 45,87^\circ.$$

De même : $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BA \times BC \times \cos \widehat{ABC}$

$$\Leftrightarrow 9 = \sqrt{33} \times \sqrt{21} \times \cos \widehat{ABC}$$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{3}{\sqrt{77}} \text{ et } \widehat{ABC} \approx 70,01^\circ.$$

11. 1. On a : $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas ortho-

gonaux donc la droite et le plan ne sont pas parallèles donc ils sont sécants.

2. On a : $[2 + 2k] + [1 - k] - 2k = 0$ d'où $k = 3$ et le point d'intersection est le point : $[8; -2; 3]$.

12. 1. On a : $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas ortho-

gonaux donc la droite et le plan ne sont pas parallèles donc ils sont sécants.

2. On a : $-[-1 + 3k] + 3[1 + 2k] - 4[3 - k] + 1 = 0$ d'où $k = 1$ et le point d'intersection est le point : $[2; 3; 2]$.

$$13. \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} \\ = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$14. \text{ On a : } \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs n'étant pas 2 à 2 colinéaires alors les plans sont sécants.

Exercices apprendre à démontrer p. 316

Pour s'entraîner

Considérons les droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, et un point A de l'espace.

Si les deux droites sont orthogonales alors $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ mais la parallèle à d passant par A admet le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur directeur et la parallèle à d' passant par A admet le vecteur $\vec{u}'$ comme vecteur directeur.

Comme $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$ et que les deux parallèles ont un point commun alors elles sont perpendiculaires.

Réciproquement si deux droites sont perpendiculaires alors toute parallèle à l'une est orthogonale à toute parallèle à l'autre.

Exercices calculs et automatismes p. 317

15. Produit scalaire

- a) b) b) a) c) b) d) a)

16. Équation de plan

- a) b) b) b) c) b) d) d)

17. Produits scalaires

- a) Vrai b) Faux c) Faux
d) Faux e) Vrai f) Faux

18. Orthogonale ou non

- c)

19. Perpendiculaire ou non

- a)

20. Orthogonaux ou non

- a) Non b) Oui c) Non d) Non

21. Quelle méthode ?

- a) a) b) c) c) b) d) b)

Exercices d'application

p. 318

Calculer un produit scalaire

22. a) $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{HF} = -a^2$ b) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$
c) $\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{3}$ d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AN} = a^2$
e) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BH} = \frac{a^2}{2}$ f) $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{2}$

23. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 - 2 + 3 = 1$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 - 3 + 6 = 3$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 + 2 - 6 = -4$

d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 9 + 5 + 6 = 20$

24. a) $t(t+1) + 2t + 2 = 0$ d'où $t = -1$ ou $t = -2$.

b) $t^2 - 1 - 2 - 1 = 0$ d'où $t = 2$ ou $t = -2$.

c) $2t(t+1) + 2t + 2 = 0$ d'où $t = -1$.

d) $-t^2 + 2t + 0 = 0$ d'où $t = 0$ ou $t = 2$.

25. 1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -24$ donc

elles ne sont pas perpendiculaires.

2. $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ donc elles sont orthogonales.

26. On calcule les trois normes et les trois produits scalaires.

27. Oui car on rentre les coordonnées des vecteurs.

Utiliser un produit scalaire

28. $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$

29. $\vec{u}_4$

30. 1. $\vec{u} \cdot \vec{i} = 2$, $\vec{u} \cdot \vec{j} = \sqrt{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{k} = \sqrt{2}$.

2. $\vec{u} = 2\sqrt{2}$ d'où $\cos \widehat{ui} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\widehat{ui} = \frac{\pi}{4}$,

$\cos \widehat{uj} = \frac{1}{2}$ et $\widehat{uj} = \frac{\pi}{3}$ et $\cos \widehat{uk} = \frac{1}{2}$ et $\widehat{uk} = \frac{\pi}{3}$.

31. $\vec{JD} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{JI} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d'où $\vec{JD} \cdot \vec{JI} = \frac{1}{4}$ et alors

$\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \cos \widehat{DJI}$ donc $\cos \widehat{DJI} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $\widehat{DJI} \approx 73,2^\circ$.

32. 1. $AI = AJ = \sqrt{3}$ et $IJ = \frac{1}{2}BD = 1$.

2. $\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AD}) = \frac{5}{2}$

3. $\cos \widehat{IAJ} = \frac{5}{6}$ d'où $\widehat{IAJ} \approx 33,6^\circ$.

33. $\vec{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{AE} \cdot \vec{BH} = 1$ alors :

$1 = 1 \times \sqrt{3} \times \cos \theta$ donc $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

34. 1. $\vec{MN} \cdot \vec{MP} = \vec{MN} \cdot \vec{MP'} + \vec{MN} \cdot \vec{P'P} = 6 + 0 = 6$

2. D'où $6 = 3 \times 4 \times \cos \widehat{PMN}$ donc $\widehat{PMN} = 60^\circ$.

3. $NP = \frac{NP'}{\cos 60} = 2$

35. $\vec{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{AG} \cdot \vec{DF} = 1$ alors :

$1 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \cos \theta$ donc $\cos \theta = \frac{1}{3}$ et l'angle entre ses diagonales vaut $70,53^\circ$.

Déterminer une équation cartésienne d'un plan

36. 1. $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

2. $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ donc les plans sont perpendiculaires.

37. 1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$ donc les plans sont perpendiculaires.

38. a) $-x + 4z - 5 = 0$

b) $-x - y + 2z - 2 = 0$

c) $-x - 2y = 0$

d) $z = 0$

39. $\vec{AC} \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc de la forme $7x - 3y - z + d = 0$ et

passé par B donc $7x - 3y - z - 5 = 0$.

40. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

41. $2x - 3y + 7z + 7 = 0$

42. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et le milieu de $[AB] \left(-\frac{1}{2}; 4; -1 \right)$ donc le plan est : $x + 2y - 4z - \frac{23}{2} = 0$.

43. 1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

2. Un vecteur normal vérifie : $\begin{cases} a - 2b - c = 0 \\ -a - 2b + c = 0 \end{cases}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le plan est : $x + z - 2 = 0$.

Déterminer la distance entre un point et son projeté orthogonal

44. 1. $\overrightarrow{HA} = \vec{n}$ et H appartient au plan.

2. $AH = 3\sqrt{3}$

45. a) La droite orthogonale passant par A a pour

représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 3 + 4k \end{cases}$ que l'on

remplace dans l'équation du plan pour trouver $k = -\frac{3}{29}$ et alors $H\left(\frac{23}{29}; \frac{67}{29}; \frac{75}{29}\right)$.

b) La droite orthogonale passant par A a pour

représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$ que l'on

remplace dans l'équation du plan pour trouver $k = -\frac{2}{3}$ et alors $H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

c) La droite orthogonale passant par A a pour

représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -1 + k \\ y = -4 + 2k \\ z = 3 - 11k \end{cases}$ que l'on

l'on remplace dans l'équation du plan pour trouver $k = \frac{1}{2}$ et alors $H\left(-\frac{1}{2}; -3; -\frac{5}{2}\right)$.

46. a) La droite orthogonale passant par A a pour

représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3k \\ y = 1 - k \\ z = 2 + k \end{cases}$ que l'on

remplace dans l'équation du plan pour trouver $k = -1$ et alors $H(-3; 2; 1)$ et $AH = \sqrt{11}$.

b) La droite orthogonale passant par O a pour

représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 5k \\ y = -2k \\ z = k \end{cases}$ que l'on

remplace dans l'équation du plan pour trouver

$k = \frac{1}{10}$ et alors $H\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{10}\right)$ et $OH = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

47. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

48. 1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x = 5 + 2k \\ y = 6 - 3k \\ z = 1 \end{cases}$

3. On remplace pour obtenir $k = \frac{8}{13}$ et le projeté est $H\left(\frac{81}{13}; \frac{54}{13}; 1\right)$.

4. La distance est alors $DH = \frac{8}{13}\sqrt{13}$.

Résoudre des problèmes de grandeurs et de mesures dans l'espace

49. 1. $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FM}) \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FN}) = EF^2 = a^2$

2. $\overrightarrow{EM} \cdot \overrightarrow{EN} = EM \times EN \times \cos \widehat{MEN}$

$\Leftrightarrow a^2 = \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \frac{a\sqrt{5}}{2} \times \cos \widehat{MEN}$ d'où : $\cos \widehat{MEN} = \frac{4}{5}$ et

$\widehat{MEN} \approx 36,87^\circ$.

50. 1. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc

BCD est rectangle en B.

2. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs pré-

cédents donc la droite est perpendiculaire au plan.

3. $AB = 6$

$$4. V = \frac{1}{3} \times \frac{BC \times BD}{2} \times AB = 4$$

51. 1. DHM rectangle en D car (DH) perpendiculaire au plan (ABD).

$$2. \tan \widehat{DMH} = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ donc } \widehat{DMH} \approx 41,81^\circ.$$

Déterminer une intersection de droites et de plans

52. a) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc la droite est parallèle au plan.

b) $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$ donc la droite n'est pas parallèle au plan et on remplace, ce qui donne :

$$1 + k - 3(-3k) + 1 + k - 1 = 0$$

$$\text{d'où } k = -\frac{1}{11} \text{ et le point est : } \left(\frac{10}{11}; \frac{3}{11}; \frac{10}{11} \right).$$

c) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc la droite est parallèle au plan, on prend un point de la droite et il est aussi dans le plan donc la droite est incluse dans le plan.

d) $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc la droite est parallèle au plan, on prend un point de la droite et il est aussi dans le plan donc la droite est incluse dans le plan.

53. a) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc la

droite est parallèle au plan et ils ont un point commun donc la droite est incluse dans le plan.

b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni ortho-

gonaux donc le point d'intersection existe et est $(5; 1; 4)$.

c) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni ortho-

gonaux donc le point d'intersection existe et est $\left(\frac{17}{3}; \frac{10}{3}; -5 \right)$.

d) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc la droite

est perpendiculaire au plan et le point d'intersection existe et est $(-2; -2; 0)$.

e) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni ortho-

gonaux donc le point d'intersection existe et est $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{3}{2}; \frac{7}{6} \right)$.

54. 1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni

orthogonaux donc le point d'intersection existe.

$$2. \left(1; \frac{13}{5}; -\frac{4}{5} \right)$$

55. a) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni

orthogonaux donc le point d'intersection existe et est $(-8; 2; -4)$.

b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni ortho-

gonaux donc le point d'intersection existe et est $(-13; -4; 27)$.

c) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc la droite

est parallèle au plan et ils n'ont pas de point commun donc la droite est parallèle au plan.

56. a) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni

orthogonaux donc la droite d'intersection existe et

est donnée par :
$$\begin{cases} x = \frac{18}{5} - \frac{13}{5}k \\ y = -\frac{3}{5} + \frac{3}{5}k \\ z = k \end{cases}$$

b) $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans

sont parallèles.

c) $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni ortho-

gonaux donc la droite d'intersection existe et est

donnée par :
$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -4 + 2k \\ z = k \end{cases}$$

57. a) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni

orthogonaux donc la droite d'intersection existe et

est donnée par :
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{2}{3}k \\ y = -1 + \frac{7}{3}k \\ z = k \end{cases}$$

b) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans

sont parallèles. Ici confondus.

c) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni ortho-

gonaux donc la droite d'intersection existe et est

donnée par :
$$\begin{cases} x = \frac{5}{7} + \frac{1}{7}k \\ y = -\frac{6}{7} + \frac{3}{7}k \\ z = k \end{cases}$$

d) $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont ni colinéaires, ni ortho-

gonaux donc la droite d'intersection existe et est

donnée par :
$$\begin{cases} x = \frac{8}{7} - \frac{23}{7}k \\ y = -\frac{9}{7} - \frac{3}{7}k \\ z = k \end{cases}$$

58. 1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux donc la

droite d'intersection existe.

2. Un vecteur directeur vérifie le système :

$$\begin{cases} 3a - 2b + 4c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} \text{ soit par exemple le vecteur : } \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{11}{7} \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{cases} x = -\frac{5}{7} - \frac{2}{7}k \\ y = -\frac{11}{7} + \frac{11}{7}k \\ z = k \end{cases}$$

59. 1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les

plans sont parallèles.

2. a) $A(1 ; 0 ; 2)$

b) $B(0 ; 1 ; 3)$

3. $AB = \sqrt{3}$

4. $\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas orthogonal aux vecteurs nor-

maux donc la droite (AB) n'est pas perpendiculaire aux deux plans et AB n'est pas minimale.

Étudier des problèmes de position relative dans l'espace

60. 1. $\vec{DF} \cdot \vec{IP} = (\vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BF}) \cdot \vec{IP} = 0 - 1 + 1 = 0$

2. $\vec{DF} \cdot \vec{LP} = (\vec{DH} + \vec{HG} + \vec{GF}) \cdot \vec{LP} = 0 - 1 + 1 = 0$

3. La droite est perpendiculaire au plan.

61. 1. C'est un parallélogramme.

2. Car ICHJ est un parallélogramme.

3. $\vec{FK} \cdot \vec{IJ} = \vec{FK} \cdot \vec{CH} = (\vec{FC} + \vec{CK}) \cdot \vec{CH} = -a^2 + a^2 = 0$

4. De même

$\vec{FK} \cdot \vec{AI} = (\vec{FC} + \vec{CK}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BI}) = 0 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + 0 = 0$

donc (FK) est orthogonale à deux droites sécantes du plan, donc elle est perpendiculaire au plan.

62. 1. $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

2. $\vec{AD} \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs précédents.

63. 1. $\vec{OA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{OB} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

2. $\vec{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs précédents.

Exercices d'entraînement

p. 322

Géométrie avec le produit scalaire

64. $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2$
 $= (\vec{AB} - \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) + (\vec{CD} - \vec{DA}) \cdot (\vec{CD} + \vec{DA})$
 $= (\vec{AB} - \vec{BC}) \cdot \vec{AC} + (\vec{CD} - \vec{DA}) \cdot \vec{CA}$
 $= \vec{AC} \cdot (\vec{AB} + \vec{CB} + \vec{DA} + \vec{DC}) = \vec{AC} \cdot 2\vec{DB}$

65. 1. $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{AC} + \vec{CB}) \cdot \vec{CD} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{AC} \cdot \vec{CD} = \vec{BC} \cdot \vec{CD}$

2. Équivalence car produits scalaires nuls.

Plans dans l'espace

66. 1. $\vec{IG} \cdot \vec{IA} = \vec{IF} \cdot \vec{IA} + \vec{FG} \cdot \vec{IA} = -\frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$

2. $IG = IA = \frac{\sqrt{5}}{2}$ d'où $\cos \widehat{AIG} = -\frac{1}{5}$ et $\widehat{AIG} \approx 101,54^\circ$.

3. $\vec{BJ} \cdot \vec{IG} = \vec{BJ} \cdot \vec{IA} = 0$ avec les coordonnées.

4. (AIG) : $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$

5. $-x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$

67. 1. $\vec{AP} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\vec{EM} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{EN} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$ le premier est

bien orthogonal aux deux autres.

2. (EMN) : $-x + y + \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} = 0$

68. 1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$

2. $V = \frac{1}{3} \times \frac{OA \times OB}{2} \times OC = \frac{abc}{6}$

69. On remplace les coordonnées du point dans l'équation du plan.

70. 1. B(1 ; 0 ; 0), C(0 ; 1 ; 0) et D(0 ; 0 ; 1)
donc (BCD) $x + y + z - 1 = 0$.

2. (IJ) $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}k \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k \end{cases}$

3. K(-1 ; 0 ; 2)

Intersections en tout genre

71. 1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires.

2. (ABC) : $-2x + y + 3z - 6 = 0$

3. $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est vecteur normal au plan.

4. (DE) $\begin{cases} x = 6 - 2k \\ y = -7 + k \\ z = -1 + 3k \end{cases}$

5. F(2 ; -5 ; 5)

72. Leurs vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ sont

orthogonaux et le système :

$\begin{cases} -1 + 3k = 2 - k' \\ 1 + 3k = 1 + 2k' \\ -3 + k = -3k' \end{cases}$ n'a pas de solution donc elles sont orthogonales.

73. 1. $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

2. Pour $k = 0$ le point (2 ; -1 ; 0) n'appartient pas au plan.

3. Pour $k = 1$.

4. $-x + y + z = 0$

5. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 1 - 5t \\ z = t \end{cases}$

Projetés orthogonaux

74. 1. $-x + y + z = 0$

2. $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

3. a) $K \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$

b) $d = BK = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

4. a) $K' \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{4}{3} \right)$

b) $d' = BK' = \frac{\sqrt{6}}{3}$

5. $\begin{cases} x = k \\ y = 1 + 2k \\ z = 1 - k \end{cases}$

6. $H \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$

7. $BH^2 = \frac{18}{9} = d^2 + d'^2$

8. Théorème de Pythagore.

75. 1. $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur normal.

(MNP) $x + 2y + 2z - 2 = 0$

$$2. d \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + 2k \\ z = 1 + 2k \end{cases}$$

$$3. K \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) \text{ et } GK = 1.$$

$$4. V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(\text{MEDI}) \times GK = \frac{3}{8}$$

$$76. 1. d \begin{cases} x = -2 + k \\ y = 8 + 5k \\ z = 4 - k \end{cases} \text{ et } d' \begin{cases} x = 5 + 2k' \\ y = 1 + k' \\ z = -3 + k' \end{cases}$$

2. Leurs vecteurs directeurs non colinéaires.

3. H pour $k = -1$ et K pour $k' = -1$.

$$4. \overrightarrow{HK} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} \text{ est orthogonal aux deux vecteurs directeurs.}$$

$$5. HK = 3\sqrt{14}$$

77. Travail de l'élève.

Exercices bilan

p. 324

78. Quatre points

$$1. \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ sont orthogonaux donc BCD}$$

rectangle en C et son aire vaut :

$$\frac{BC \times CD}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{70}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{14}.$$

2. a) Il est orthogonal aux deux vecteurs précédents.

$$b) (BCD) -2x + 3y + z - 1 = 0$$

$$3. d \begin{cases} x = 5 - 2k \\ y = -5 + 3k \\ z = 2 + k \end{cases}$$

$$4. H \left(\frac{11}{7}; \frac{1}{7}; \frac{26}{7} \right)$$

$$5. V = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \sqrt{14} \times AH = 20$$

$$6. \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 66 = \sqrt{76} \sqrt{61} \cos \widehat{BAC} \text{ d'où } \widehat{BAC} \approx 14,2^\circ.$$

79. Deux plans

1. Oui.

$$2. a) -x + y - z = 0$$

b) Pour $k = 1$.

3. a) Oui.

$$b) A' \left(\frac{1}{2}; 2; \frac{3}{2} \right) \text{ et } B'(-1; 1; 2) \text{ donnent } \overrightarrow{AA'} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\overrightarrow{BB'} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ qui sont orthogonaux.}$$

c) Pour $k = -1$.

$$d) V = \frac{1}{3} \times \frac{\overrightarrow{AA'} \times \overrightarrow{BB'}}{2} \times SH = 4$$

80. Parallélisme

$$1. a) \overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ non orthogonaux.}$$

$$b) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 11 = \sqrt{101} \sqrt{60} \cos \widehat{AOB} \text{ d'où } \widehat{AOB} \approx 81,9^\circ.$$

2. Oui.

$$3. (CA) \begin{cases} x = 10k \\ y = 0 \\ z = 5 - 4k \end{cases}$$

$$4. D \left(0; 0; \frac{5}{2} \right) \text{ donc une équation du plan est :}$$

$$7x + 9y - 70z + 175 = 0.$$

$$5. F(5; 0; 3)$$

$$6. \overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 9 \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ colinéaires.}$$

81. Dans un cube

1. $I\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $J\left(1; 0; \frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$.

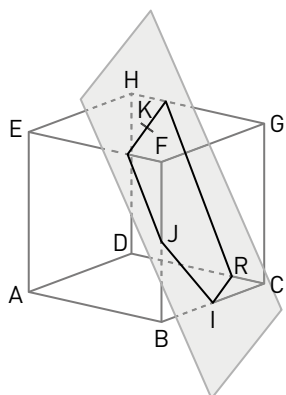
2. a) $\vec{IJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{IK} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.

b) Oui.

3. a) $\begin{cases} x = k \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

b) Pour $k = \frac{3}{4}$.

4. a) b)



82. Distance

1. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonaux au vecteur

normal.

2. (ABC) $4x + 2y + 3z - 12 = 0$

3. d) $\begin{cases} x = -5 + 4k \\ y = 2k \\ z = 1 + 3k \end{cases}$

4. $H(-1; 2; 4)$

5. $DH = \sqrt{29}$

83. Points non alignés

1. a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2$, $AB = \sqrt{17}$ et $AC = \sqrt{5}$.

b) $\cos \widehat{BAC} = \frac{2}{\sqrt{85}}$ d'où $\widehat{BAC} \approx 77^\circ$.

c) Angle différent de 0 ou π .

2. Oui.

3. Vecteurs normaux non colinéaires.

4. Le point $(-2; -4; -1)$.

Préparer le BAC Je me teste

p. 326

84. C

85. B

86. D

87. C

88. A et B

89. D

90. A

91. A

92. D

93. A

Préparer le BAC Je révise

p. 327

94. Distance

1. a) $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} = \vec{AG}$

b) $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = -1 + 1 + 0 = 0$

c) $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = -1 + 0 + 1 = 0$

d) La droite est perpendiculaire au plan.

2. Dans le plan AEGC, K est aux $\frac{2}{3}$ à partir de E jusqu'au milieu de [AC].

3. a) (BDE) $x + y + z - 1 = 0$

b) d) $\begin{cases} x = k \\ y = 1 + k \\ z = 1 + k \end{cases}$

c) L $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

d) $HL = \frac{\sqrt{3}}{3}$

95. Aire variable

1. $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{6a}$

2. a) $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{a^2 + 2}(a^2 \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BD})$

b) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{a^2 + 2}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{a^2 + 2}$ par soustrac-

tion on déduit : $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.

c) De même $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

d) K est l'intersection des hauteurs.

3. a) $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.

b) La droite est perpendiculaire au plan (MBD).

4. $BD = \sqrt{2}$ et $BM = MD = \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}$

sa hauteur vaut : $\sqrt{\frac{a^2 + 1}{a^2} - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + 2}}{a\sqrt{2}}$

et l'aire vaut : $\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{a^2 + 2}}{a\sqrt{2}}$.

96. Intersection

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ non colinéaires.

2. $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux deux vecteurs précé-

dents donc la droite est perpendiculaire au plan.

3. (ABD) $-2x + y + 3z - 6 = 0$

4. (CE) $\begin{cases} x = 6 - 2k \\ y = -7 + k \\ z = -1 + 3k \end{cases}$

5. On remplace pour obtenir $k = 2$ et donc $F(2 ; -5 ; 5)$.

97. Un volume

1. $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ non colinéaires.

2. Leur produit scalaire est nul.

3. a) Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vérifie le système :

$$\begin{cases} -a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{cases} \text{ dont une solution est } \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) (MNP) $\frac{5}{4}x - 2y + z = 0$

4. d) $\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{4}k \\ y = -2k \\ z = 1 + k \end{cases}$

5. On trouve bien K.

6. $V = \frac{1}{3} \times \frac{MN \times MP}{2} \times FK = \frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{35}} = \frac{3}{8}$

98. Pyramide

1. (SB) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + k \text{ pour } k = -\frac{1}{3} \\ z = -3k \end{cases}$

2. a) C'est le théorème du toit.

b) $V \left(-\frac{2}{3}; 0; 1 \right)$

3. a) (AE) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = -k \\ z = 0 \end{cases}$ pour $k = \frac{1}{6}$ donne K

et $\overrightarrow{UK} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$.

b) L'aire vaut :

$$\frac{1}{2} \times (UV + AE) \times UK = \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \times \frac{\sqrt{86}}{6} = \frac{5\sqrt{43}}{18}.$$

Exercices vers le supérieur

p. 329

99. Distance minimale

1. $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

2. Oui.

3. a) Oui.

b) $AM^2 = 14k^2 - 14k + 21$
 $= 7(2k^2 - 2k + 3)$

c) Décroissante puis croissante avec un minimum
 pour $x = \frac{1}{2}$.

d) $H \left(-6; -\frac{13}{2}; \frac{1}{2} \right)$

4. $2x + 3y + z + 31 = 0$

5. H appartient au plan.

100. Perpendiculaire commune

1. Le système $\begin{cases} -k = k' \\ 3 + 3k = 0 \\ 1 - k = 0 \end{cases}$ n'a pas de solution.

2. $a = 1$ et $b = 3$

3. Oui.

4. $A \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; \frac{9}{5} \right)$

5. $\begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} + t \\ z = \frac{9}{5} + 3t \end{cases}$ coupe d au point $B \left(\frac{4}{5}; 0; 0 \right)$.

6. $AB = \frac{3}{5}\sqrt{10}$

101. Droite ou plan ?

1. $\vec{AM} = k\vec{u} + t\vec{v}$

2. Plan.

3. $-5x - 6y + 7z + 24 = 0$

102. Tétraèdre

1. (CE) $\begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = k \end{cases}$

2. (AFH) $x - y + z - 1 = 0$

3. $K \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right)$

4. Vecteurs normal et directeur égaux.

5. $EK = \frac{\sqrt{3}}{3}$

6. $\vec{HK} \cdot \vec{AF} = 0$ hauteur et orthocentre.

7. Type 2.

103. Trois plans

1. $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. Sécants.

3. $d \begin{cases} x = -\frac{7}{2} - \frac{1}{2}k \\ y = 4 + k \\ z = k \end{cases}$

4. Sécants et perpendiculaires.

5. Un point unique.

104. Piège

1. Vecteurs normaux orthogonaux.

2. Oui.

3. Oui.

4. (AB) $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 1 - 2k \\ z = 3 + 2k \end{cases}$ et (CD) $\begin{cases} x = 1 - 4k' \\ y = 6 - 6k' \\ z = 2 - 4k' \end{cases}$

leur intersection est vide donc les droites ne sont pas coplanaires.

105. Plan médiateur

1. $MA = MB$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2$
 $= (x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2$
 $\Leftrightarrow 4x + 3y + z + 1 = 0$

2. Milieu $\left(-1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

3. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. C'est le plan perpendiculaire au segment et passant par son milieu.

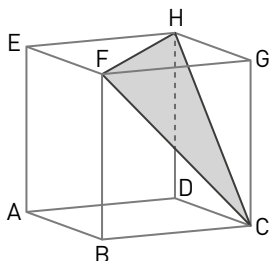
106. Théorème de De Gua De Malves

L'aire de BCD est : $\frac{1}{2} \times a\sqrt{2} \times \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ et la somme des carrés des aires des trois autres faces est :

$$\frac{1}{4}(AB^2AD^2 + AB^2AC^2 + AD^2AC^2) = \frac{1}{4} \times 3a^4 = \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

107. Représenter

À l'aide d'un cube de côté 4, l'ensemble cherché est le plan (CFH) limité au cube.



108. Point variable

1. $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{CE}$ donc parallèle au plan (IJK).

3. (BDM) - $x - y + z + 1 = 0$ et (CE) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 1 - k \\ z = k \end{cases}$ se coupent en $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

109. Trois méthodes

A. Avec le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)

1. C(1 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1) et K $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$

2. $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DG}$. donnent P $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et

Q $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

3. $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{DG} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

B. Avec une étude géométrique

1. À l'aide du théorème de Thalès.

2. (DG) est orthogonale à (CH) et (CE) et (AH) est orthogonale à (DE) et (CD).

3. (CE) est l'intersection des deux plans (CEH) et (CDE).

C. Avec le calcul vectoriel

1. $3\overrightarrow{DP} = 3\overrightarrow{DH} + 3\overrightarrow{HP} = 3\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DA}$

et $3\overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$

2. Par soustraction.

3. Ces deux produits scalaires sont nuls.

Donc (PQ) est orthogonale à (DG) et (AH).

110. Double pyramide

1. (ML) est parallèle à (BD) et (IN) à (BF) qui sont perpendiculaires.

2. a) $\overrightarrow{NC} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ML} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$

b) Leur produit scalaire est nul.

c) (NCI) a pour vecteur normal $\overrightarrow{ML}$ d'où : $x - y = 0$.

3. a) On vérifie.

b) $\overrightarrow{DF} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc perpendiculaire.

c) Il s'agit de la droite (EG).

111. Bicoïn

A. 1. d est orthogonale à P donc elle est orthogonale à toute droite de ce plan et en particulier à (AC).

Donc (BD) est orthogonale à (AC).

(AC) est perpendiculaire à (AB) car ABC est rectangle en A.

(AC) est donc orthogonale à deux droites sécantes (BD) et (AB) du plan (BAD), on en déduit que (AC) est orthogonale au plan (BAD).

2. d est perpendiculaire à P donc ABD et CBD sont rectangle en B. ABC est rectangle en A d'après l'énoncé et on a montré dans la question précédente que (AC) est orthogonale au plan (BAD).

Donc toute droite de ce plan, donc en particulier (AC), est perpendiculaire à (AD) en A. Le triangle ACD est rectangle comme le triangle ABC. Finalement, toutes ses faces étant des triangles rectangles, ABCD est bien un bicoïn.

3. a) [CD] est l'hypoténuse de BCD, donc le côté le plus grand : $CD > CB$ et $CD > BD$. [CD] est l'hypoténuse de ACD, donc $CD > CA$, $CD > AD$.

Or [AD] est l'hypoténuse de ABD

donc $AD > AB$ et d'après le résultat précédent

$CD > AD > AB$.

Finalement [CD] est la plus longue arête du bicoïn car elle est plus longue que les cinq autres

b) I milieu de l'hypoténuse de BCD rectangle en D est le centre du cercle circonscrit à BCD on a alors $IB = IC = ID$.

De même dans ACD rectangle en A, I milieu de l'hypoténuse [CD] est le centre du cercle circonscrit à ACD et on a :

$ID = IC = IA$.

Finalement $IA = IB = IC = ID$, donc I est équidistant des quatre sommets du bicoïn ABCD.

B. 1. $2x - 2y + z + 1 = 0$

2. Pour $t = 2$.

3. On vérifie pour C et $AB^2 = 36 = AC^2$, $BC^2 = 72$ donc ABC rectangle et isocèle en A.

4. a) $M \in d$ et $B \in d$ donc $d = (MB)$. De plus B et A sont deux points distincts de P donc $(AB) \subset P$ et on sait que d est perpendiculaire à P donc orthogonale à toute droite de P. On en déduit que (MB) est perpendiculaire à (AB).

Finalement on a donc bien ABM rectangle en B.

b) $BM = BA$

$$\Leftrightarrow (2t - 4)^2 + (-2t + 4)^2 + (t - 2)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t = 0 \text{ donc } t = 0 \text{ ou } t = 4.$$

c) $M_1(1 ; 9 ; -3)$ et $M_2(9 ; 1 ; 1)$.

C. ABCD est un bicoïn car ABC est rectangle en B (voir question 3.) et D est un point de la perpendiculaire au plan (ABC) passant par B. D'après la question 3.b. de la partie A, on sait alors que le milieu I de [CD] est équidistant des quatre sommets du bicoïn.

Le centre de la sphère circonscrite à ABCD est donc $I(8 ; 2 ; -4)$ milieu de [CD].

Le rayon de la sphère est $CI = 3\sqrt{3}$.

112. Des drones

A. Étude de la trajectoire du drone d'Alex

$$1. \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2k \\ z = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k \end{cases}$$

2. a) $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PU} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonaux à $\vec{n}$.

b) $y - z - 10 = 0$

3. On résout le système et cela donne I pour $k = \frac{25}{6}$.

4. Les points se situant sur l'obstacle PQTU ont une cote comprise entre 0 et 1.

Or, le point I, intersection des droites (AB), décrivant la trajectoire du drone d'Alex, et du plan (PQU), dont l'obstacle est le rectangle PQTU, a une cote de $7/3 > 2$, donc ne peut se situer sur le rectangle PQTU.

Ainsi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

B. Distance minimale entre les deux trajectoires

$$1. \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = -a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{CD}$$

2. D'après ce qui est dit dans l'énoncé, la distance MN est minimale si et seulement si (MN) et (AB) sont perpendiculaires et (MN) et (CD) sont perpendiculaires.

Ceci équivaut à $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ orthogonaux et $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{CD}$

orthogonaux soit au système :

$$\begin{cases} 2(2-2a) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}a = 0 \\ -2(2-2b) = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } b = 1 \text{ et } a = \frac{16}{17}.$$

$$3. \text{ Alors } MN = \frac{2\sqrt{17}}{17} \approx 0,485071, \text{ l'unité étant égale}$$

à 1 décimètre la distance minimale est donc environ $4,85 > 4$: la consigne est respectée.

113. Produit vectoriel

1. On calcule les produits scalaires qui sont bien nuls.

$$2. \vec{n} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} bc' = b'c \\ ca' = c'a \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Leftrightarrow \text{colinéaires.}$$

$$3. \text{ a) } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ non colinéaires.}$$

$$\text{b) } \vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } (ABC) -2x + 3y + z + 5 = 0$$

4. On vérifie bien.

$$114. 1. \text{ a) } \overrightarrow{FH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{FK} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ orthogonaux à } \vec{n}.$$

$$\text{b) } 4x + 4y - 3z - 1 = 0$$

$$\text{c) } 4x + 4y - 3z + 1 = 0$$

$$\text{d) } M' \left(0; 0; \frac{1}{3} \right)$$

$$2. \text{ a) } \begin{cases} x = 4k \\ y = 4k \\ z = 1 - 3k \end{cases}$$

$$\text{b) } (ABC) z = 0 \text{ donc } L \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; 0 \right).$$

c) Le point L de Δ n'appartient pas au plan (ABF) mais E appartient à ce plan; les droites Δ et (BF) ne sont donc pas sécantes. Les droites Δ et (CG)

sont sécantes au point $\left(1; 1; \frac{1}{4} \right)$.

115. Droites sécantes ?

$$1. \text{ a) } P(2; 0; 0), Q(0; 0; 2), R(0; 4; 6) \text{ et } \Omega(3; 3; 3).$$

$$\text{b) Il faut résoudre le système : } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = -2 + 2c = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = -2 + 4b + 6c = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } c = 1 \text{ et } b = -1.$$

c) Oui.

$$2. \text{ a) } \begin{cases} x = 3 + k \\ y = 3 - k \\ z = 3 + k \end{cases}$$

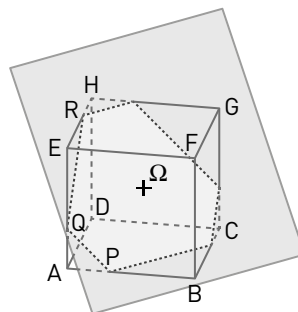
b) Oui.

$$\text{c) } \Omega I = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. a) Oui.

$$\text{b) } \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{QR} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ colinéaires.}$$

c) La section est :



116. A. 1. $\left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

2. a) $\vec{IF} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{FJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$ orthogonaux à $\vec{n}$.

b) $-x + 3y + 5z - 4 = 0$

3. a) $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 3k \\ z = 5k \end{cases}$

b) $M\left(\frac{6}{7}; \frac{3}{7}; \frac{5}{7}\right)$

4. a) $\vec{BM} \cdot \vec{BF} = \frac{5}{7}$

b) $\frac{5}{7} = 1 \times \frac{\sqrt{35}}{7} \times \cos \widehat{MBF}$ d'où $\widehat{MBF} \approx 32^\circ$.

B. 1. Les faces (BCGF) et (ADHE) sont parallèles. Le plan (FIJ) les coupe donc suivant deux parallèles (FJ) et (KL).

De même les faces (ABFE) et (DCGH) sont parallèles : le plan (FIJ) les coupe donc suivant deux parallèles (FK) et (JL).

Le quadrilatère (FJLK) ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme.

2. $FJ^2 = 1 + \frac{a^2}{4} = JL^2 = 1 + (a - 1)^2 \Leftrightarrow (3a - 2)(a - 2) = 0$

donc $a = 2$ ou $a = \frac{2}{3}$ or $0 \leq a \leq 1$ donc une seule solution.

Travaux pratiques

p. 332-333

TP 1. Étudier la position relative de deux plans

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Étudier la position entre deux plans.

A. Rechercher l'intersection

1. $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ non colinéaires.

2. $\begin{cases} x = 3 - \frac{13}{2}z \\ y = 4 - 8z \end{cases}$

3. À une droite.

4. Point $(3; 4; 0)$ et vecteur $\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Oui.

B. Rechercher un vecteur orthogonal à deux autres

1. $\begin{cases} 4a - 3b + 2c = 0 \\ -2a + b - 5c = 0 \end{cases}$

2. Deux équations et trois inconnues.

3. $\begin{cases} a = -\frac{13}{2}c \\ b = -8c \end{cases}$

4. Colinéaires.

5. Le même !

TP 2. Autour de la sphère

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir l'équation d'une sphère.

A. Équation

1. $AM = R$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$

2. $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$

3. Centre $(0; -1; 2)$ et rayon $R = 3$.

B. Position de cette sphère avec un plan

1. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 9$ de centre $B(2; -3; -1)$ et de rayon $r = 3$.

2. $H\left(\frac{8}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

3. $BH = \frac{2\sqrt{3}}{3} < 3$ donc sécant.

4. De même le projeté de B sur ce plan est $K(0 ; -1 ; 0)$ et $BK = 3$.

5. Plan tangent un seul point d'intersection K.

TP 3. Sphère circonscrite à un tétraèdre

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir la position d'une sphère et d'un tétraèdre.

A. Cas général

1. Intersection des médiatrices.
2. D'après Pythagore.
3. Équidistant car dans le plan médiateur.

B. Cas de la Terre

1. $GO = \frac{1}{4}GD = \frac{1}{4}(R + OG)$ d'où $OG = \frac{R}{3}$.
2. On a : $\widehat{GAO} = \frac{1}{3}$ donc $\widehat{GAO} \approx 19,47^\circ$.
3. La latitude est $19,47^\circ$.

TP 4. Fonction scalaire de Leibniz

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir la fonction scalaire de Leibniz.

$$\text{A. } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i MA_i^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AA_i})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i MA^2 + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AA_i} + \sum_{i=1}^n \alpha_i AA_i^2 \\ &= 0 + 2 \overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} + f(A) \end{aligned}$$

$$\text{B. } \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$$

$$\begin{aligned} f(M) &= f(G) + \sum_{i=1}^n \alpha_i MG^2 + 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA_i} \\ &= f(G) + \sum_{i=1}^n \alpha_i MG^2 \end{aligned}$$

C. Applications

$$\text{1. a) } f(M) = MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2$$

b) Comme $1 + 2 - 3 = 0$ alors

$$f(M) = 2AB^2 - 3AC^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{2AB} - \overrightarrow{3AC}) = k$$

Si $\overrightarrow{2AB} - \overrightarrow{3AC} = \vec{0}$ et $2AB^2 - 3AC^2 \neq k$ alors pas de solution.

Si $\overrightarrow{2AB} - \overrightarrow{3AC} = \vec{0}$ et $2AB^2 - 3AC^2 = k$ alors espace entier.

Si $\overrightarrow{2AB} - \overrightarrow{3AC} \neq \vec{0}$ alors une droite perpendiculaire à ce vecteur.

$$\text{2. a) } f(M) = 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 = 4MG^2 + f(G)$$

b) Si $k < f(G)$ alors pas de solution.

Si $k = f(G)$ alors le point G.

Si $k > f(G)$ alors une sphère.

CHAPITRE 11 Dénombrement

Manuel p. 334-361

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Au cours de ce chapitre nous allons formaliser les notions élémentaires de dénombrements selon les différents cas.

Objectifs

- Déterminer des ensembles.
- Déterminer une partie d'un ensemble.
- Dénombrer des ensembles simples.
- Utiliser le principe multiplicatif.
- Dénombrer des combinaisons.
- Utiliser des combinaisons.
- Utiliser une représentation adaptée.
- Dénombrer dans différents cas.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 335

1. Connaître les notations mathématiques

1. a) $\notin$ b) $\in$ c) $\notin$ d) $\notin$
2. a) $\subset$ b) $\not\subset$ c) $\subset$ d) $\subset$

2. Construire les ensembles ou des uplets

1. $\{M ; A ; T ; H ; É ; I ; Q ; U ; E ; S\}$
2. $\{4 , 2 , 1\}$ et $\{1 , 4 , 2\}$.

3. Construire un tableau

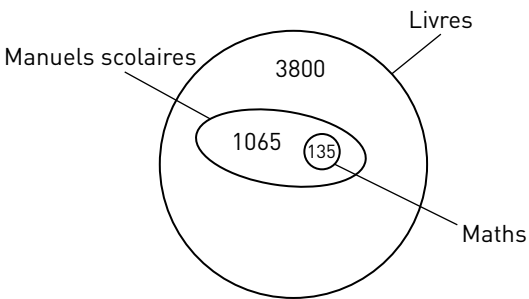
1.

	Quilles bleues	Quilles rouges	Total
Forme cylindrique	8	10	18
Forme cubique	3	4	7
Total	11	14	25

2. Il y en a 10.

4. Construire un diagramme

1.



2. Il y a 3 800 livres qui ne sont pas des manuels scolaires.

Activités p. 336-337

1 Construire des ensembles avec un ensemble

- **Durée estimée :** 15 min
 - **Objectif :** Construire des ensembles à partir d'un même ensemble.
1. a) 3 singletons.
b) 3 paires.
c) 1 seul.

- 2. a) 4 singletons.
- b) 6 paires.
- c) 4 ensembles à trois éléments.
- d) 1 seul.
- 3. a) n singletons.
- b) $\frac{n(n-1)}{2}$ paires.
- c) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ ensembles à 3 éléments.
- d) Et ainsi de suite $\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\dots 1}$.

2 Construire p -listes (ou p -uplets) avec un ensemble

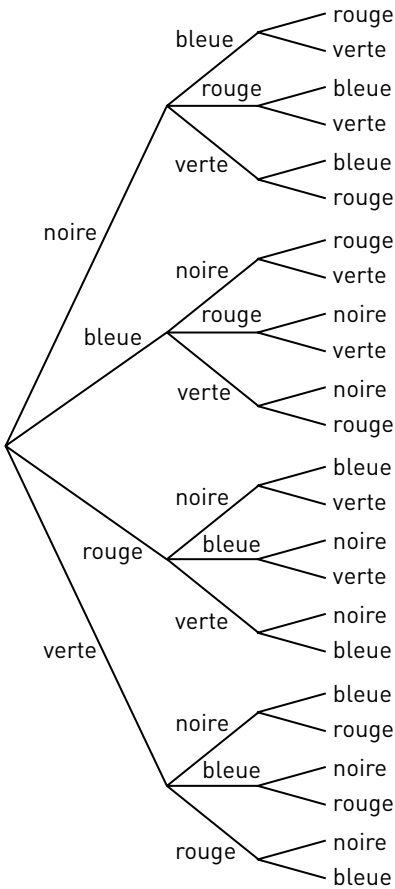
- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Construire des listes à partir d'un même ensemble.
- 1. a) 3 1-uplets.
- b) 9 paires.
- c) 27 triplets.
- 2. a) 4 1-uplet.
- b) 16 paires.
- c) 64 triplets.
- d) 4^4 quadruplets.

3 Construire des arbres

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Construire des arbres pour dénombrer.

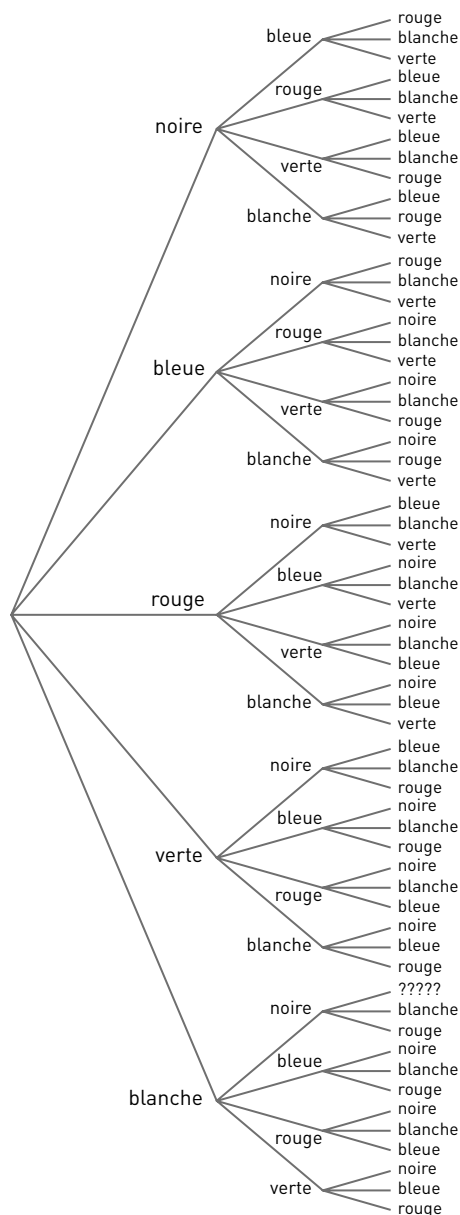
A. Sans remise

1. a)



b) $4 \times 3 \times 2 = 24$

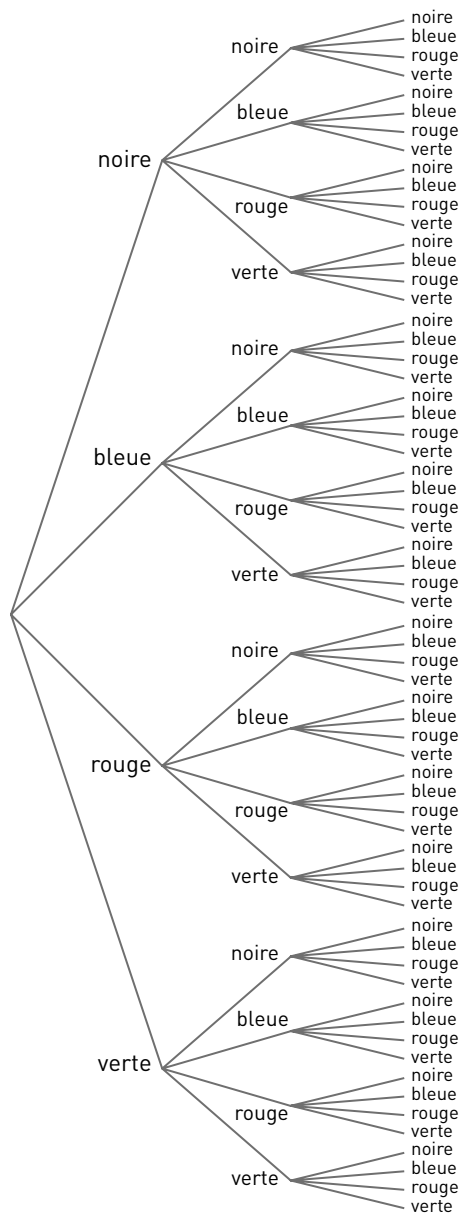
2. a)



b) $5 \times 4 \times 3 = 60$

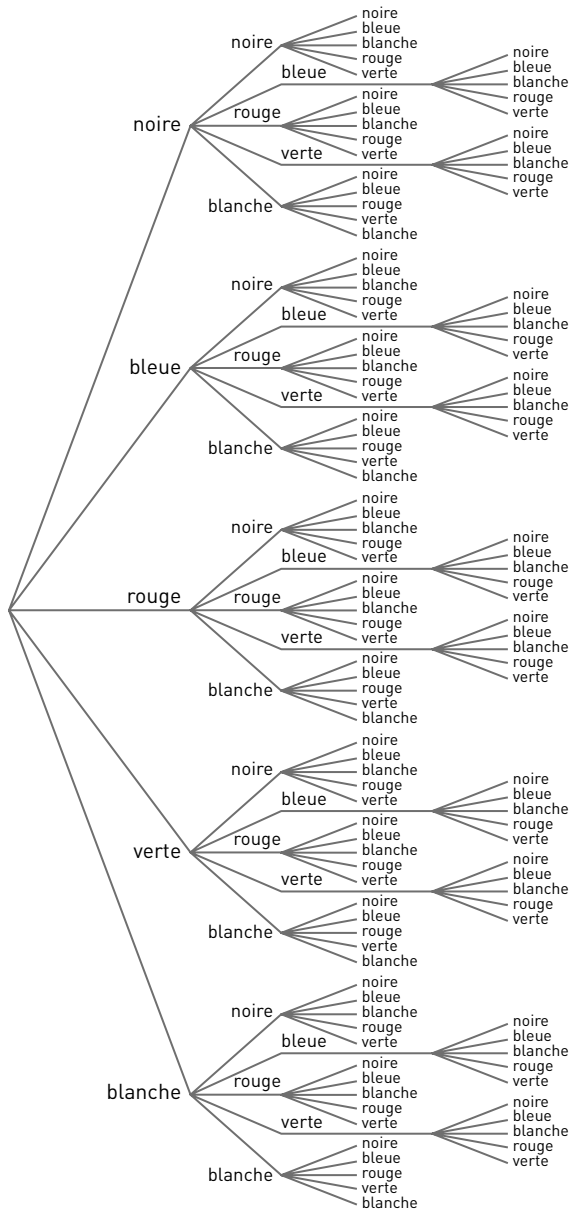
B. Avec remise

1. a)



b) $4^3 = 64$

2. a)



b) $5^3 = 125$

C. Comparaison de p -uplet et d'un sensemble

1. Le nombre d'ensembles est 4, le nombre de listes sans remise est 24 et le nombre de listes avec remise est 64.

2. La répétition et l'ordre interviennent ou pas.

3. En divisant par les ordres possibles des 3 lettres à savoir $3 \times 2 \times 1 = 6$.

À vous de jouer

p. 338

1. 1. $A \cup B = \{n ; a ; t ; h ; y ; g ; l ; v\}$,
 $A \cap B = \{n , a\}$ et $A \times B = \{(n , y) ; (n , a) ; (n , g) ; (n , l) ; (n , v) ; (n , n) ; (a , y) ; (a , a) ; (a , g) ; (a , l) ; (a , v) ; (a , n) ; (t , y) ; (t , a) ; (t , g) ; (t , l) ; (t , v) ; (t , n) ; (h , y) ; (h , a) ; (h , g) ; (h , l) ; (h , v) ; (h , n)\}$
2. $(n , a , t) , (n , a , h) , (n , t , h) , (n , t , a) , (n , h , a) , (n , h , t) , (a , n , t) , (a , n , h) , (a , t , h) , (a , t , n) , (a , h , n) , (a , h , t) , (t , a , n) , (t , a , h) , (t , n , h) , (t , n , a) , (t , h , a) , (t , h , n) , (h , n , a) , (h , n , t) , (h , a , t) , (h , a , n) , (h , t , n) , (h , t , a)$

2. Le produit cartésien de $\{d ; k\}$ et $\{v ; g ; i\}$.

3. Il y en a 17.

4.

	F	G	Total
Spé	40	20	60
Non spé	70	20	90
Total	110	40	150

5. Il y en a 2^{20} .

6. Il y en a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

7. Le nombre de podiums est $8 \times 7 \times 6 = 336$.

8. Il y en a $4 \times 5 \times 3 = 60$.

9. Le nombre de tirages est : $\binom{102}{7}$.

10. Il y en a $\binom{52}{5}$.

11. Le nombre de façons de choisir est : $\binom{10}{3} \times \binom{5}{2}$
 $= 120 \times 10 = 1\,200$

12. 1. Il y a $\binom{32}{2} = 496$ choix.

2. Il y a $19 \times 13 = 247$ choix.

13. 1.

	Oui	Nin	Total
Question 1	10	2	12
Question 2	3	3	6
Total	13	5	18

2. Il y a 13 personnes qui ont répondu oui aux deux questions.

14. 1. On utilise un arbre.

2. Trop !

3. Il y en a $5 \times 4 \times 3 = 60$.

15. 1. $\binom{16}{4} = 1\,820$

2. $\binom{20}{4} - \binom{16}{4} = 4\,845 - 1\,820 = 3\,025$

3. $\binom{20}{4} - \binom{16}{4} - \binom{4}{1} \times \binom{16}{3}$
 $= 3\,025 - 4 \times 560 = 785$

16. 1. Il y en a $\binom{20}{10}$.

2. Il y en a $\binom{11}{10} = 11$.

3. Il y en a $\binom{11}{5} \times \binom{9}{5}$.

4. Il y en a $11 \times \binom{9}{9} + 9 \times \binom{11}{9} = 506$.

17. 1. Il y en a $\binom{13}{4} - \binom{8}{4}$.

2. Il y en a $\binom{8}{1} \binom{5}{3}$.

3. Il y en a $\binom{13}{4} - \binom{8}{4} - \binom{5}{4}$.

4. Il y en a $\binom{5}{2} \binom{8}{2}$.

5. Il y en a comme la question 4.

Exercices

apprendre à démontrer

p. 346

Pour s'entraîner

$$\begin{aligned} & \binom{n-2}{p} + 2 \binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} \\ &= \frac{(n-2)!}{p!(n-p-2)!} + 2 \frac{(n-2)!}{(p-1)!(n-p-1)!} + \frac{(n-2)!}{(p-2)!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-2)!}{p!(n-p)!} [(n-p)(n-p-1) + 2p(n-p) + p(p-1)] \\ &= \frac{(n-2)!}{p!(n-p)!} (n^2 - n) = \frac{(n-2)!}{p!(n-p)!} n(n-1) \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \end{aligned}$$

Exercices

calculs et automatismes

p. 347

18. Avec des factorielles

- a) 17×16 b) $6 - 1 = 5$
 c) $1/6$ d) 84
 e) 364 f) $13 \times 11 \times 10 \times 9$

19. Autre écriture

- a) $\frac{10!}{3!}$ b) $\frac{9!}{4! \times 3!}$ c) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$
 d) $\frac{(n-2)!}{n!}$ e) $\frac{10!3!}{6!6!}$ f) $\frac{(n+1)!}{(n-3)!4!}$

20. Avec des combinaisons

- a) $\frac{6 \times 5}{2}$ b) $\frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2}$ c) $\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}$
 d) $\frac{\frac{7 \times 6}{2}}{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2}} = \frac{1}{4}$ e) $\frac{9 \times 8}{5 \times 4} = \frac{18}{5}$ f) $\frac{7 \times 6 \times 5}{10 \times 9 \times 8} = \frac{7}{24}$

g) $\frac{\frac{5 \times 4}{2} \times \frac{6 \times 5}{2}}{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2}} = \frac{25}{14}$

h) $\frac{\frac{5 \times 4}{2} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2}}{\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2}} = \frac{40}{7}$

21. Développements

1. c) 2. b) 3. c) 4. b)

22. Combinaisons

- a) Non. b) Oui. c) Oui.
d) Non. e) Non. f) Oui.

23. Représentation graphique

1. a) 2. b) et c) 3. c)

24. Calcul mental

- a) 210 b) 1680 c) 126
d) 33/2 e) 66 f) 54

25. Lecture graphique

1. 3 000
2. 1 930
3. 800

Exercices d'application

p. 348

Déterminer des ensembles

26. Il y a 20 sous-ensembles

qui sont : $\{a ; b ; c\}, \{a ; b ; d\}, \{a ; b ; e\}, \{a ; b ; f\},$
 $\{b ; c ; d\}, \{b ; c ; e\}, \{b ; c ; f\},$
 $\{c ; d ; e\}, \{c ; d ; f\},$
 $\{d ; e ; f\},$
 $\{a ; c ; d\}, \{a ; c ; e\}, \{a ; c ; f\}, \{a ; d ; e\}, \{a ; d ; f\},$
 $\{a ; e ; f\},$
 $\{b ; d ; e\}, \{b ; d ; f\}, \{b ; e ; f\},$
 $\{c ; e ; f\}.$

27. a) $M \cup S = \{m ; a ; g ; n ; r ; d ; s ; e ; t ; h\}$

b) $M \cap S = \{m ; a\}$

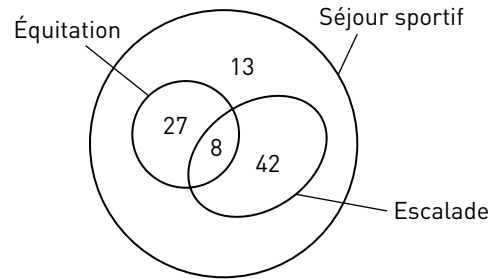
28. 1. Il y en a 45.

2. $C \times L = \{[0, m] ; [1, m] ; [2, m] ; [3, m] ; [4, m] ;$
 $[5, m] ; [6, m] ; [7, m] ; [8, m] ; [9, m] ;$

$[0, s] ; [1, s] ; [2, s] ; [3, s] ; [4, s] ; [5, s] ;$
 $[6, s] ; [7, s] ; [8, s] ; [9, s]\}$

Utiliser un diagramme

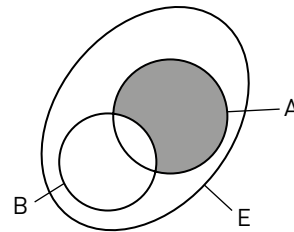
29. 1. Le diagramme donne :



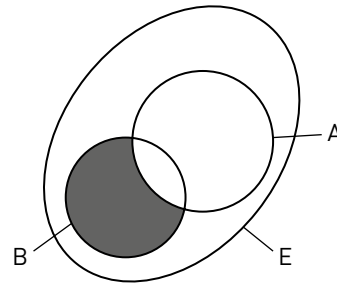
2. 42 adolescents.

3. 27 adolescents.

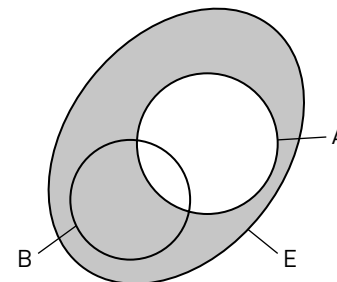
30. 1.



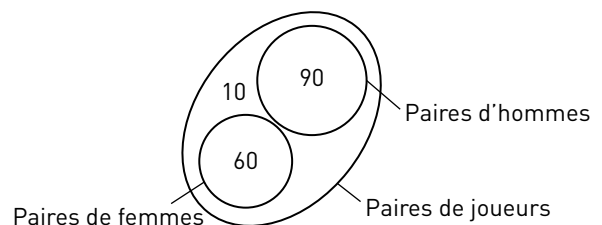
2.



3.

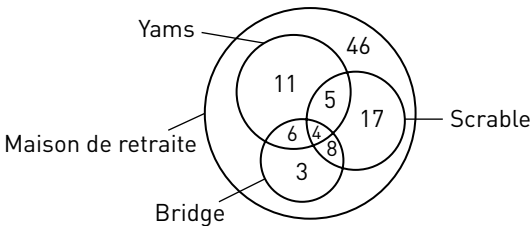


31. 1.



- 2. Il y en a 10.
- 3. Cf. réponse 1.

32. 1.



- 2. Il y en a 46.
- 3. Il y en a 31.
- 4. Il y en a 19.

Tirages successifs avec remise

- 33. $15 \times 12 = 180$
- 34. Il y en a 4^{15} soit plus d'un milliard.
- 35. Il y en a 10^{14} soit cent mille milliards.
- 36. Il y en a $2^8 = 256$.
- 37. Il y en a 10^{10} .

Tirages successifs sans remise

- 38. $38 \times 37 \times 36 = 50\,616$.
- 39. Il y en a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
- 40. Il y en a $35 \times 34 \times 33$.
- 41. Il y en a $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.
- 42. 1. Il y en a $7! = 5\,040$.
- 2. Il y en a $4! \times 3! = 144$.
- 3. Il y en a 144 également.
- 43. Il y en a $10 \times 9 \times 6 = 540$.
- 44. Il y a $23 \times 22 \times 21$ tiercés et $23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19$ quintés.
- 45. 1. Il y a $7!$ anagrammes.
- 2. Il y en a $4 \times 5! \times 3$.

- 3. Il y en a $3 \times 5! \times 2$.
- 4. Il y en a $4 \times 5! \times 3$.
- 5. Il y en a $3 \times 5! \times 4$.

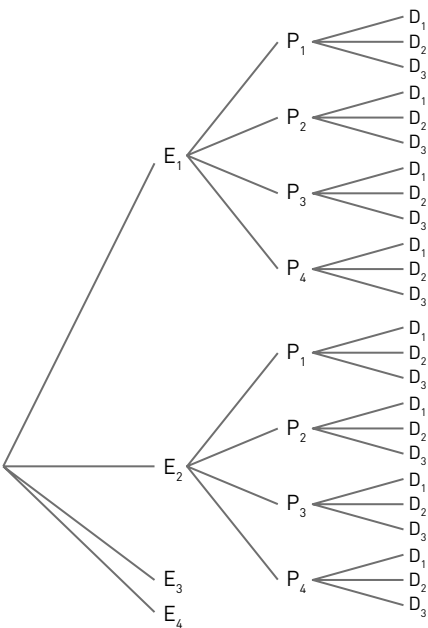
- 46. 1. Les résultats possibles sont : 900, 800, 700, 600, 500, 400, 300, 200, 100, 0.
- 2. Pour 900 il y a 6 façons, pour 800 il y a 12 façons, pour 700 il y a 30 façons, pour 600 il y a 18 façons, pour 500 il y a 21 façons, pour 400 il y a 42 façons, pour 300 il y a 42 façons, pour 200 il y a 12 façons, pour 100 il y a 6 façons, pour 0 il y a une seule façon.

- 47. 1. a) Il y en a $6! = 720$.
- b) Une seule.
- 2. De $4! \times 2! = 48$ façons.

- 48. 1. De 0 à 16 000 points.
- 2. Il y en a beaucoup : en faire seulement quelques-uns !

Représentations

49. 1.



2. Le nombre de menus est de : $3 \times 4 \times 3 = 36$.

50. 1.

	Défaut de carre	Pas de défaut de carre	Total
Défaut de fixation	10	30	40
Pas de défaut de fixation	140	820	960
Total	150	850	1000

2. Il y en a $140 + 30 = 170$.

3. Il y en a 10.

51. 1. Un arbre à 6 branches, chacune ayant 5 sous-branches, qui ont chacune encore 4 branches.

2. Il y en a $6 \times 5 \times 4 = 120$.

3. Il y en a $4 \times 3 \times 2 = 24$.

52. 1.

	Crawl	Brasse	Dos	Total
Filles	50	50	60	160
Garçons	70	10	10	90
Total	120	60	70	250

2. Il y en a 50.

Tirages simultanés

53. Le nombre de grilles possibles est : $\binom{49}{6}$

= 13 983 816

54. 1. Il y a $\binom{57}{6}$ façons.

2. Il y en a $\binom{32}{6}$.

3. Il y en a $\binom{32}{6} + \binom{25}{6}$.

4. Il y en a $\binom{57}{6} - \left(\binom{32}{6} + \binom{25}{6} \right)$.

55. a) Le nombre de tirages est $\binom{15}{2}$.

b) Il y en a 8×7 .

c) Il y en a $\binom{8}{2}$.

56. 1. Il y en a $\binom{20}{6}$.

2. Yann peut figurer dans $\binom{19}{5}$ groupes.

3. On peut former $2 \times \binom{18}{5}$ groupes.

57. 1. Il peut former 5×4 paires.

2. Alors il peut former 4 paires.

58. 1. Il y en a $\binom{30}{4}$.

2. Il y en a $\binom{18}{4}$.

3. Il y en a $\binom{30}{4} - \binom{18}{4}$.

59. 1. Il y a 3^3 façons.

2. Il y a 3^3 façons.

3. Il y a 3^3 façons.

60. 1. Il y en a $\binom{39}{3} \times \binom{61}{4}$.

2. Il y en a $2 \times \binom{61}{6}$.

3. Il y en a $\binom{15}{2} \times \binom{61}{5}$.

4. Il y en a $6 \times 8 \times 6 \times 9 \times 2 \times 15 \times 6$.

Utiliser les dénombrements

61. 1. Le nombre de résultats possibles est de : 6^5 .

2. Avec trois faces numérotées 1, le nombre de résultats possibles est : 6^3 .

3. Aucune face numérotées 1 : 5^5 .

4. Au moins une : $6^5 - 5^5$.

5. Exactement une face : 1×5^4 .

62. 1. a) Il y en a $\binom{8}{3}$.

b) Il y en a $\binom{3}{2} \times \binom{5}{1}$.

c) Il y en a $\binom{8}{3} - \binom{5}{3}$.

2. Il y en a $\binom{3}{2} + \binom{2}{2} + \binom{3}{2}$.

63. 1. Il y en a $\binom{9}{3}$.

2. Il y en a autant.

3. Il y en a $\binom{6}{2} \times \binom{3}{1}$.

64. 1. a) Il y en a 9^2 .

b) Il y en a $1 \times 9 + 9 \times 1$.

c) Il y en a 3^2 .

2. a) Il y en a 9×8 .

b) Il y en a $1 \times 8 + 8 \times 1$.

c) Il y en a 3×2 .

3. a) Il y en a $\binom{9}{2}$.

b) Il y en a 1×8 .

c) Il y en a $\binom{3}{2}$.

Exercices d'entraînement

p. 352

Représentations

65. 1. Un arbre à six branches, trois fois de suite.

2. Il y en a 6^3 .

3. Il y en a 6.

4. Il y en a $6 \times 5 \times 4$.

5. Il y en a $6 \times 1 \times 5$.

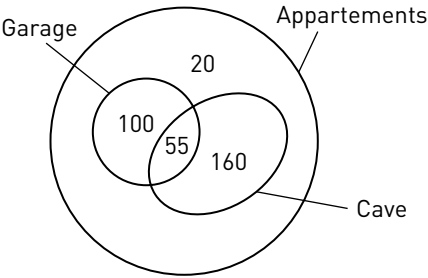
66. 1.

	+	-	Total
A	381	72	453
B	62	12	74
AB	28	5	33
O	350	90	440
Total	821	179	1 000

2. Il y en a 28.

3. Il y en a $453 + 821 - 381 = 873$.

67. 1.



2. Il y en a 100.

3. Il y en a $335 - 20 = 315$.

68. Il y en a $6!$.

69. 1. Il y en a 8^5 .

2. Avec les vides cela donne $9^5 = 59\,049$.

70. Il y en a $5!$.

71. 1. a) Il y en a 5^3 .

b) Il y en a 4^3 .

c) Il y en a $9^3 - 5^3$.

d) Il y en a 5×4^2 .

2. a) Il y en a $5 \times 4 \times 3$.

b) Il y en a $4 \times 3 \times 2$.

c) Il y en a $9 \times 8 \times 7 - 5 \times 4 \times 3$.

d) Il y en a $5 \times 4 \times 3$.

3. a) Il y en a $\binom{5}{3}$.

b) Il y en a $\binom{4}{3}$.

c) Il y en a $\binom{9}{3} - \binom{5}{3}$.

d) Il y en a $5 \times \binom{4}{2}$.

72. 1. Il y en a 10×11 .

2. Dans 4×7 cas.

3. Dans 4×11 cas.

4. Dans 10×7 cas.

5. Dans 6×4 cas.

73. 1. Il y en a $\binom{32}{5}$.

2. a) Il y en a $\binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{20}{4}$.

b) Il y en a $\binom{32}{5} - 1 \times \binom{8}{0} \binom{23}{4} - 1 \times \binom{8}{1} \binom{23}{3}$.

c) Il y en a $1 \times \binom{7}{1} \binom{21}{3} + \binom{3}{1} \binom{7}{2} \binom{21}{2}$.

74. a) Il y en a $13 \times \binom{48}{1} = 624$.

b) Il y en a $13 \times \binom{4}{2} \times \binom{12}{3} \times 4 \times 4 \times 4 = 1\,098\,240$.

c) Il y en a $\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{44}{1}$
 $= 123\,552$.

d) Il y en a $13 \times \binom{4}{3} \times 12 \times \binom{4}{2} = 3\,744$.

e) Il y en a $13 \times \binom{4}{3} \times \binom{48}{2} - 3\,744 = 54\,912$.

75. 1. Il y en a $\binom{13}{5}$.

2. Il y en a $\binom{13}{2} \times \binom{39}{3}$.

3. Il y en a $1 \times \binom{3}{1} \times \binom{12}{2} \times \binom{36}{1} + \binom{3}{2} \times \binom{12}{3}$.

76. 1. Il y en a $\binom{8}{2} \times \binom{24}{2}$.

2. Il y en a $8 \times 7 \times 24 \times 23$.

3. Il y en a $8^2 \times 24^2$.

Démonstrations

77. $n \binom{n-1}{p-1} = n \frac{(n-1)!}{(n-p)! (p-1)!} = \frac{n! p}{(n-p)! p!} = p \binom{n}{p}$

78. $(n-p) \frac{n!}{(n-p)! p!} = \frac{n! (p+1)}{(n-p-1)! (p+1)!} = (p+1) \binom{n}{p+1}$

79. $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-p)(n-p-1)}{2} - \frac{(n-q)(n-q-1)}{2}$
 $+ \frac{(n-p-q)(n-p-q-1)}{2} = pq$

80. 1. $\binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1} = \binom{n-1}{p}$

et $\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} = \binom{n-1}{p-1}$

donne $\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

2. On peut aussi utiliser deux fois celle d'avant

$\binom{n-3}{p} + 2 \binom{n-3}{p-1} + \binom{n-3}{p-2} = \binom{n-1}{p}$

et $\binom{n-3}{p-1} + 2 \binom{n-3}{p-2} + \binom{n-3}{p-3} = \binom{n-1}{p-1}$ qui donne le

résultat.

Algorithmes

81. 1. Oui.

2. a) 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

b) Ok.

82. 1. Oui.

2. a) $\emptyset$, {1}, {2}, {3}, {4}, {1 ; 2}, {1 ; 3}, {1 ; 4}, {2 ; 3}, {2 ; 4}, {3 ; 4}, {1 ; 2 ; 3}, {1 ; 2 ; 4}, {2 ; 3 ; 4}, {1 ; 2 ; 3 ; 4}

b) Ok.

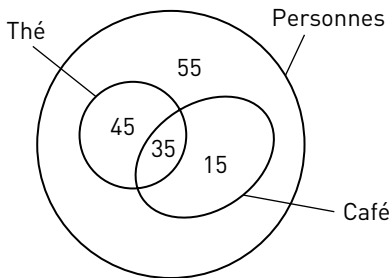
83. Travail de l'élève. Cela augmente selon le nombre de 2 et de 5 dans les décompositions en facteurs premiers des entiers consécutifs.

84. Travail de l'élève. Au cryptage de données.

Exercices bilan

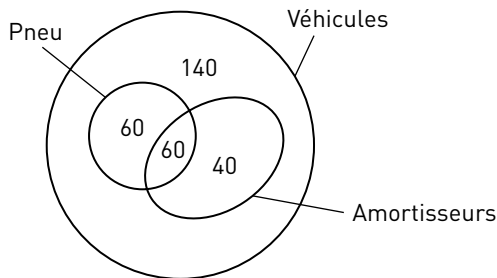
p. 354

85. Sondage 1.



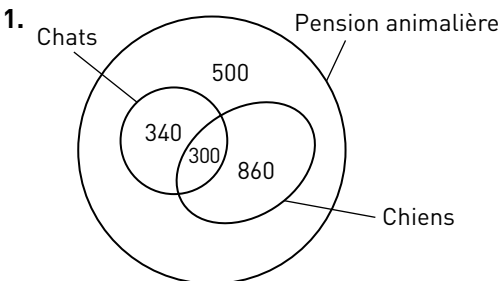
2. Il y en a 45.
3. Il y en a 15.
4. Il y en a 55.
5. Il y en a 95.

86. Prévention 1.



2. Il y en a 60.
3. Il y en a 40.
4. Il y en a 140.
5. Il y en a 160.

87. Des animaux



2. Il y en a 860.

3. Il y en a 340.

88. Histoire de dés

Il y en a $6 \times 4 = 24$.

89. Alphabet

1. Car il y a 24 lettres et pour les mots de deux lettres c'est $24^2 = 576$.

2. Il y en a 24 de longueur 1 et 24×23 de longueur 2.

3. Le nombre de mots possibles est 24^3 et le nombre de mots simples est $24 \times 23 \times 22$.

4. Le nombre de mots possibles est 24^5 et le nombre de mots simples est $24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20$.

90. Test

Il a 2^4 façons de répondre.

91. Puissance de dix

1. Il en existe 10^5

2. Il y a 3, 12, 21 30, 102, 120, 111, 201, 210, 300,... soit $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \dots$

Ce qui donne donc $\frac{p(p+1)}{2}$ de plus à chaque fois

92. Nombres à 10 chiffres

1. Il y en a 10^{10}

2. Il y en a 10 !

3. Il y en a 5^{10}

Préparer le BAC

Je me teste

p. 356

93. C

94. C

95. B

96. A

97. A

98. D

99. A

Préparer le BAC

Je révise

p. 357

100. Intersection

a) 5 b) 15 c) 10

101. Rangement

Le nombre de rangements est de : $4 \times 3 = 12$.

102. Encore des maths

Le nombre de mots est de : $5! = 120$.

103. Au tiercé

Le nombre de tiercés est de :

$$20 \times 19 \times 18 = 6\,840.$$

104. Choix

1. Le nombre de choix est de : $\binom{10}{7} = 120$.

2. Le nombre de choix devient : $\binom{3}{3} \times \binom{7}{4} = 35$.

3. Le nombre de choix devient : $\binom{4}{3} \times \binom{6}{4} = 4 \times 15 = 60$

105. Bridge

1. Le nombre de mains est de : $\binom{4}{4} \times \binom{48}{9}$.

2. Le nombre de mains est de :

$$\binom{52}{13} - \binom{48}{9}.$$

3. Le nombre de mains est de :

$$\binom{52}{13} - \binom{1}{1} \binom{13}{0} \binom{38}{12} - \binom{1}{1} \binom{13}{1} \binom{38}{11}$$

$$- \binom{1}{1} \binom{13}{2} \binom{38}{10} - \binom{1}{1} \binom{13}{3} \binom{38}{9}.$$

$$4. 4 \times \binom{13}{5} \times 3 \times \binom{13}{4} \times 2 \times \binom{13}{3} \times 1 \times \binom{13}{1}$$

106. Équations

a) $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{6} = \frac{5}{3}n^2 - \frac{4}{3}n$

Soit :

$$3n(n+1) + n(n^2-1) = 10n^2 - 8n$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 10n = 0$$

$\Leftrightarrow n(n^2 - 7n + 10) = 0$ qui a pour solutions 0, 2 et 5. On retire la première qui est impossible il en reste 2.

b) $5n = n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$$\Leftrightarrow 24n = 3n(n-1) + n(n-1)(n-2)$$

$\Leftrightarrow n^2 - 25 = 0$ car n est non nul donc une seule solution $n = 5$.

107. Somme (1)

1. On peut former $2^3 = 8$ nombres.

2. Leur somme est 1 776.

108. Somme (2)

1. On peut former $3^3 = 27$ nombres.

2. Leur somme est 10 989.

109. Gâteaux

Le nombre de répartitions est : $5 \times 4 \times 3 \times \binom{3}{2} = 180$.

110. Jeu de dés

1. Il y a $6^3 = 216$ résultats.

2. Il y en a $3^2 \times 3 = 27$.

3. Il y en a $6 \times 5 \times 4 = 120$.

4. Il y en a $6 \times 1 \times 5 = 30$.

111. Second degré

1. On peut en former : $9 \times 10 \times 10 = 900$.

2. Pour cela il faut que $c = 0$ donc il y en a : $9 \times 10 \times 1 = 90$.

Exercices vers le supérieur

p. 359

112. Digicode

1. Il y en a 3×9^3 .

2. Il y en a 3×8^3 .

3. Il y en a $3 \times 9^3 - 3 \times 8^3$.

4. Il y en a $3 \times 9 \times 8 \times 7$.

5. Il y en a $3 \times 9^3 - 3 \times 9 \times 8 \times 7$.

113. Variations autour de crayons

1. Elle en a $5 \times 4 \times 3$.

2. Elle en a $3!$.

3. Il y en a $\binom{5}{3}$.

114. Au tarot

a) Il y en a $\binom{21}{5} - \binom{17}{5}$.

b) Il y en a $\binom{4}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{10}{3} + 1 \times \binom{10}{4}$.

c) Il y en a $2 \times \binom{19}{4}$.

115. En colonie

1. Il y en a $\binom{5}{2} \times \binom{55}{10}$.

2. Il y en a $1 \times 4 \times \binom{55}{10}$.

3. Il y en a $2 \times 3 \times \binom{55}{10}$.

116. Podium

1. Il y en a $8 \times 7 \times 6 = 336$.

2. Il y en a $3 \times 2 \times 1 = 6$.

3. Il y en a $336 - 5 \times 4 \times 3$.

4. Il y en a $3 \times 2 \times 5$.

117. Droites

Le nombre de points est $\frac{n(n-1)}{2}$.

118. Région d'un disque

1. Il y en a $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$.

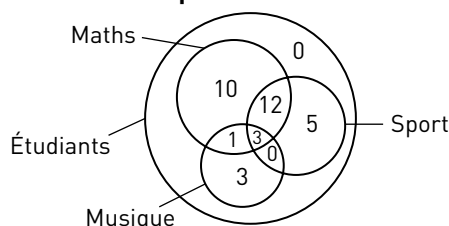
2. 1, 2, 4, 8, 16, 31, ...

119. À la poste

Le nombre de combinaisons est :

$$1 \times \binom{5}{2} + 1 \times \binom{4}{4} + \binom{2}{2} \times \binom{5}{2} + \binom{2}{2} \times \binom{4}{4} + \binom{2}{1} \times \binom{5}{5} \times \binom{4}{4}$$

120. Maths et musique



Il y en a 3.

121. Sélectionneur

Il peut former $\binom{3}{1} \times \binom{17}{10}$ équipes.

122. Proverbe ?

On peut en former $6!$.

123. Gouvernement et sport

1. On peut en composer $\binom{23}{11}$.

2. On peut en composer $\frac{23!}{13!}$.

3. On peut en former 9×14 .

124. Second degré

a) $\frac{n(n-1)}{2} = 36 \Leftrightarrow n^2 - n - 72 = 0$ donc $n = 9$

b) $\frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{14n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n(n-1)$

$(n^2 - 5n - 50) = 0$ donc $n = 10$.

125. Lecture

Le nombre de façons est $16! \times 4!$.

126. Anagrammes

a) Il y en a $5!$.

b) Il y en a $\frac{8!}{3}$.

c) Il y en a $\frac{8!}{2 \times 2}$.

127. Au restaurant

Il y a $\binom{7}{3}$ répartitions possibles.

128. Au bridge

Elle peut terminer de $4^3 \times 4^2 \times 4 \times 4^2$ façons.

129. Dans le TGV

1. Il y en a 5^{23} .
2. Il y en a 7×4^{28} .

130. Dans une entreprise

1. Il y en a $\frac{p(p-1)}{2}$.
2. Il y en a $\frac{q(q-1)}{2}$.
3. Il y en a pq .
4. La somme de tous les saluts est la somme des trois questions précédentes d'une part et d'autre part il y a $p+q$ employés donc $\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$ saluts.
5. On calcule :

$$\begin{aligned} \binom{p}{2} + pq + \binom{q}{2} &= \frac{p(p-1)}{2} + pq + \frac{q(q-1)}{2} \\ &= \frac{p^2 - p + 2pq + q^2 - q}{2} \text{ d'une part et d'autre part :} \\ \binom{p+q}{2} &= \frac{(p+q)(p+q-1)}{2} = \frac{p^2 - p + 2pq + q^2 - q}{2}. \end{aligned}$$

131. Démonstration (1)

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \text{ d'après la formule de}$$

Pascal et par télescopage il reste $\binom{n+1}{p+1} - 0 = \binom{n+1}{p+1}$

$$\text{car } \binom{p}{p+1} = 0.$$

132. Intersection et réunion

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. C'est la distributivité.

133. Démonstration (2)

$$\begin{aligned} 1. \binom{n}{p} \binom{p}{k} &= \frac{n!}{(n-p)!p!} \times \frac{p!}{(p-k)!k!} \text{ et} \\ \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \times \frac{(n-k)!}{(n-p)!(p-k)!} \text{ qui sont bien} \\ &\text{égaux.} \end{aligned}$$

$$2. \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{n}{p} \binom{p}{k} = \binom{n}{p} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} = 2^p \binom{n}{p}$$

134. Démonstration (3)

$$\begin{aligned} 1. \text{ On utilise l'égalité :} \\ (1+x)^{n+p} &= (1+x)^n (1+x)^p \\ \text{qui donne à l'aide de la formule du binôme :} \\ \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k &= \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^p \binom{p}{j} x^j \right) = \sum_{k=0}^{n+p} \left(\sum_{i+j=k} \binom{n}{i} \binom{p}{j} \right) x^k \end{aligned}$$

et par identification des coefficients on a :

$$\binom{n+p}{k} = \sum_{i+j=k} \binom{n}{i} \binom{p}{j} = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{p}{k-i}.$$

$$2. \text{ Avec } n = p \text{ dans la relation précédente ce qui donne } \binom{2n}{n}.$$

Travaux pratiques

p. 360-361

TP 1. Combinaisons avec répétitions

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir les combinaisons avec répétition.

A. Différences d'énoncé

1. L'ordre.
2. $\binom{5}{3} \times 5^2 = 250$

B. Exemples

1. $\Gamma_5^3 = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$
2. $\Gamma_7^2 = \binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = 28$

TP 2. Promenade aléatoire

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir un sujet de CAPES.

1. Par exemple on peut coder 0 pour un déplacement vers l'est et 1 pour un déplacement vers le nord.

Ce qui donne pour le trajet dessiné :

011110010010110

2. Le nombre de trajets est de $\binom{15}{8} = 6\,435$.

3. Pour cela il faut dénombrer successivement les ensembles de 8-suites comportant 7 zéros, 6 zéros, ..., 0 zéro :

- avec 7 zéros et un 8, il y en a $\binom{8}{1} = 8$;
- avec 6 zéros et 3 + 5 ou 7 + 1 ou 4 + 4 ou 6 + 2, il y en a $\binom{8}{6} \binom{2}{1} \times 3 + \binom{8}{6} = 196$;
- avec 5 zéros et 6 + 1 + 1 ou 5 + 2 + 1 ou 4 + 2 + 2 ou 4 + 3 + 1 ou 3 + 3 + 2, il y en a $\binom{8}{5} \binom{3}{1} \times 3 + \binom{8}{5} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \times 2 = 1176$;
- avec 4 zéros et 5 + 1 + 1 + 1 ou 4 + 2 + 1 + 1 ou 3 + 2 + 2 + 1 ou 3 + 3 + 1 + 1 ou 2 + 2 + 2 + 2, il y en a $\binom{8}{4} \left(\binom{4}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{1} \times 2 + \binom{4}{2} + 1 \right) = 2\,450$
- avec 3 zéros et 4 + 1 + 1 + 1 + 1 ou 3 + 2 + 1 + 1 + 1 ou 2 + 2 + 2 + 1 + 1, il y en a $\binom{8}{3} \left(\binom{5}{1} + \binom{5}{1} \binom{4}{1} + \binom{5}{3} \right) = 1960$;

- avec 2 zéros et 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 ou 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1, il y en a

$$\binom{8}{2} \left(\binom{6}{1} + \binom{6}{2} \right) = 588 ;$$

- avec 1 zéro et 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, il y en a

$$\binom{8}{1} \binom{7}{1} = 56 ;$$

- avec aucun zéro il y en a une.

Donc au total cela donne aussi 6 435.

TP 3. Triangle de Pascal et binôme de Newton

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** En découvrir plus sur le triangle de Pascal.

A. Algorithme

L'algorithme fabrique le triangle de Pascal.

B. Développements

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

2. Les coefficients sont ceux de chaque ligne du triangle et les puissances de a diminuent pendant que celles de b augmentent tout en gardant la même somme.

3. $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

CHAPITRE 12 Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

Manuel p. 364-401

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre se situe dans le prolongement des deux chapitres sur les probabilités du programme de Première spécialité (« Probabilités conditionnelles » et « Variables aléatoires réelles ») et du chapitre sur « Dénombrement » de Terminale spécialité. Son objectif est double :

- faire découvrir et utiliser les variables aléatoires suivant les lois de Bernoulli et binomiale ainsi que toutes les notions en lien (épreuves de Bernoulli, schéma de Bernoulli) ;
- mobiliser et faire travailler les acquis sur les trois chapitres évoqués précédemment.

Une place particulière est donnée aux notions d'intervalle de fluctuation (bien que l'expression ne soit pas employée dans le programme, il nous a semblé utile de l'appeler ainsi) et de seuil en se dégageant du systématisme induit par l'ancien programme (« on calcule l'intervalle de fluctuation bilatéral et on regarde si la fréquence est dedans »), notamment en variant les types d'intervalles selon le contexte (à droite, à gauche ou centré), le tout dans des situations concrètes et variées.

Enfin, on trouvera de nombreux exercices et TP permettant la pratique de la programmation.

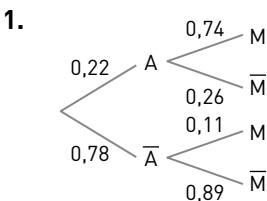
Objectifs

- Modéliser une succession d'épreuves, notamment dans le cas d'indépendance.
- Travailler avec un schéma de Bernoulli ou la loi binomiale.
- Utiliser l'espérance et l'écart-type de la loi binomiale.
- Vérifier si un événement sera réalisé à un seuil donné.
- Déterminer et utiliser un intervalle de fluctuation.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 365

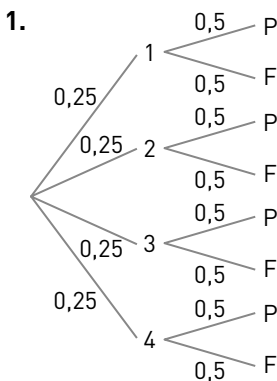
1. Utiliser un arbre pondéré



2. a) $p(A \cap M) = 0,22 \times 0,74 = 0,1628$ et
 $p(M) = 0,22 \times 0,74 + 0,78 \times 0,11 = 0,2486$.

b) $p_M(A) = \frac{p(A \cap M)}{p(M)} = \frac{0,1628}{0,2486} \approx 0,6549$

2. Représenter une succession de deux épreuves indépendantes



Lancer de pièce \ Lancer de dé	Lancer de dé			
	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
F	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. $3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$ (voir cases grisées dans le tableau).

3. Modéliser par une variable aléatoire

1.

g_i	-1	0	4	19	99
$p(G = g_i)$	0,865	0,1	0,02	0,01	0,005

2. a) • $E(G) = 0,865 \times (-1) + 0,1 \times 0 + 0,02 \times 4 + 0,01 \times 19 + 0,005 \times 99$
 $= -0,1$
- $V(G) = 0,865 \times (-1 - (-0,1))^2 + 0,1 \times (0 - (-0,1))^2 + 0,02 \times (4 - (-0,1))^2 + 0,01 \times (19 - (-0,1))^2 + 0,005 \times (99 - (-0,1))^2$
 $= 53,79$
- $\sigma(G) = \sqrt{V(G)} = \sqrt{53,79} \approx 7,33$
- b) Non car $E(G) \neq 0$.
3. $p(G \geq 15) = p(G = 19) + p(G = 99) = 0,01 + 0,005 = 0,015$.

4. Savoir dénombrer

- a) $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- b) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
- c) $\binom{1000}{0} = 1$
- d) $\binom{36}{36} = 1$
- e) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times (5 - 3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{120}{6 \times 2} = 10$
- f) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \times (6 - 4)!} = \frac{6 \times 5!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 120}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{120}{8} = 15$

Activités

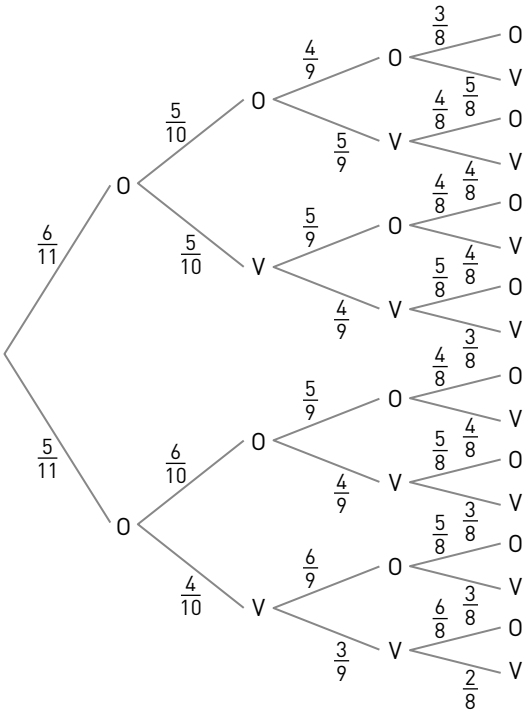
p. 366-367

1 Observer des tirages indépendants ou non

- **Durée estimée** : 25 min
- **Objectif** : Découvrir une méthode de calcul des probabilités dans le cas de tirages indépendants dans le cadre d’une question ouverte.

A. Avec des boules

On a :



donc cette probabilité est

$$\frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{66} \approx 0,015.$$

B. Avec des dés

L’arbre est trop compliqué à faire mais si on commence à le tracer, on s’aperçoit que, comme les tirages sont indépendants, les probabilités présentes sur le chemin sont les probabilités d’obtenir respectivement 2 puis 3 puis 4 etc.

On a :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

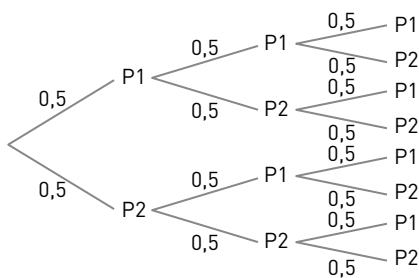
La probabilité cherchée est donc

$$p(2) \times p(3) \times \dots \times p(12) = \frac{1}{36} \times \frac{2}{36} \times \frac{3}{36} \times \frac{4}{36} \times \frac{5}{36} \times \frac{6}{36} \times \frac{5}{36} \times \frac{4}{36} \times \frac{3}{36} \times \frac{2}{36} \times \frac{1}{36} = \frac{6! \times 5!}{36^{11}}$$
$$\approx 7 \times 10^{-13}.$$

2 Reconnaître un schéma de Bernoulli

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Découvrir les schémas de Bernoulli.

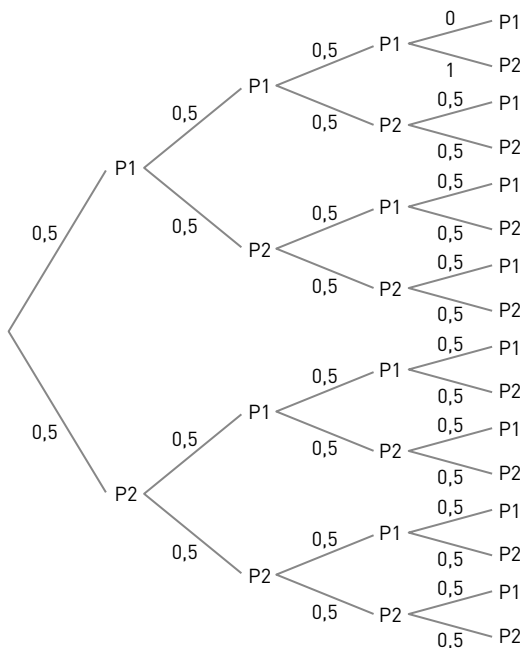
1. a)



b) La probabilité que le programme P1 soit au moins à moitié exécuté à l'issue des trois plages est la probabilité qu'il soit appelé 2 ou 3 fois c'est-à-dire $4 \times 0,5 \times 0,5 \times 0,5 = 0,5$ (chemins 1, 2, 3 et 5 en partant du haut de l'arbre).

c) Oui et oui.

2. a)



b) On ne répète pas des épreuves identiques car dans le cas où le programme P1 est appelé les trois premières fois, alors il est entièrement exécuté et ne peut plus être appelé.

La dernière épreuve a donc forcément pour résultat P2, ce qui n'est pas le cas des autres épreuves : ce n'est pas un schéma de Bernoulli (c'était le cas pour la succession des 3 premières plages dans la question 1. a).

3 Découvrir la loi binomiale

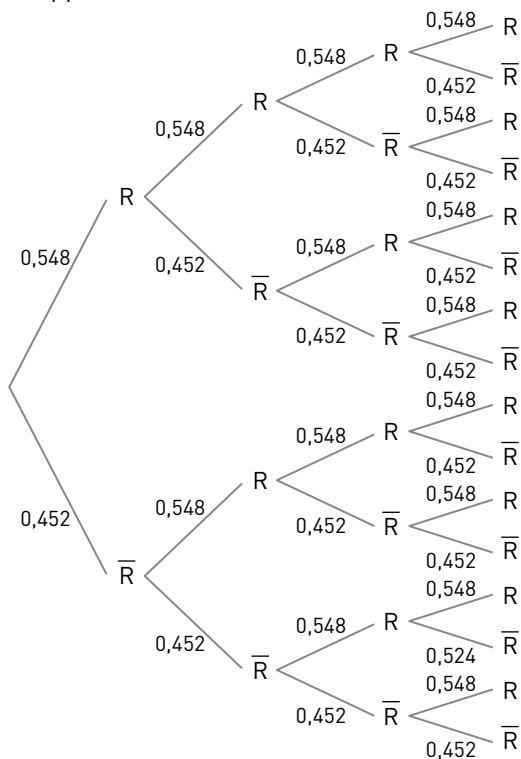
- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Découvrir la loi binomiale et calculer des probabilités « à la main » à l'aide de l'arbre associé au schéma de Bernoulli.

1. La réponse dépend de l'élève.

2. a) Soit le tir est réussi (c'est un succès), soit non. C'est donc bien une épreuve de Bernoulli.

b) On doit supposer que les résultats des tirs successifs sont indépendants.

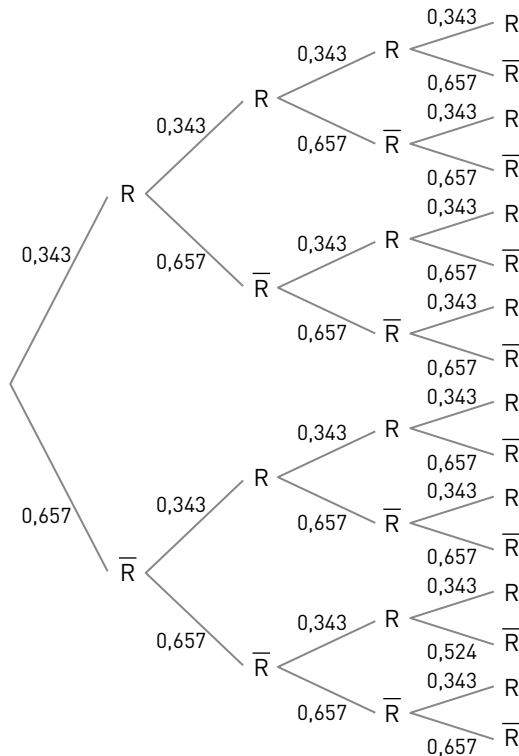
c) En appelant R un tir réussi :



d) La probabilité qu'au moins 3 tirs soient réussis est $4 \times 0,548^3 \times 0,452 + 0,548^4 \approx 0,39$ (il y a 4 chemins avec 3 tirs réussis : le 2^e, le 3^e, le 5^e et 9^e et 1 chemin avec 4 tirs réussis : le 1^{er}).

3. a) • Soit le tir est réussi (c'est un succès), soit non donc c'est bien une épreuve de Bernoulli.

• On doit supposer que les résultats des tirs successifs sont indépendants.



b) La probabilité qu'au moins 2 tirs soient réussis est :

$6 \times 0,343^2 \times 0,657^2 + 4 \times 0,343^3 \times 0,657 + 0,343^4 \approx 0,42$ (il y a 6 chemins avec 2 tirs réussis : le 4^e, le 6^e, le 7^e, le 10^e, le 11^e et 13^e, il y a 4 chemins avec 3 tirs réussis : le 2^e, le 3^e, le 5^e et 9^e et 1 chemin avec 4 tirs réussis : le 1^{er}).

4. Dans ces deux cas, il marque au moins 6 points si $D \geq 3$ ou $T \geq 2$ dont les probabilités respectives sont approximativement 0,39 et 0,42 : il doit donc préférer l'option à 3 points.

4 Trouver une probabilité avec la loi binomiale

• **Durée estimée :** 25 min

• **Objectif :** Découvrir la formule donnant $p(X = k)$ dans le cas où X suit la loi binomiale.

1. a) D suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,548$.

b) $2^8 = 256$

2. $12 = 6 \times 2$ donc l'événement « marquer exactement 12 points » correspond à l'événement $D = 6$ donc $k = 6$.

3. a) On considère l'ensemble $\{a ; b ; c ; d ; e ; f\}$, où a, b, c, d, e et f sont des entiers distincts compris entre 1 et 8, correspondant aux numéros des branches sur lesquelles se trouvent les pondérations 0,548 sur un chemin correspondant à 6 succès (par exemple $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 8\}$ correspond au chemin de 8 branches sur lesquelles les pondérations 0,543 se trouvent sur les branches numéros 1, 2, 3, 4, 5 et 8).

Trouver le nombre de branches correspondant à 6 succès (en 8 tirs) revient à trouver le nombre d'ensembles à 6 éléments distincts choisis parmi 8

c'est-à-dire $\binom{8}{6} = 28$.

b) La probabilité associée à chacun de ces chemins est $0,548^6 \times 0,452^2$.

c) La probabilité qu'il marque exactement 12 points est donc $p(D = 6) = 28 \times 0,548^6 \times 0,452^2 \approx 0,15$.

À vous de jouer

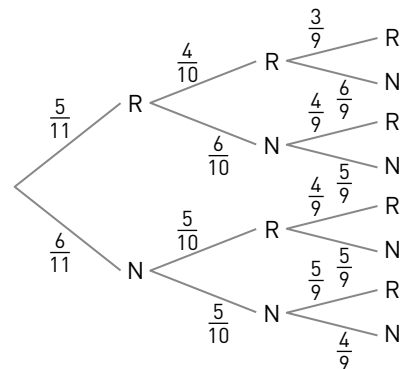
p. 369

1. 1. a) Oui : on remet la boule tirée dans l'urne donc sa composition est identique à chaque tirage.

b) Les tirages sont indépendants donc

$$p([R ; N ; N]) = \frac{5}{11} \times \frac{6}{11} \times \frac{6}{11} = \frac{180}{1331} \approx 0,135.$$

2. On ne remet pas la boule tirée dans l'urne donc sa composition change à chaque tirage : les tirages ne sont pas indépendants.



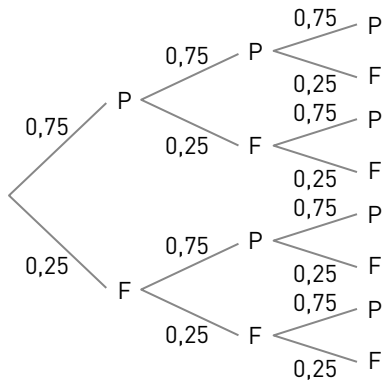
$$\frac{5}{11} \times \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{33} \approx 0,152.$$

2. L'univers associé à cette expérience est $\{G; D; A\}^6$ et

$$p(\{D; D; G; D; D; A\}) = 0,87^4 \times 0,12 \times 0,01 \approx 0,0007.$$

3. 1. On considère une succession de 3 expériences de Bernoulli (en considérant qu'un succès est obtenir « PILE » par exemple) identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est 0,75 donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0,75$.

2.



3. La probabilité d'obtenir exactement un succès est $3 \times 0,75 \times 0,25^2 = 0,140625$ (4^e, 6^e et 7^e chemins).

4. 1. Toutes les parties sont indépendantes.

2. Si on fait un arbre, il y a un seul chemin correspondant à 5 parties perdues et toutes les pondérations inscrites dessus sont 0,9 donc cette probabilité est $0,9^5 = 0,59049$.

On peut aussi utiliser la formule générale pour une succession d'épreuves indépendantes $p(\{E; E; E; E; E\}) = p(E) \times p(E) \times p(E) \times p(E) \times p(E) = 0,9^5$.

5. 1. X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 20$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès correspond à « obtenir FACE ») de paramètre $p = 0,5$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,5$.

$$\begin{aligned} 2. p(X = 11) &= \binom{20}{11} \times 0,5^{11} \times 0,5^{20-11} \\ &= \binom{20}{11} \times 0,5^{20} \approx 0,16 \end{aligned}$$

6. 1. T donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 15$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès corres-

pond à « obtenir un trèfle ») de paramètre $p = 0,25$ donc T suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,25$.

$$\begin{aligned} 2. p(T = 5) &= \binom{15}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{15-5} \\ &= \binom{15}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{10} \approx 0,17 \end{aligned}$$

$$7. 1. p(X > 6) = 1 - p(X \leq 6) \approx 0,62$$

$$2. p(3 \leq X < 12) = p(X \leq 11) - p(X \leq 2) \approx 0,97$$

$$8. 1. p(Y < 24) = p(Y \leq 23) \approx 0,15$$

$$2. p(21 < Y < 25) = p(Y \leq 24) - p(Y \leq 21) \approx 0,26$$

9. • L'espérance associée à B_1 est environ 22 et celle associée à B_2 est environ 4 donc B_1 a la plus grande espérance.

• Le diagramme associé à B_2 est plus haut et moins large que celui associé à B_1 donc c'est la loi à B_1 qui a le plus grand écart-type.

10. 1. $E(X) \approx 4$ et $n \times 0,22 = E(X)$ donc $n = 20$ puisque n est un multiple de 10.

$$2. V(X) = 20 \times 0,22 \times 0,78 = 3,432$$

11. La probabilité qu'il puisse accueillir tous les clients se présentant est $p(C \leq 43) \approx 0,98$ donc oui.

12. La probabilité qu'elle ait au moins 29 élèves dans sa classe l'année prochaine est $p(E \geq 29) \approx 0,993$ donc oui.

13. Ici, $\alpha = 0,1$ et $\frac{\alpha}{2} = 0,05$.

$p(Y < 3) = p(Y \leq 2) \approx 0,0996 > 0,05$ donc $[3; 9]$ n'est pas centré.

14. Ici, $\alpha = 0,05$ et $\frac{\alpha}{2} = 0,025$.

$p(Z < 11) = p(Z \leq 10) \approx 0,012 \leq 0,025$ et $p(Z > 26) = 1 - p(Z \leq 26) \approx 0,0245 \leq 0,025$ donc $[11; 26]$ est centré.

15. On tabule $p(Y \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
24	0.7316				
25	0.8028				
26	0.8607				
27	0.9055				
28	0.9384				
29	0.9614				
30	0.9768				
31	0.9866				
32	0.9926				
33	0.9961				
34	0.998				

X=34

donc $k = 32$.

16. On tabule $p(Z \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
15	1.3E-4				
16	5.3E-4				
17	0.0019				
18	0.0062				
19	0.0179				
20	0.0451				
21	0.1004				
22	0.1968				
23	0.3397				
24	0.5174				
25	0.6993				

X=25

donc $k = 19$.

17. $p(Y \geq k) = 1 - p(Y < k)$
 $= 1 - p(Y \leq k - 1)$ donc $p(Y \geq k) > 0,8$

$$\Leftrightarrow 1 - p(Y \leq k - 1) > 0,8$$

$$\Leftrightarrow p(Y \leq k - 1) < 0,2$$

On tabule $p(Y \leq x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
0	0.0114				
1	0.0658				
2	0.1919				
3	0.3811				
4	0.5875				
5	0.762				
6	0.881				
7	0.9482				
8	0.9803				
9	0.9934				
10	0.998				

X=0

donc $k - 1 = 2$ puis $k = 3$.

$$\begin{aligned} 18. p(Z \geq k) &= 1 - p(Z < k) \\ &= 1 - p(Z \leq k - 1) \end{aligned}$$

$$\text{donc } p(Z \geq k) \leq 0,02$$

$$\Leftrightarrow 1 - p(Z \leq k - 1) \leq 0,02$$

$$\Leftrightarrow p(Z \leq k - 1) \geq 0,98.$$

On tabule $p(Z \leq x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
21	0.7849				
22	0.7861				
23	0.852				
24	0.9023				
25	0.9385				
26	0.9632				
27	0.979				
28	0.9886				
29	0.9941				
30	0.9971				
31	0.9986				

X=31

donc $k - 1 = 28$ puis $k = 29$.

19. Ici $\frac{\alpha}{2} = 0,05$ et $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,95$ donc on cherche les

plus petits entiers a et b tels que $p(Y \leq a) > 0,05$ et $p(Y \leq b) \geq 0,95$.

On tabule $p(Y \leq x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
5	0.0406				
6	0.0955				
7	0.188				
8	0.318				
9	0.4725				
10	0.6289				
11	0.7649				
12	0.8668				
13	0.933				
14	0.9702				
15	0.9884				

X=15

l'intervalle cherché est $[6 ; 14]$.

20. Ici $\frac{\alpha}{2} = 0,005$ et $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$ donc on cherche

les plus petits entiers a et b tels que $p(Z \leq a) > 0,005$ et $p(Z \leq b) \geq 0,995$.

On tabule $p(Z \leq x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
62	0.0015			
63	0.003			
64	0.0057			
65	0.0105			
66	0.0185			
67	0.0312			
68	0.0507			
69	0.079			
70	0.1184			
71	0.1703			
72	0.2354			
X=72				

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
78	0.764			
79	0.8337			
80	0.8891			
81	0.9304			
82	0.959			
83	0.9774			
84	0.9885			
85	0.9946			
86	0.9977			
87	0.9991			
88	0.9997			
X=88				

l'intervalle cherché est [64 ; 86].

Exercices
apprendre à démontrer p. 380

Pour s'entraîner

L'événement $X = k$ est réalisé si et seulement si on n'a pas obtenu de 1 lors des $k - 1$ premiers essais. En considérant qu'un succès S lors d'un lancer est

« obtenir 1 », de probabilité $\frac{1}{6}$, $p(X = k)$ est donc la probabilité de l'issue $\{E ; E ; \dots ; E ; S\}$ lorsque l'on répète k fois de manière indépendante une même expérience de Bernoulli donc

$$p(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k}.$$

Remarque : X suit la loi géométrique de paramètre

$$\frac{1}{6}.$$

Exercices
calculs et automatismes p. 381

21. Répétition d'épreuves indépendantes

$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{5}{8} \approx 0,013.$$

22. Épreuve de Bernoulli (1)

b)

23. Épreuve de Bernoulli (2)

a) et b)

24. Loi de Bernoulli

Faux il faut que ces valeurs soient 0 ou 1.

25. Schéma de Bernoulli

On doit justifier que ces épreuves sont des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

26. Loi binomiale (1)

c) Attention, on regarde le nombre d'échecs et 0,2 est la probabilité d'un succès.

27. Loi binomiale (2)

$$\binom{4}{1} \times 0,1^1 \times 0,9^3 = 0,2916$$

28. Loi binomiale (3)

$$\binom{10}{1} \times 0,9^1 \times 0,1^9 = 10 \times 0,9 \times 0,1^9 = 9 \times 10^{-9}$$

29. Espérance de la loi binomiale (1)

$$b) 200 \times 0,63 = 126$$

30. Espérance de la loi binomiale (2)

b) Valeur sur laquelle la cloche est approximativement centrée.

31. Intervalle de fluctuation

a) Vrai

$$p(X \in [1 ; 9]) \approx 0,9876 - 0,0016 = 0,986 > 0,95.$$

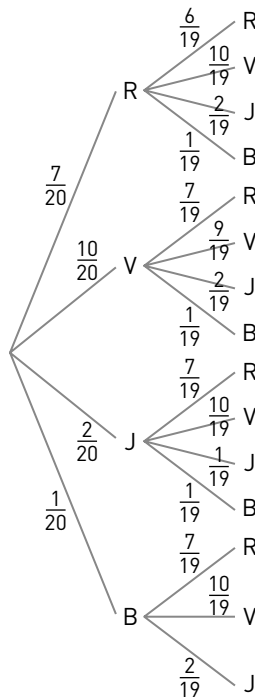
b) Faux [2 ; 9] obtenu avec la méthode 10 est plus petit que [1 ; 9].

Exercices d'application p. 382-386

Succession d'épreuves, indépendantes ou non

32. 1. Non car chaque tirage change la composition de l'urne donc a de l'influence sur les suivants.

2. Dans l'arbre ci-après, R désigne l'obtention d'une boule rouge, V d'une boule verte, J d'une boule jaune et B d'une boule bleue.



3. a) $\frac{7}{20} \times \frac{6}{19} = \frac{21}{190} \approx 0,111$

b) $\frac{10}{20} \times \frac{2}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{10}{19} = \frac{2}{19} \approx 0,105$

c) Appelons J_1 l'événement « la première boule est jaune » et R_2 l'événement « la deuxième boule est rouge ».

On cherche $p_{R_2}(J_1) = \frac{p(J_1 \cap R_2)}{p(R_2)}$ avec :

• $p(J_1 \cap R_2) = \frac{2}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{7}{190}$

• $p(R_2) = \frac{7}{20} \times \frac{6}{19} + \frac{10}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{1}{20} \times \frac{7}{19}$
 $= \frac{133}{380} = \frac{7}{20}$

donc $p_{R_2}(J_1) = \frac{\frac{7}{190}}{\frac{7}{20}} = \frac{7}{190} \times \frac{20}{7} = \frac{2}{19} \approx 0,105$.

d) Appelons V_1 l'événement « la première boule est verte » et B_2 l'événement « la deuxième boule est bleue ».

On cherche $p_{B_2}(V_1) = \frac{p(V_1 \cap B_2)}{p(B_2)}$ avec :

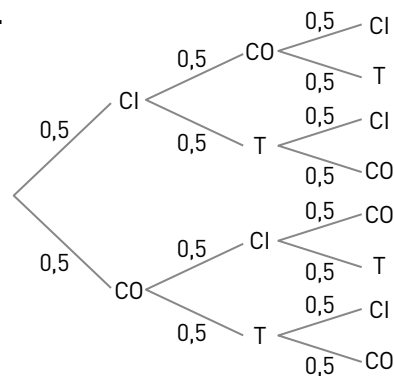
• $p(V_1 \cap B_2) = \frac{10}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{38}$

• $p(B_2) = \frac{7}{20} \times \frac{1}{19} + \frac{10}{20} \times \frac{1}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{20}$

donc $p_{B_2}(V_1) = \frac{\frac{1}{38}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{38} \times \frac{20}{1} = \frac{10}{19} \approx 0,526$.

33. 1. Comme elles ne font pas deux fois de suite la même activité, cela veut dire que l'activité d'une semaine a de l'influence sur l'activité de la semaine suivante donc les épreuves ne sont pas indépendantes.

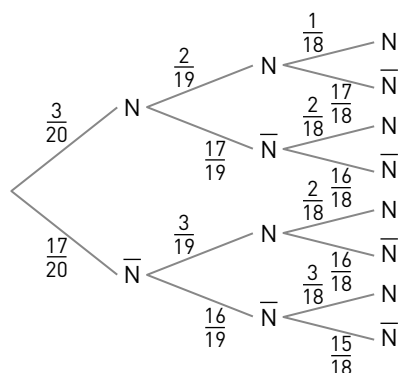
2.



3. 2 $\times 0,5^3 = 0,25$ (1^{er} et 3^e chemins).

34. 1. Non car chaque tirage change la composition de l'urne donc a de l'influence sur les suivants.

2.



$$3. \frac{3}{20} \times \frac{17}{19} \times \frac{16}{18} + \frac{17}{20} \times \frac{3}{19} \times \frac{16}{18} + \frac{17}{20} \times \frac{16}{19} \times \frac{3}{18}$$

$$= \frac{34}{95} \approx 0,358 \text{ (4}^{\text{e}}, 6^{\text{e}} \text{ et } 7^{\text{e}} \text{ chemins).}$$

35. 1. C'est un tirage avec remise donc la composition de l'urne reste la même à chaque tirage : les différents tirages n'ont pas d'influence les uns sur les autres.

2. En notant B , G , N , O et V les différentes couleurs, l'univers associé à cette succession de trois épreuves est $\{B; G; N; O; V\}^3$.

$$3. p(B; G; V) = p(B) \times p(G) \times p(V)$$

$$= 0,23 \times 0,12 \times 0,11 \approx 0,003$$

36. 1. Oui.

$$2. \{1; 2; 3; 4\}^5$$

$$3. p(\{1; 3; 1; 2; 4\}) = 0,4 \times 0,2 \times 0,4 \times 0,2 \times 0,2$$

$$= 0,00128$$

37. 1. En prenant l'initiale de chaque activité (par exemple P pour pilate) $\{P; S; M\} \times \{Z; C\} \times \{F; Y; T\}$.

$$2. p(P; C; Y) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = 0,05.$$

38. 1. Les résultats n'étant pas connus avant les matchs, ils ne peuvent pas avoir d'influence les uns sur les autres quand on considère ces trois expériences aléatoires *a priori*.

2. V désigne la victoire et N le match nul :

$$\{V_{\text{Reims}}; N; V_{\text{Lille}}\} \times \{V_{\text{Strasbourg}}; N; V_{\text{Monaco}}\} \times \{V_{\text{Marseille}}; N; V_{\text{Saint-Étienne}}\}$$

$$3. p(V_{\text{Reims}}; N; V_{\text{Marseille}}) = 0,34 \times 0,26 \times 0,55 = 0,04862.$$

Épreuve et loi de Bernoulli

39. En considérant qu'un succès est « L'élève a choisi la spécialité mathématiques » alors c'est une expérience à deux issues, donc une épreuve de Bernoulli, avec la probabilité d'un succès $p = 0,71$.

Remarque : Il est tout aussi légitime de considérer qu'un succès est « L'élève n'a pas choisi la spécialité mathématiques » auquel cas, $p = 0,29$.

40. 1. En considérant qu'un succès est « Le TGV arrive à l'heure » alors c'est une expérience à deux issues, donc une épreuve de Bernoulli.

2. La probabilité d'un succès est $p = 0,879$.

41. Il y a trois résultats possibles à cette épreuve (pierre, feuille ou ciseau) donc ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.

42. Par exemple, on tire au sort une boule dans une urne contenant 3 boules rouges et 7 boules vertes et on considère qu'un succès est « obtenir une boule rouge ».

43. 1. C'est une expérience de Bernoulli car elle a deux issues.

2. 0,5

3. Soit p la probabilité d'obtenir PILE. Ici,

$$1 - p = 2p \Leftrightarrow 1 = 3p \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}.$$

44. On obtient :

- PILE ou 0 fois FACE avec une probabilité $\frac{2}{3}$;

- FACE ou 1 fois FACE avec une probabilité $\frac{1}{3}$;

donc les valeurs prises par X sont bien 0 et 1 avec

$$p(X = 1) = \frac{1}{3} \text{ donc } p = \frac{1}{3}.$$

45. 1. Le chiffre des dizaines d'un entier entre 1 et 12 est 0 ou 1.

$$\text{Le dé étant équilibré, } p(X = 0) = \frac{9}{12} = 0,75 \text{ (résultats}$$

$$1; 2; 3; \dots; 8 \text{ et } 9) \text{ et } p(X = 1) = \frac{3}{12} = 0,25 \text{ (résultats}$$

10 ; 11 et 12) donc X suit une loi de Bernoulli avec $p = 0,25$.

2. On a :

Dé 4 \ Dé 8	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12

D'après ce tableau, $p(Y = 0) = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$ (résultats 2 ;

3 ; ... ; 8 et 9) et $p(Y = 1) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$ (résultats 10 ; 11 et

12) donc Y suit une loi de Bernoulli avec $p = \frac{3}{16}$.

46. `random.random()` renvoie un flottant aléatoire entre 0 et 1 donc cette fonction renvoie 1 avec une probabilité 0,63 et 0 avec une probabilité 0,37 donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,63$.

47. `random.random()` renvoie un flottant aléatoire entre 0 et 1 donc cette fonction renvoie 0 avec une probabilité 0,41 et 1 avec une probabilité 0,59 donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,59$.

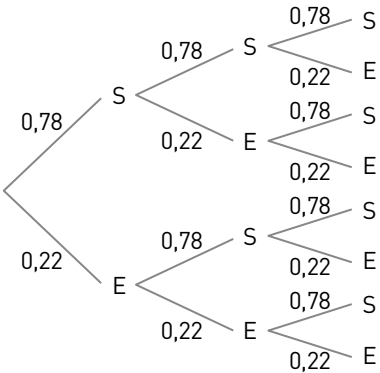
48.


```
def bernoulli (p) :
    if random.random ( ) <= p :
        x = 1
    else :
        x = 0
    return x
```

Schéma de Bernoulli

49. 1. On doit supposer que les lancers sont indépendants.

2. On considère qu'un succès (S) désigne le fait de planter la boule sur le socle.

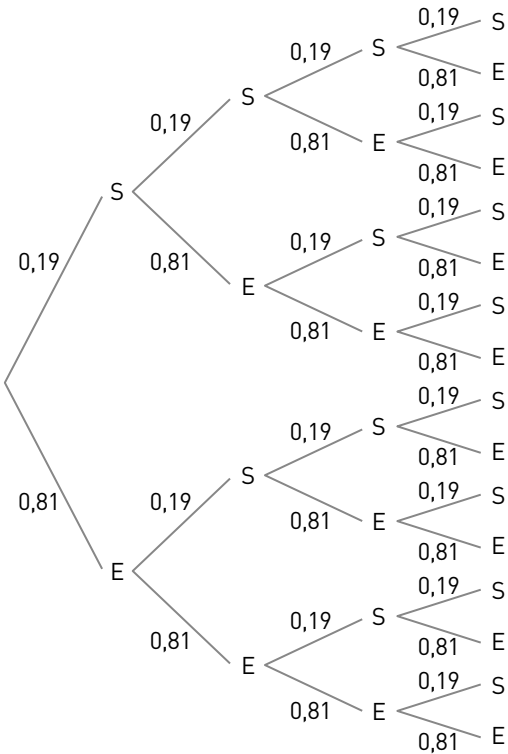


3. a) $0,78 \times 0,22 \times 0,22 + 0,22 \times 0,78 \times 0,22 + 0,22 \times 0,22 \times 0,78 \approx 0,113$.

b) $0,78^3 + 3 \times 0,78^2 \times 0,22 \approx 0,876$

50. 1. On doit supposer que les appels sont indépendants.

2. On considère qu'un succès (S) désigne le fait que l'appel soit injustifié.



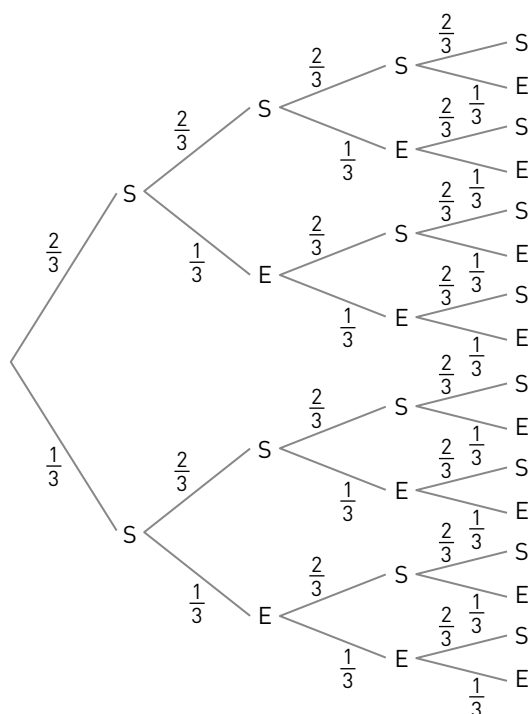
3. a) $6 \times 0,81^2 \times 0,19^2 \approx 0,142$

b) C'est le contraire de « tous les appels sont injustifiés » donc $1 - 0,19^4 \approx 0,999$.

51. 1. En considérant qu'un succès (S) est « il regarde son téléphone », on considère une succession de 4 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est $\frac{2}{3}$ donc cette succession d'épreuves est bien

un schéma de Bernoulli avec $n = 4$ et $p = \frac{2}{3}$.

2.



$$3. \left(\frac{2}{3}\right)^4 + 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} \approx 0,296$$

$$52. a) p(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0,42^1 \times 0,58^3 \\ \approx 4 \times 0,42 \times 0,195 \approx 0,328$$

$$b) p(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,42^2 \times 0,58^2 \\ \approx 6 \times 0,176 \times 0,336 \approx 0,355$$

$$c) p(Y = 1) = \binom{4}{1} \times 0,58^1 \times 0,42^3 \\ \approx 4 \times 0,58 \times 0,074 \approx 0,172$$

$$d) p(Y = 2) = \binom{4}{2} \times 0,58^2 \times 0,42^2 \approx 0,355$$

Remarque : Ces approximations ne sont pas très bonnes.

$$53. a) p(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,34^2 \times 0,66^8 \\ \approx 45 \times 0,12 \times 0,04 = 0,216$$

$$b) p(X = 4) = \binom{10}{4} \times 0,34^4 \times 0,66^6 \\ \approx 210 \times 0,01 \times 0,08 = 0,168$$

$$c) p(Y = 9) = \binom{10}{9} \times 0,66^9 \times 0,34^1 \\ \approx 10 \times 0,02 \times 0,34 = 0,068$$

$$d) p(Y = 2) = \binom{10}{2} \times 0,66^2 \times 0,34^8 \\ \approx 45 \times 0,44 \times 0 = 0$$

Remarque : Ces approximations ne sont pas très bonnes.

54. 1. En considérant qu'un succès pour chacun des lancers est « obtenir rouge », X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 20$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli, dont la probabilité de succès (« obtenir rouge ») est $p = \frac{18}{37}$. Donc X suit la loi binomiale de

paramètres $n = 20$ et $p = \frac{18}{37}$.

$$2. \text{ On cherche } p(X = 9) = \binom{20}{9} \times \left(\frac{18}{37}\right)^9 \times \left(\frac{19}{37}\right)^{11} \\ \approx 0,168$$

55. 1. En considérant qu'un succès pour chacun des 10 passagers est « le passager s'est endormi », X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 10$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (« le passager s'est endormi ») est $p = 0,68$. Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,68$.

$$2. \bullet p(X=8) = \binom{10}{8} \times 0,68^8 \times 0,32^2 \approx 0,211$$

$$\bullet p(X=9) = \binom{10}{9} \times 0,68^9 \times 0,32^1 \approx 0,099$$

$$\bullet p(X=10) = \binom{10}{10} \times 0,68^{10} \times 0,32^0 \approx 0,021$$

$$3. \text{ On cherche } p(X \geq 8) = p(X=8) + p(X=9) + p(X=10) \\ \approx 0,211 + 0,099 + 0,021 \\ = 0,331.$$

Remarque : On peut aussi utiliser les fonctionnalités avancées de la calculatrice.

56. 1. En considérant qu'un succès pour chacun des 35 élèves est « l'élève est mineur en fin d'année », M donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 35$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli, dont la probabilité de succès (« l'élève est mineur en fin d'année ») est $p = 0,33$. Donc M suit la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,33$.

$$2. \bullet p(M=10) = \binom{35}{10} \times 0,33^{10} \times 0,67^{25} \approx 0,126$$

$$\bullet p(M=11) = \binom{35}{11} \times 0,33^{11} \times 0,67^{24} \approx 0,141$$

$$\bullet p(M=12) = \binom{35}{12} \times 0,33^{12} \times 0,67^{23} \approx 0,139$$

3. On cherche

$$p(10 \leq M \leq 12) = p(M=10) + p(M=11) + p(M=12) \\ \approx 0,126 + 0,141 + 0,139 = 0,406$$

Remarque : On peut aussi utiliser les fonctionnalités avancées de la calculatrice.

Calculs de probabilités avec la loi binomiale

$$57. \text{ a) Environ } 0,197. \quad \text{b) Environ } 0,366. \\ \text{c) Environ } 0,861. \quad \text{d) Environ } 0,66.$$

$$58. \text{ a) Environ } 0,327. \quad \text{b) Environ } 0,059. \\ \text{c) Environ } 0,648. \quad \text{d) Environ } 0,354.$$

$$59. \text{ a) Environ } 0,839. \quad \text{b) Environ } 0,348. \\ \text{c) Environ } 0,573. \quad \text{d) Environ } 0,439.$$

$$60. \text{ a) Environ } 0,398. \quad \text{b) Environ } 0,637. \\ \text{c) Environ } 0,922. \quad \text{d) Environ } 0,95.$$

61. G suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,1$.

$$\text{a) } p(G > 100) \approx 0,473$$

$$\text{b) } p(G < 85) \approx 0,049$$

$$\text{c) } p(95 \leq G \leq 105) \approx 0,438$$

$$\text{d) } p(90 < G < 110) \approx 0,684$$

62. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes végétariennes parmi les 250 personnes prenant un repas à cette cantine. Elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,12$. On cherche $p(X > 32) \approx 0,307$.

63. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes en fauteuil roulant parmi les 1 250 personnes prenant ce train. Elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 1250$ et $p = 0,02$. On cherche $p(X > 30) \approx 0,134$.

Espérance, variance et écart-type par le calcul

$$64. 1. \bullet E(X) = 20 \times 0,83 = 16,6$$

$$\bullet V(X) = 20 \times 0,83 \times 0,17 = 2,822$$

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,822} \approx 1,680$$

$$2. \bullet E(Y) = 100 \times 0,79 = 79$$

$$\bullet V(Y) = 100 \times 0,79 \times 0,21 = 16,59$$

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{16,59} \approx 4,073$$

65.

```
def param_binom(n,p):
    e=n*p
    v=n*p*(1-p)
    s=math.sqrt(v)
    return [e,v,s]
```

66. 1. En supposant les tickets indépendants, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$ et Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,05$.

On a donc $E(X) = 10 \times 0,1 = 1$ et $E(Y) = 20 \times 0,05 = 1$ donc $E(X) = E(Y)$ ce qui veut dire « qu'en moyenne », sur un grand nombre de répétitions, elle aura un seul ticket gagnant sur tous les tickets achetés dans les deux cas.

2. a) $\sigma(X) = \sqrt{10 \times 0,1 \times 0,9} \approx 0,949$ et

$\sigma(Y) = \sqrt{20 \times 0,05 \times 0,95} \approx 0,975$.

b) Comme $\sigma(Y) > \sigma(X)$, la dispersion est plus élevée en achetant 20 tickets du jeu n°2 c'est-à-dire que l'on aura des nombres de tickets globalement plus éloignés de l'espérance (1) sur un grand nombre de répétitions (mais c'est très léger car les écarts-types sont assez proches).

67. 1. $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

donc $E(X)(1 - p) = V(X)$

soit $1 - p = \frac{V(X)}{E(X)} = \frac{27,648}{43,2} = 0,64$.

2. Ainsi $p = 1 - 0,64 = 0,36$ et $n = \frac{E(X)}{p} = \frac{43,2}{0,36} = 120$.

68. $V(Y) = 1,5^2 = 2,25$ donc il s'agit de résoudre $25 \times p \times (1 - p) = 2,25 \Leftrightarrow -25p^2 + 25p - 2,25 = 0$.

La résolution de cette équation donne $p = 0,1$ ou $p = 0,9$: 0,1 et 0,9 sont les valeurs possibles de p .

69. 1. $np = 2$ donc $n = \frac{2}{p}$.

On a $\frac{1}{0,15} \geq \frac{1}{p} \geq \frac{1}{0,16}$ donc $\frac{2}{0,15} \geq n = \frac{2}{p} \geq \frac{2}{0,16}$.

Comme $\frac{2}{0,15} \approx 13,3$ et $\frac{2}{0,16} \approx 12,5$ alors $n = 13$.

2. $p = \frac{2}{13}$

Espérance, variance et écart-type : aspect graphique

70. 1. a) $E(X) = 10$

b) $np = 10$ $n = \frac{10}{0,4} = 25$

2. Le diagramme en barres associé à B' est plus haut et moins large que celui associé à B donc

l'écart-type associé à B est plus grand que celui associé à B'.

71. 1. Soit X suivant la loi à B.

On peut penser que $E(X) \approx 7$ donc $p \approx \frac{7}{10} = 0,7$ donc $p = 0,66$.

2. Les diagrammes semblent symétriques ce qui veut dire qu'ils ont mêmes largeurs et hauteurs donc on peut penser qu'ils correspondent à des lois binomiales ayant mêmes écarts-types.

Vérification du respect d'un seuil

72. La variable aléatoire X donnant le nombre d'articles qu'il a trouvé suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,9$.

a) $p(X < 28) \approx 0,589$

donc $p(X < 28) < 0,99$ donc non.

b) $p(X \geq 23) \approx 0,992$

donc $p(X \geq 23) \geq 0,99$ donc oui.

c) $p(21 \leq X \leq 29) \approx 0,957$ donc $p(21 \leq X \leq 29) < 0,99$ donc non.

73. 1. $p(X \in [2 ; 24]) \approx 0,962$ donc

$p(X \in [2 ; 24]) \geq 0,95$: $[2 ; 24]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 0,95.

2. $p(X \in [13 ; 26]) \approx 0,994$ donc

$p(X \in [13 ; 26]) \geq 0,99$: $[13 ; 26]$ est un intervalle de fluctuation au risque de 1 %.

74. La variable aléatoire X donnant le nombre de « 100 m » courus en moins de 13 s suit la loi binomiale de paramètres $n = 61$ et $p = 0,94$.

a) $p(53 \leq X \leq 60) \approx 0,968$ donc $p(53 \leq X \leq 60) \geq 0,95$ donc oui.

b) $p(X < 59) \approx 0,717$ donc $p(X < 59) < 0,95$ donc non.

c) $p(X > 53) \approx 0,971$ donc $p(X > 53) \geq 0,95$ donc oui.

d) $p(X \leq 57) \approx 0,502$ donc $p(X \leq 57) < 0,95$ donc non.

Vérification qu'un intervalle est un intervalle de fluctuation centré

75. 1. Ici, $\alpha = 0,05$ donc $\frac{\alpha}{2} = 0,025$.

$p(X < 18) \approx 0,022$ et $p(X > 35) \approx 0,021$

donc $p(X < 18) \leq 0,025$ et $p(X > 35) \leq 0,025$:

$[18 ; 35]$ est bien un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %.

2. Ici, $\alpha = 0,01$ donc $\frac{\alpha}{2} = 0,005$.

$p(X < 15) \approx 0,003$ et $p(X > 38) \approx 0,004$ donc
 $p(X < 15) \leq 0,005$ et $p(X > 38) \leq 0,005$:

$[15 ; 38]$ est bien un intervalle de fluctuation centré au risque de 1 %.

76. 1. Ici, $\alpha = 0,05$ donc $\frac{\alpha}{2} = 0,025$.

$p(Y < 9) \approx 0,016$ et $p(Y > 21) \approx 0,028$ donc
 $p(Y > 21) > 0,025$: $[9 ; 21]$ n'est pas un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 %.

2. a) Ici, $\alpha = 0,1$ donc $\frac{\alpha}{2} = 0,05$. $p(Y < 10) \approx 0,035$ et

$p(Y > 21) \approx 0,028$ donc $p(Y < 10) \leq 0,05$ et $p(Y > 21) \leq 0,05$: $[10 ; 21]$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 90 %.

b) $p(Y < 9) < p(Y < 10)$ donc $p(Y < 9) \leq 0,05$ et
 $p(Y > 22) < p(Y > 21)$ donc $p(Y > 22) \leq 0,05$ donc
 $[9 ; 22]$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 90 % donc au risque de 10 %.

Exercices d'entraînement p. 387-391

Successions d'épreuves

77. 1. La ligne permet de définir une liste dont :

- le 1^{er} élément est un entier aléatoire entre 2 et 4 ce qui correspond au 1^{er} tirage ;
- le 2^e élément est un entier aléatoire entre 2 et 5 ce qui correspond au 2^e tirage ;
- le 3^e élément est un entier aléatoire entre 2 et 6 ce qui correspond au 3^e tirage.

Le « tirage » de chaque élément de la liste n'a pas d'influence sur les autres donc c'est une succession de trois épreuves indépendantes.

Remarque : for i in range(1, 4) correspond à « pour i allant de 1 à 3 ».

2. $\{2 ; 3 ; 4\} \times \{2 ; 3 ; 4 ; 5\} \times \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

3. On cherche $p(\{2 ; 3 ; 4\}) = p(2) \times p(3) \times p(4)$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{60}$.

$$78. 1. p(0) = \frac{15}{315} = \frac{1}{21}$$

$$\text{et } p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = \frac{60}{315} = \frac{4}{21}.$$

2. a) $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}^5$

$$\text{b) } p(\{2 ; 4 ; 3 ; 3 ; 0\}) = p(2) \times p(4) \times p(3) \times p(3) \times p(0) \\ = \left(\frac{4}{21}\right)^4 \times \left(\frac{1}{21}\right) \approx 0,000\,063$$

79. 1. $0,7 \times 0,35 \times 0,38 \times 0,59 \approx 0,055$

2. $0,7 \times 0,65 \times 0,62 \times 0,41 \approx 0,116$

3. Soit t ce taux de réussite sous forme décimale.

On a $0,7 \times 0,65 \times 0,38 \times 0,59 \times t = 0,07$ donc $t \approx 0,69$ soit un taux de réussite d'environ 69 %.

4. $L = [0,7, 0,65, 0,38, 0,59, 0,69]$

80. 1. On considère les événements :

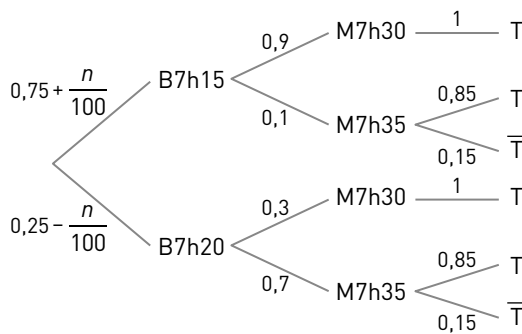
- B7h15 : « elle a le bus de 7h15 » ;
- B7h20 : « elle a le bus de 7h20 » ;
- M7h30 : « elle a le métro de 7h30 » ;
- M7h35 : « elle a le métro de 7h35 » ;
- T : « elle arrive à l'heure ».

On a alors :



$$2. p(T) = 0,75 \times 0,9 \times 1 + 0,75 \times 0,1 \times 0,85 \\ + 0,25 \times 0,3 \times 1 + 0,25 \times 0,7 \times 0,85 = 0,9625$$

3. Si elle se lève n minutes plus tôt, l'arbre devient :



Il s'agit donc de résoudre $p(T) \geq 0,98$ avec

$$p(T) = \left(0,75 + \frac{n}{100}\right) \times 0,9 \times 1 + \left(0,75 + \frac{n}{100}\right) \times 0,1 \times 0,85 \\ + \left(0,25 - \frac{n}{100}\right) \times 0,3 \times 1 + \left(0,25 - \frac{n}{100}\right) \times 0,7 \times 0,85$$

$$= 0,9625 + \frac{0,09n}{100} \text{ soit } 0,9625 + \frac{0,09n}{100} \geq 0,98$$

$$\Leftrightarrow 96,25 + 0,09n \geq 98$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{98}{0,09} \text{ avec } \frac{98}{0,09} \approx 19,4 \text{ donc il faut qu'elle se}$$

lève au moins 20 minutes plus tôt.

Loi binomiale

81. Les différentes simulations réalisées avec la fonction `bernoulli` sont indépendantes et `L` est une liste de taille n constituée de 1, correspondant à un succès, avec une probabilité p et de 0, correspondant à un échec, avec une probabilité $1 - p$.

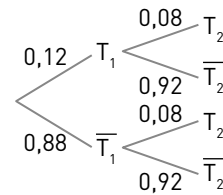
La somme des éléments de `L`, renvoyée par la fonction `binomiale`, donne donc bien le nombre de succès lorsque l'on réalise n fois de manière indépendante une même expérience de Bernoulli de paramètre p donc elle simule une variable aléatoire suivant la loi $B(n; p)$.

82. 1. On considère qu'un bit mal transmis est un succès, sa probabilité est $p = 0,01$. X donne donc bien le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 8$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,01$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,01$.

2. $p(X = 2) \approx 0,003$

3. $p(X \geq 3) \approx 0,00005$ ce qui paraît en effet négligeable.

83. 1. On appelle T_1 l'événement « le produit défectueux passe le 1^{er} test » et T_2 l'événement « le produit défectueux passe le 2^e test ». On a alors :



La probabilité qu'un produit défectueux soit mis en vente est donc $0,12 \times 0,08 = 0,0096$.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de produits défectueux mis en vente parmi ces 100. X suit la loi $B(100; 0,0096)$.

On cherche $p(X \geq 3) \approx 0,072$.

84. 1. Les $n = 5$ éléments de la liste sont des entiers aléatoires entre 1 et 10 générés indépendamment et on considère que le résultat obtenu est un succès s'il est inférieur ou égal à 6, la probabilité d'un succès est donc $p = 0,6$.

X donne bien le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 5$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,6$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,6$.

2.

```
import random
L=[random.randint(1, 10) for i in range(5)]
T=[]
for a in L:
    if a < 7:
        T.append(1)
    else:
        T.append(0)
```

Utiliser l'expression de $p(X = 0)$ ou $p(X = k)$

85. 1. $p(X = n) = 0,25^n$

On résout donc $0,25^n = 9,5 \times 10^{-7}$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,25) = \ln(9,5 \times 10^{-7})$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(9,5 \times 10^{-7})}{\ln(0,25)} \text{ donc } n = 10.$$

2. $p(X = 0) = 0,75^n$

On résout donc $0,75^n = 0,0001$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,75) = \ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,75)} \text{ donc } n = 32.$$

86. 1. $p(Y = 0) = 0,56^n$.

On résout donc $0,56^n < 10^{-5} \Leftrightarrow n \ln(0,56) < \ln(10^{-5})$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-5})}{\ln(0,56)}$ donc la valeur cherchée est $n = 20$.

2. $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0,56^n$

On résout donc $1 - 0,56^n > 0,99 \Leftrightarrow 0,56^n < 0,01$

$\Leftrightarrow n \ln(0,56) < \ln(0,01) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,56)}$ donc la

valeur cherchée est $n = 8$.

87. 1. $p(Z = n) = 0,89^n$

On résout donc $0,89^n > 0,01 \Leftrightarrow n \ln(0,89) > \ln(0,01)$

$\Leftrightarrow n < \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,89)}$ donc la valeur cherchée est $n = 39$.

2. $p(Z < n) = 1 - p(Z = n) = 1 - 0,89^n$

On résout donc $1 - 0,89^n > 0,75 \Leftrightarrow 0,89^n < 0,25$

$\Leftrightarrow n \ln(0,89) < \ln(0,25) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,89)}$ donc la

valeur cherchée est $n = 12$.

88. On appelle n le nombre d'obstacles mis dans le niveau et X la variable aléatoire donnant le nombre d'obstacles touchés. En admettant tous les obstacles indépendants, X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,05$.

On cherche à résoudre $p(X = 0) > 0,5 \Leftrightarrow 0,95^n > 0,5$

$\Leftrightarrow n \ln(0,95) > \ln(0,5) \Leftrightarrow n < \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}$ donc $n \leq 13$:

elle pourra mettre au maximum 13 fois cet obstacle.

89. 1. On appelle n le nombre de parties jouées et X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées. Comme tous les tirages sont indépendants, X suit la loi binomiale de paramètres n

et $p = \frac{1}{19\,068\,840}$.

On cherche à résoudre $p(X \geq 1) \geq 0,01$

$\Leftrightarrow 1 - p(X = 0) \geq 0,01 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{19\,068\,839}{19\,068\,840}\right)^n \geq 0,01$

$\Leftrightarrow \left(\frac{19\,068\,839}{19\,068\,840}\right)^n \leq 0,99$

$$\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{19\,068\,839}{19\,068\,840}\right) \leq \ln(0,99)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,99)}{\ln\left(\frac{19\,068\,839}{19\,068\,840}\right)} \text{ donc } n \geq 191\,649.$$

Remarque : On pourra faire remarquer aux élèves qu'il faut déjà un nombre énorme de parties pour avoir ne serait-ce qu'une toute petite chance (supérieure à 1 %) de gagner !

2. Il y a 52 semaines dans une années soit 156 tirages.

On calcule $\frac{191\,649}{156} \approx 1229$ donc il faudrait jouer à

tous les tirages pendant environ 1 229 années pour avoir 1 (tout petit) % de chance de gagner le gros lot.

Comparaisons de lois binomiales

90. 1. • Le gain algébrique au premier jeu est -5 avec une probabilité 0,55 et 5 avec une probabilité 0,45 donc l'espérance de gain au 1^{er} jeu est $-5 \times 0,55 + 5 \times 0,45 = -0,5$.

• Le gain algébrique au 2^e jeu est -2 avec une probabilité 0,82 et 8 avec une probabilité 0,18 donc l'espérance de gain au 2^e jeu est $-2 \times 0,82 + 8 \times 0,18 = -0,2$.

On perd donc moins d'argent avec le 2^e jeu.

2. 20 tickets du premier jeu et 50 du deuxième.

3. a) • G_1 suit la loi $B(20 ; 0,45)$ donc

$$E(G_1) = 20 \times 0,45 = 9.$$

• G_2 suit la loi $B(50 ; 0,18)$ donc $E(G_2) = 50 \times 0,18 = 9$.

Cela veut donc dire que si l'on reproduit cette expérience un grand nombre de fois (achat de 20 tickets du premier jeu ou de 50 du deuxième jeu), en moyenne, on a 9 tickets gagnants pour les deux jeux.

$$\text{b) } \sigma(G_1) = \sqrt{20 \times 0,55 \times 0,45} \approx 2,2$$

et $\sigma(G_2) = \sqrt{50 \times 0,18 \times 0,82} \approx 2,7$ donc il est un peu plus risqué d'acheter 50 tickets du deuxième jeu car les valeurs fluctuent légèrement plus autour de 9 (il y aura donc plus souvent des valeurs éloignées de 9, en dessous ou au-dessus).

c) On rentre dans ses frais si $G_1 \geq 10$ ou $G_2 \geq 10$ (puisque l'on a dépensé 100 € et que le gain pour un ticket gagnant est 10 € dans les deux cas).

On calcule :

- $p(G_1 \geq 10) \approx 0,409$;
- $p(G_2 \geq 10) \approx 0,412$;

donc il est légèrement plus probable de rentrer dans ses frais en achetant 50 tickets du 2^e jeu.

91. • T suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6$.

• R suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,8$.

a) • $p(T \geq 10) \approx 0,872$;

• $p(R \geq 10) \approx 0,939$;

donc si 10 répétitions sont nécessaires, il faut privilégier Rob.

b) • $p(T \geq 15) \approx 0,126$;

• $p(R \geq 15) \approx 0,035$;

donc si 15 répétitions sont nécessaires, il faut privilégier Tristane (mais dans les deux cas, ces événements sont improbables).

92. • On appelle X le nombre de postures manquées à l'épreuve 1 : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,5$.

• On appelle Y le nombre de postures manquées à l'épreuve 2 : Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.

1. • $p(X \leq 3) \approx 0,172$

• $p(Y \leq 3) \approx 0,25$

donc on doit plutôt choisir l'épreuve 2.

2. • $p(X \leq 7) \approx 0,945$

• $p(Y \leq 7) \approx 0,878$

donc on doit plutôt choisir l'épreuve 1.

Déterminer un entier k avec $p(X \leq k)$

93. a) 15

b) 34

94. a) 20

b) 31

95. 1. F suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,36$.

On tabule $x \mapsto p(F \leq x)$ et on obtient que le plus petit entier k tel que $p(F \in [0 ; k]) \geq 0,95$ c'est-à-dire $p(F \leq k) \geq 0,95$ est 11.

2. $\frac{11}{20} = 0,55$ donc :

on peut être sûr au seuil de 95 % que la fréquence de FACE obtenus sera inférieure ou égale à 55 %.

96. 1.

```
def cumul_binomiale(n, p, k):
    proba = 0
    for i in range(k+1):
        proba = proba + proba_binomiale(n, p, i)
    return proba
```

2.

```
def seuil_binomiale(n, p, s):
    i = 0
    while cumul_binomiale(n, p, i) <= s:
        i = i+1
    return i
```

Déterminer un entier k avec $p(X \geq k)$

97. a) $p(X \geq k) > 0,9 \Leftrightarrow p(X \leq k-1) < 0,1$

On trouve $k-1 = 30$ puis $k = 31$.

b) $p(X \geq k) \geq 0,05 \Leftrightarrow p(X \leq k-1) \leq 0,95$

On trouve $k-1 = 38$ puis $k = 39$.

98. 1. $p(Y \geq k) > 0,99 \Leftrightarrow p(Y \leq k-1) < 0,01$

On trouve $k-1 = 3$ puis $k = 4$.

2. $p(Y \geq k') \leq 0,02 \Leftrightarrow p(Y \leq k'-1) \geq 0,98$

On trouve $k'-1 = 16$ puis $k' = 17$.

99. 1. J suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,35$.

On cherche le plus grand k tel que $p(J \geq k) \geq 0,99 \Leftrightarrow p(J \leq k-1) \leq 0,01$.

On tabule $x \mapsto p(J \leq x)$ et on obtient $k-1 = 6$ soit $k = 7$.

2. $\frac{7}{40} = 0,175$ donc :

on peut être sûr au seuil de 99 % que la fréquence de boules jaunes obtenues sera supérieure ou égale à 17,5 %.

Déterminer un intervalle de fluctuation centré

100. On tabule $k \mapsto p(X \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
1	0.0131			
2	0.0513			
3	0.1345			
4	0.268			
5	0.4353			
6	0.6065			
7	0.7533			
8	0.8608			
9	0.9292			
10	0.9675			
11	0.9865			
X=1				

donc [2 ; 11] est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % (car $p(X \leq 2) > 0,025$ et $p(X \leq 11) \geq 0,975$).

101. On tabule $k \mapsto p(Y \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
41	0.0016			
42	0.0027			
43	0.0045			
44	0.0072			
45	0.0111			
46	0.0169			
47	0.0249			
48	0.0359			
49	0.0506			
50	0.0695			
51	0.0934			
X=49				

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
70	0.9458			
71	0.9604			
72	0.9716			
73	0.98			
74	0.9862			
75	0.9906			
76	0.9938			
77	0.9959			
78	0.9974			
79	0.9984			
80	0.999			
X=80				

donc [44 ; 77] est un intervalle de fluctuation centré au risque de 1 % (car $p(X \leq 44) > 0,005$ et $p(X \leq 77) \geq 0,995$).

102. 1. P suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = \frac{5}{11}$.

On tabule $k \mapsto p(P \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
6	0.0232			
7	0.0584			
8	0.1244			
9	0.2283			
10	0.3668			
11	0.5242			
12	0.6773			
13	0.8048			
14	0.8959			
15	0.9516			
16	0.9806			
X=16				

donc [7 ; 16] est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % (car $p(X \leq 7) > 0,025$ et $p(X \leq 16) \geq 0,975$).

2. La fréquence de nombres pairs sur les 25 tirages est donc comprise entre $\frac{7}{25}$ soit 28 % et $\frac{16}{25}$ soit 64 %, au risque de 5 %.

Problèmes de seuil

103. Soit X le nombre de ces 237 élèves qui se présenteront effectivement à la cantine.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 237$ et $p = 0,93$.

1. On cherche à trouver le plus petit entier k tel que $p(X \leq k) \geq 0,95$ (ou $p(X > k) \leq 0,05$ ce qui est équivalent) : la calculatrice donne $k = 227$: il faut prévoir au minimum 227 repas.

2. On cherche à trouver le plus petit entier k tel que $p(X \leq k) \geq 0,99$ (ou $p(X > k) \leq 0,01$ ce qui est équivalent) : la calculatrice donne $k = 229$: il faut prévoir au minimum 229 repas.

104. Soit X le nombre de cartons jaunes reçus sur les 38 matchs.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 38$ et $p = 0,15$.

1. On cherche la plus petite valeur de n entière telle que $p(X \leq n) \geq 0,99$: la calculatrice donne $n = 11$.

2. On cherche la plus petite valeur de n entière telle que $p(X > n) < 0,10$ c'est-à-dire $p(X \leq n) > 0,9$: la calculatrice donne $n = 9$.

105. 1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes comptant voter pour F. Fillon dans l'échantillon.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,200$ 1 et $F = \frac{X}{1000}$ donc le problème revient à

trouver le plus petit intervalle de fluctuation de X de la forme $[0 ; k]$ au seuil de 99 %.

La calculatrice donne $[0 ; 230]$ pour plus petit intervalle de fluctuation de X de la forme $[0 ; k]$ au seuil de 99 % c'est-à-dire que $[0 ; 0,23]$ est le plus petit intervalle de fluctuation de F de la forme $[0 ; k]$ au seuil de 99 %.

2. On a vu que normalement, un sondage sur 1 000 personnes devrait donner au maximum 23 % d'intentions de vote à F. Fillon, au seuil de 95 %.

- Pour les sondages de 2016, il y a donc un souci car non pas un (cela pourrait arriver dans la multitude de sondages) mais la plupart des sondages donnent un score, 25 %, très largement au-dessus des 23 % : ces sondages ne sont pas représentatifs, on peut penser qu'ils ont été faits trop tôt et n'ont donc que peu de valeur.
- Pour les sondages à partir de 2017, on ne peut rien dire, cela semble cohérent (on pourrait donner un intervalle de fluctuation centré pour discuter du 17 %) donc ces sondages semblent pertinents.

106. 1. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre d'atomes de carbone 14 présents après 11 460. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100\,000$ et $p = 0,25$.

On tabule $k \mapsto p(X \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
0	0			
10000	0			
20000	0			
30000	1			
40000	1			
50000	1			
60000	1			
70000	1			
80000	1			
90000	1			
100000	1			
X=0				

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
20000	0			
21000	0			
22000	0			
23000	2E-49			
24000	1E-13			
25000	0,5017			
26000	1			
27000	1			
28000	1			
29000	1			
30000	1			
X=20000				

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
24000	1E-13			
24100	2E-11			
24200	2,3E-9			
24300	1,5E-7			
24400	5,7E-6			
24500	1,3E-4			
24600	0,0017			
24700	0,0143			
24800	0,0725			
24900	0,2338			
25000	0,5017			
X=24000				

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
24700	0,0143			
24710	0,0172			
24720	0,0205			
24730	0,0244			
24740	0,0289			
24750	0,0341			
24760	0,04			
24770	0,0468			
24780	0,0544			
24790	0,0629			
24800	0,0725			
X=24700				

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
24730	0,0244			
24731	0,0248			
24732	0,0253			
24733	0,0257			
24734	0,0262			
24735	0,0266			
24736	0,0271			
24737	0,0275			
24738	0,028			
24739	0,0285			
24740	0,0289			
X=24730				

Donc $a = 24\,732$.
On procède de même pour b ;

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR MODIF FONCTION				
X	Y1			
25260	0.9713			
25261	0.9718			
25262	0.9723			
25263	0.9727			
25264	0.9732			
25265	0.9736			
25266	0.9741			
25267	0.9745			
25268	0.975			
25269	0.9754			
25270	0.9758			
Y1=0.97495099555186				

donc $b = 25\,269$.

Ainsi, l'intervalle $[24\,732 ; 25\,269]$ est un intervalle de fluctuation centré du nombre d'atomes restants, au seuil de 95 %.

2. Au départ, il y avait $100\,000 \times 10^{12} = 10^{17}$ atomes de carbones 12 pour 100 000 atomes de carbone 14. Comme ils ne se désintègrent pas, il en reste 10^{17} pour entre 24 732 et 25 269 c'est-à-dire entre $4,04 \times 10^{12}$ et $3,96 \times 10^{12}$ atomes de carbone 12 pour un atome de carbone 14 c'est-à-dire autour de 4×10^{12} .

Trouver n ou p

107. 1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes prenant le vol pour n billets vendus.

X suit la loi binomiale de paramètres n (inconnu) et $p = 0,91$.

On tabule $n \mapsto p(X \leq 180)$ (en partant de 180) avec les instructions :

- $Y1 = \text{binomFRép}(X, 0.91, 180)$ (TI) ;
- $Y1 = \text{BinomialCD}(180, x, 0.91)$ (casio) ;
- $f(x) = \text{binomcdf}(180, x, 0.91)$ (numworks).

On obtient :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
184	1			
185	0.9998			
186	0.9995			
187	0.9984			
188	0.9958			
189	0.9902			
190	0.9798			
191	0.9619			
192	0.934			
193	0.8938			
194	0.8401			
X=194				

donc pour 191 billets vendus, la probabilité que le nombre de personnes prenant effectivement le vol soit inférieur ou égal à 180 [c'est-à-dire que tout

le monde puisse prendre place dans l'avion) est environ 0,96 donc supérieure ou égale à 0,95.

2. C'est la même question avec 0,99 au lieu de 0,95 donc on peut vendre 189 billets.

108. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de chocs reçus sur 15 000 obstacles.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 15\,000$ et p inconnu.

On cherche à trouver p tel que $p(X > 3\,000) < 0,03$ c'est-à-dire $p(X \leq 3\,000) > 0,97$.

On tabule $p \mapsto p(X \leq 3\,000)$ (d'abord avec un pas de 0,1 puis un pas de 0,01, etc.) avec les instructions :

- $Y1 = \text{binomFRép}(15000, X, 3000)$ (TI) ;
- $Y1 = \text{BinomialCD}(3000, 15000, x)$ (casio) ;
- $f(x) = \text{binomcdf}(3000, 15000, x)$ (numworks).

On obtient :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
0.19	0.9991			
0.191	0.9974			
0.192	0.9936			
0.193	0.9852			
0.194	0.9688			
0.195	0.9398			
0.196	0.8931			
0.197	0.8249			
0.198	0.7344			
0.199	0.6251			
0.2	0.5049			
X=0.2				

donc $p \approx 0,193$.

Tests d'hypothèses

109. 1. C suit la loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = 0,8$.

2. $[461 ; 499]$

3. a) On s'attendait à un nombre de contrats entre 461 et 499 donc le nombre de 550 est nettement plus élevé.

b) On peut penser que cette affirmation est fausse, au risque d'erreur de 5 %.

110. 1. G suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,9$.

2. Un intervalle de fluctuation centré de G au seuil de 95 % est $[348 ; 371]$ donc un intervalle de fluctuation centré de $\frac{G}{400}$ au seuil de 95 % est

$\left[\frac{348}{400} ; \frac{371}{400} \right]$ c'est-à-dire $[0,87 ; 0,9275]$.

3. On s'attendait à entre 87 % et 92,75 % de patients guéris et il y en a 87,5 % ce qui est bien entre 87 % et 92,75 %. On ne peut donc pas douter du pourcentage d'efficacité annoncé.

111. 1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,03$.
On trouve $[0 ; a] = [0 ; 43]$.
2. $39 \in [0 ; 43]$ donc le taux de défaut est dans la fourchette attendue, au seuil de 99 %.

112. 1. a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = \frac{1}{3}$ donc il peut « espérer » avoir
 $E(X) = 600 \times \frac{1}{3} = 200$ plans homozygotes.

b) $[178 ; 223]$
c) $201 \in [178 ; 223]$ donc rien ne permet de remettre en cause sa théorie. On peut néanmoins s'interroger sur le fait que la valeur trouvée, 201, soit aussi proche de la valeur « idéale » 200.
2. a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = 0,37$ donc il peut « espérer » avoir
 $E(X) = 600 \times 0,37 = 222$ plans homozygotes.
b) $[199 ; 245]$
c) $201 \in [199 ; 245]$ donc rien ne permet de remettre en cause sa théorie.

3. Le nombre de plans homozygotes trouvés, 201, est très proche du nombre que Mendel pensait idéal, 200, mais beaucoup moins de celui « réellement idéal », 222. On a donc pu penser que Mendel avait truqué ses résultats afin d'avoir un résultat quasi parfait et ainsi valider sa théorie.
Remarque : On pourra faire remarquer aux élèves que l'expérience de Mendel est facilement reproductible et que tout(e) scientifique (muni(e) du matériel nécessaire) peut reproduire l'expérience afin de vérifier s'il ou elle trouve des résultats compatibles avec la théorie de Mendel. Cette notion de reproductibilité d'expérience est au cœur de la méthode scientifique.

113. Pour la première partie (réflexion des élèves), toutes les réponses sont valables.
La solution de Pascal est la suivante :
• Le perdant de la première manche aurait gagné le jeu, donc 64 pistoles, s'il avait gagné les suivantes c'est-à-dire avec une probabilité

de $0,5^2 = 0,25$, son espérance de gain est donc $0,25 \times 64 + 0,75 \times 0 = 16$.
• Le gagnant de la première manche aurait gagné le jeu dans les autres cas, c'est-à-dire avec une probabilité de 0,75, son espérance de gain est donc $0,75 \times 64 + 0,25 \times 0 = 48$.
Pascal propose donc de répartir les gains ainsi : 48 pistoles pour le gagnant de la première manche et 16 pistoles pour le perdant de la première manche.

114. Travail de l'élève.
La première chose à remarquer est que cela va diminuer le nombre de lancers et donc accélérer le jeu (ce qui est sans doute la raison principale de cette mesure).

Allons un peu plus loin en prenant deux typologies de joueurs.
❶ Un joueur avec un bon pourcentage de réussite au lancer franc, par exemple 85 %.

• Avec la nouvelle mesure, on a :

Nombre de points	0	2
Probabilité	0,15	0,85

D'après la calculatrice, il peut espérer marquer 1,7 point avec un écart-type d'environ 0,71.
• Avec l'ancienne mesure, on a :

Nombre de points	0	1	2
Probabilité	$0,15^2 = 0,0225$	$0,15 \times 0,85 + 0,85 \times 0,15 = 0,255$	$0,85^2 = 0,7225$

D'après la calculatrice, il peut espérer marquer 1,7 point avec un écart-type d'environ 0,5.
❷ Un joueur avec un mauvais pourcentage de réussite au lancers francs, par exemple 50 %.

• Avec la nouvelle mesure, pour un lancer à 2 points, on a :

Nombre de points	0	2
Probabilité	0,5	0,5

La calculatrice donne qu'il peut espérer marquer 1 point avec un écart-type de 1.
• Avec l'ancienne mesure, pour un lancer à 2 points, on a :

Nombre de points	0	1	2
Probabilité	$0,5^2 = 0,25$	$0,5 \times 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,5$	$0,5^2 = 0,25$

La calculatrice donne qu'il peut espérer marquer 1 point avec un écart-type d'environ 0,71.

On voit que dans les deux cas, l'espérance est la même et que l'écart-type est plus grand avec la nouvelle mesure ce qui veut dire que les valeurs sont globalement plus éloignées de l'espérance avec cette nouvelle mesure : le jeu est « plus risqué ».

On pourra aussi remarquer que si le lancer-franc a lieu sur la dernière action et que les deux équipes sont à égalité, dans le cas :

❶ la probabilité de passer devant pour l'équipe obtenant le lancer franc est 0,85 avec la nouvelle mesure contre $0,255 + 0,7225 = 0,9775$ avec l'ancienne mesure ;

❷ la probabilité de passer devant pour l'équipe obtenant le lancer franc est 0,5 avec la nouvelle mesure contre $0,5 + 0,25 = 0,75$ avec l'ancienne mesure.

Exercices bilan

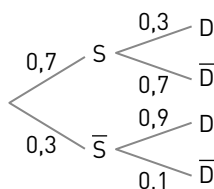
p. 392

115. La pêche à la ligne

A. Épreuves non indépendantes

1. Le fait qu'il aille pêcher le samedi a de l'influence sur le fait qu'il y aille le dimanche donc les deux épreuves ne sont pas indépendantes.

2. On appelle S l'événement « il va à la pêche samedi » et D l'événement « il va à la pêche dimanche ». On a l'arbre :



$$p(S \cup D) = 0,7 \times 0,3 + 0,7 \times 0,7 + 0,3 \times 0,9 = 0,97$$

B. Épreuves indépendantes

1. $\Omega = \{S; T; B\}^{10}$

$$\begin{aligned} 2. p(\{S; S; S; S; S; S; T; T; B; B; B\}) &= p(S)^5 \times p(T)^2 \times p(B)^3 \\ &= 0,4^5 \times 0,35^2 \times 0,25^3 \\ &= 0,000\,019\,6 \end{aligned}$$

C. Loi binomiale

1. X suit la loi binomiale si toutes les prises sont indépendantes. Dans ce cas, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,2$.

2. $m = 50 \times 0,2 = 10$ et $p(X > 10) \approx 0,416$.

3. $p(X < 20) \approx 0,9991$ donc oui.

4. $[5; 16]$

116. Taux de satisfaction

1. On cherche le plus grand a tel que $p(X \geq a) \geq 0,95 \Leftrightarrow p(X \leq a - 1) \leq 0,05$.

On trouve $a - 1 = 971$ puis $a = 972$.

2. $974 \in [972; 1\,000]$ donc il n'y a pas de raison de douter du taux de satisfaction affiché par l'agence de voyage.

117. Gestion des réservations

Soit n le nombre de réservations total. Le nombre de personnes venant chercher le smartphone est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n (inconnu) et $p = 0,9$.

Il s'agit de trouver le plus grand entier n tel que $p(X \leq 500) \geq 0,95$.

On tabule à l'aide de la calculatrice et on trouve $n = 543$: on peut accepter 43 réservations supplémentaires.

118. Choisir son podcast

1. P_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,9$ donc, en moyenne, il y a $E(P_1) = 10 \times 0,9 = 9$ titres qui lui plaisent dans le podcast 1.

P_2 suit une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,75$ donc, en moyenne, il y a $E(P_2) = 12 \times 0,75 = 9$ titres qui lui plaisent dans le podcast 2.

2. $p(7 \leq P_1 \leq 9) \approx 0,639$ et $p(8 \leq P_2 \leq 11) \approx 0,811$.

3. $p(P_1 \geq 8) \approx 0,93$ et $p(P_2 \geq 8) \approx 0,842$ donc elle doit privilégier le podcast 1.

119. Probabilité de gagner

1. La probabilité de n'obtenir aucune fois PILE est la probabilité de n'obtenir que FACE soit 0,5ⁿ pour n lancers.

Il s'agit de résoudre $0,5^n < 10^{-9}$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,5) < -9 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-9 \ln(10)}{\ln(0,5)} \text{ donc il faut jouer au moins 30 fois.}$$

2. Soit p la probabilité d'obtenir PILE. On a alors $p + 4p = 1 \Leftrightarrow p = 0,2$ et la probabilité d'obtenir FACE est 0,8.

La probabilité de n'obtenir aucune fois PILE est la probabilité de n'obtenir que FACE soit $0,8^n$ pour n lancers.

Il s'agit de résoudre $0,8^n < 10^{-9}$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,8) < -9 \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{-9 \ln(10)}{\ln(0,8)} \text{ donc il faut jouer au moins 93 fois.}$$

Préparer le BAC Je me teste p. 394

120. B 121. C

122. D 123. B

124. C 125. A

126. B 127. B

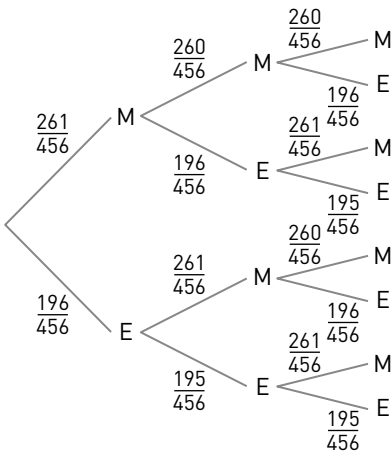
128. B

Préparer le BAC Je révise p. 395

129. Épreuves indépendantes

A. 1. Non car le titre joué ne peut pas être rejoué à l'étape d'après : le résultat d'une épreuve a donc de l'influence sur la suivante.

2.



3. a) $\frac{261}{457} \times \frac{196}{456} \times \frac{195}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{261}{456} \times \frac{196}{456} \times \frac{195}{456} \times \frac{261}{456}$

$\approx 0,315$ (4^e, 6^e et 7^e chemins).

b) On peut faire le calcul direct ou remarquer que c'est la probabilité que le téléphone joue 2 ou 3 titres électro soit

$$\frac{261}{457} \times \frac{196}{456} \times \frac{195}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{261}{456} \times \frac{196}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{195}{456} \times \frac{261}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{196}{456} \times \frac{195}{456} \approx 0,394.$$

B. 1. Oui.

2. $\{M; E\}^5$

3. $p(\{M; E; E; E; M\}) = p(M)^2 \times p(E)^3$
 $= \left(\frac{261}{457}\right)^2 \times \left(\frac{196}{457}\right)^3 \approx 0,026$

4. $p(\{M; E; E; E; E\}) = p(E; M; E; E; E)$
 $= p(M)^1 \times p(E)^4$
 $= \left(\frac{261}{457}\right) \times \left(\frac{196}{457}\right)^4 \approx 0,019$

5. Introduisons la variable aléatoire X donnant le nombre de titres « métal » joués.

X suit la binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{261}{457}$.

On cherche donc :

- $p(X = 1) \approx 0,097$;
- $p(2 \leq X \leq 4) \approx 0,828$.

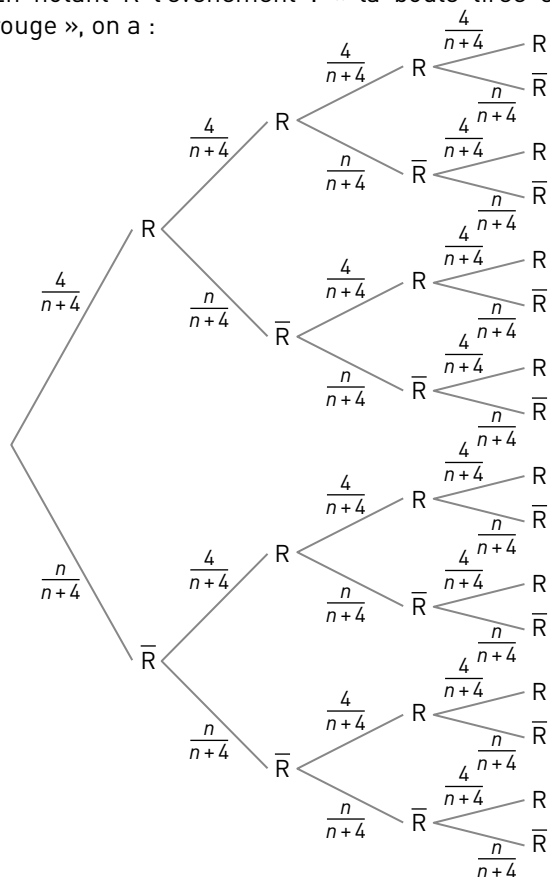
6.

```
def cinq_titres() :  
    L=[]  
    for i in range(5) :  
        if random.randint(1,457) <= 261 :  
            L.append("Métal")  
        else :  
            L.append("Electro")  
    return L
```

130. Une urne

1. Le tirage est avec remise donc, en considérant que l'obtention d'une boule rouge est un succès (par exemple), on répète 4 fois de manière indépendante une même expérience de Bernoulli donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli.

En notant R l'événement : « la boule tirée est rouge », on a :



2. q_n est la probabilité de l'événement contraire de « aucune boule n'est noire » donc $q_n = 1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$.

3. $1 - \left(\frac{4}{n+4}\right)^4 \geq 0,9999 \Leftrightarrow 0,0001 \geq \left(\frac{4}{n+4}\right)^4$
donc $n \geq 36$.

131. Seuil et intervalle de fluctuation centré

1. D suit la loi binomiale de paramètres $n=1\ 500$ et $p=0,02$.

$p(D \leq 44) \approx 0,994$ donc oui.

2. a) [20 ; 41]

b) Non car $40 \in [20 ; 41]$.

132. Problème de seuil

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes (supposées indépendantes) n'aimant pas le livre dans le club. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 236$ et $p = 0,15$.

On cherche le plus petit entier k tel que $p(X > k) \leq 0,01 \Leftrightarrow p(X \leq k) \geq 0,99$ donc $k = 49$.

Exercices vers le supérieur p. 396-397

133. La bonne martingale ?

A. Loi géométrique

1. a) 0,49

b) • Elle quitte le casino après 2 parties si elle perd puis gagne c'est-à-dire avec une probabilité $0,51 \times 0,49 = 0,2499$.

• Elle quitte le casino après 3 parties si elle perd puis perd puis gagne c'est-à-dire avec une probabilité $0,51^2 \times 0,49 = 0,127449$.

• Elle quitte le casino après k parties si elle perd successivement $k - 1$ fois puis gagne c'est-à-dire avec une probabilité $0,51^{k-1} \times 0,49$.

c) $p(X = k) = 0,51^{k-1} \times 0,49$

2. a) Elle gagne 1 000 €.

b) • Elle perd 1 000 € puis gagne 2 000 € donc elle gagne 1 000 € au total.

• Elle perd 1 000 € puis perd 2 000 € puis gagne 4 000 € donc elle gagne 1 000 € au total.

c) On peut conjecturer qu'elle gagne toujours 1 000 €.

3. a) $u_n = 1\ 000 \times 2^{n-1}$

b) La somme mise sur les n premières parties est

$$1\ 000 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 1\ 000 \times (2^n - 1) = 1\ 000 \times 2^n - 1\ 000$$

(somme des termes d'une suite géométrique).

On gagne le double de la dernière mise c'est-à-dire $2 \times 1\ 000 \times 2^{n-1} = 1\ 000 \times 2^n$ donc le gain algébrique est

$$1\ 000 \times 2^n - (1\ 000 \times 2^n - 1\ 000) = 1\ 000 \text{ quel que soit le nombre de parties jouées.}$$

4. a) G prend la valeur 1 000 avec une probabilité 1.

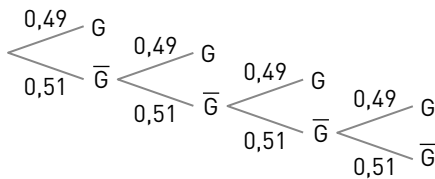
b) Cela paraît paradoxal car avec cette méthode, on gagne 1 000 € à coup sûr.

En réalité, ça ne l'est pas tant que ça car on manque assez rapidement d'argent pour réaliser cette stratégie. Par exemple, après 10 parties, on a misé $1\ 000 \times 2^{10} - 1\ 000 = 1\ 023\ 000$ €.

B. Loi géométrique tronquée

1. On résout $1\,000 \times 2^n - 1\,000 = 15\,000$ et on trouve $n = 4$ donc elle ne pourra miser que pendant 4 parties (si elle ne gagne pas avant).

2. a)



b) On a :

y_i	0	1	2	3	4
$p(Y = y_i)$	$0,51^4$ $\approx 0,068$	0,49	$0,51 \times 0,49$ $\approx 0,25$	$0,51^2 \times 0,49$ $\approx 0,127$	$0,51^3 \times 0,49$ $\approx 0,065$

c) On a :

g_i	-15 000	1 000
$p(G' = g_i)$	$0,51^4$ $\approx 0,068$	$1 - 0,51^4$ $\approx 0,932$

$$E(G') = -15\,000 \times 0,51^4 + 1\,000 \times (1 - 0,51^4) \approx -82 \text{ €}$$

3. • On résout $100 \times 2^n - 100 = 15\,000$ et on trouve $n \approx 7,2$ donc elle ne pourra miser que pendant 7 parties et cela lui coûte 12 700 €.

• Pour k entier entre 1 et 7, on a $p(Y = k) = 0,51^{k-1} \times 0,49$ et $p(Y = 0) = 0,51^7$.

• On a :

g_i	-12 700	100
$p(G' = g_i)$	$0,51^7$ $\approx 0,009$	$1 - 0,51^7$ $\approx 0,991$

$$E(G') = -12\,700 \times 0,51^7 + 100 \times (1 - 0,51^7) \approx -15 \text{ €}$$

4. Avec la deuxième stratégie, on réduit les pertes en moyenne mais le gain est également moindre.

Remarque : On pourrait calculer les écarts-types pour constater que la première stratégie est plus risquée.

134. Intervalle de fluctuation centré

$$1. p(X \in [a' ; b']) = 1 - (p(X < a') + p(X > b'))$$

$$\text{or } p(X < a') + p(X > b') \leq 2 \times \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{soit } p(X < a') + p(X > b') \leq \alpha$$

$$\Rightarrow -[p(X < a') + p(X > b')] \geq -\alpha$$

$$\text{puis } p(X \in [a' ; b']) = 1 - \alpha.$$

2. a) Pour a entier non nul,

$$p(X < a) = p(X \leq a - 1) \text{ or } a \text{ est le plus petit entier tel}$$

$$\text{que } p(X \leq a) > \frac{\alpha}{2} \text{ donc } p(X \leq a - 1) \leq \frac{\alpha}{2} \text{ c'est-à-dire}$$

$$\text{dire } p(X < a) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{b) } p(X > b) = 1 - p(X \leq b) \text{ or } p(X \leq b) \geq 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow -p(X \leq b) \leq -1 + \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - p(X \leq b) \leq \frac{\alpha}{2} \text{ c'est-à-dire } p(X > b) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

3. On a montré à la question 1 que si $p(X < a') \leq \frac{\alpha}{2}$

$$\text{et } p(X > b') \leq \frac{\alpha}{2} \text{ alors } [a' ; b'] \text{ est bien un intervalle}$$

de fluctuation au seuil de $1 - \alpha$.

Comme les deux nombres a et b définis à la question 2. vérifient les conditions demandées à la question 1., $[a ; b]$ est bien un intervalle de fluctuation centré au seuil de $1 - \alpha$ qui est centré d'après les questions 2. a) et 2. b).

135. Influence de p sur l'écart-type

1. La fonction racine carrée est croissante donc cette fonction, appelons la f , a les mêmes variations que la fonction $p \mapsto p(1 - p) = -p^2 + p$ qui est croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$

donc :

p	0	$\frac{1}{2}$	1
f	0	$\frac{1}{2}$	0

2. La courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 0,5$ car $f(0,5 - p) = f(0,5 + p)$.

3. Pour n fixé :

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)} = \sqrt{n} \times \sqrt{p(1 - p)}$$

$$\bullet \sigma(X') = \sqrt{np'(1-p')} = \sqrt{n} \times \sqrt{p'(1-p')}$$

De $|0,5 - p| < |0,5 - p'|$, on déduit que p est moins éloigné de 0,5 que p' donc que $\sqrt{p(1-p)} > \sqrt{p'(1-p')}$

(par symétrie) c'est-à-dire que $\sigma(X) > \sigma(X')$.

136. Test d'hypothèses

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes touchées par la maladie dans l'échantillon.

Si l'hypothèse de 15 % est correcte, en considérant toutes ces personnes indépendantes, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,15$.

D'après la calculatrice, un intervalle de fluctuation centré de X au seuil de 95 % est $[20 ; 40]$.

Comme $25 \in [20 ; 40]$, on ne rejette pas l'hypothèse.

137. Probabilité et loi binomiale

1. La probabilité d'obtenir k succès en $n+1$ essais est la somme de la probabilité d'obtenir $k-1$ succès en n essais puis 1 succès au $(n+1)$ -ième essai et de la probabilité d'obtenir k succès en n essais puis 1 échec au $(n+1)$ -ième essai c'est-à-dire $p(X_{n+1} = k)$

$= p(X_n = k-1) \times p + p(X_n = k) \times (1-p)$ (on peut faire un arbre pour s'en convaincre si ce n'est pas clair).

2. a) • $p(X_n = 0)$ est la probabilité de n'avoir que des échecs en n essais c'est-à-dire $(1-p)^n$ et $\binom{n}{0}$

$\times p^0 \times (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$ ce qui justifie l'égalité dans le cas $k = 0$.

• $p(X_n = n)$ est la probabilité de n'avoir que des succès en n essais c'est-à-dire p^n et $\binom{n}{n} \times p^n \times (1-p)^{n-n}$

$= p^n$ ce qui justifie l'égalité dans le cas $k = n$.

b) On considère la proposition

« $p(X_n = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ pour tout k entier entre 0 et n ».

Initialisation : si $n = 1$ alors X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre p donc

• $p(X_1 = 0) = 1 - p$ et

$$\binom{1}{0} \times p^0 \times (1-p)^{1-0} = 1 - p \text{ également ;}$$

• $p(X_1 = 1) = p$ et $\binom{1}{1} \times p^1 \times (1-p)^{1-1} = p$ également.

La proposition est vraie au rang 1.

Hérédité : supposons la proposition vraie à un rang $n \geq 1$ (hypothèse de récurrence) et montrons qu'elle est alors vraie au rang $n+1$.

• Pour tout k compris entre 0 et n , on a :

$$p(X_{n+1} = k) = p(X_n = k-1) \times p + p(X_n = k) \times (1-p).$$

$$\text{Or } p(X_n = k-1) \times p = \binom{n}{k-1} \times p^{k-1} \times (1-p)^{n-(k-1)} \times p$$

$$= \binom{n}{k-1} \times p^k \times (1-p)^{n-k+1} = \binom{n}{k-1} \times p^k \times (1-p)^{n+1-k}$$

$$\text{et } p(X_n = k) \times (1-p) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \times (1-p)$$

$$= \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n+1-k}.$$

$$\text{Ainsi, } p(X_{n+1} = k) = \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \times p^k \times (1-p)^{n+1-k}$$

$$= \binom{n+1}{k} \times p^k \times (1-p)^{n+1-k}.$$

• Pour $k = n+1$, la proposition est vraie d'après la question 2. a.

On vient de montrer que si la proposition est vraie au rang n , alors elle est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La proposition est vraie au rang 1 et est héréditaire donc, pour tout entier n non nul,

$$p(X_n = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \text{ pour tout } k \text{ entier entre 0 et } n.$$

138. Espérance de la loi binomiale

1.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} \\ &= \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} = \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. p(X_n = k) \times k &= \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \times k \\ &= \frac{n}{k} \times \binom{n-1}{k-1} \times k \times p \times p^{k-1} \times (1-p)^{n-1-(k-1)} \\ &= np \times p(Y = k-1) \end{aligned}$$

$$3. a) E(X) = 0 + np \times p(Y=0) + \dots + np \times p(Y=n-1) = np[p(Y=0) + \dots + p(Y=n-1)] \text{ (d'après 2.)}$$

$$b) E(X) = np \times 1 = np$$

139. Relation de Panjer

$$A. 1. p(N = k) = \frac{(k-2)a}{k} \times p(N = k-1).$$

Pour $k = 2$, on a $\frac{(k-2)a}{k} = 0$ donc $p(N = 2) = 0$ puis

$p(N = k) = 0$ par récurrence immédiate pour tout $k \geq 2$.

2. N prend pour valeur 0 et 1 avec des probabilités différentes de 0 et 1 donc N suit une loi de Bernoulli.

On a $p(N = 1) = -a \times p(N = 0)$.

Comme $p(N = 0) + p(N = 1) = 1$, on déduit que

$$(1-a)p(N = 0) = 1 \Leftrightarrow a = 1 - \frac{1}{p(N = 0)}.$$

$$\begin{aligned} B. 1. \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n+1-k)}{k \times (k-1)! \times (n+1-k)!} \\ &= \frac{n+1-k}{k} \times \frac{n!}{(k-1)! \times (n-(k-1))!} \\ &= \frac{n+1-k}{k} \times \binom{n}{k-1} \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} p(Z = k) &= \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n+1-k}{k} \times \\ &= \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times p(Z = k-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} &= \frac{p}{1-p} \times \frac{-k}{k} + \frac{n+1}{k} \\ &= \frac{p}{1-p} \times \left(-1 + \frac{n+1}{k}\right) \\ &= -\frac{p}{1-p} + \frac{\frac{p}{1-p} \times (n+1)}{k} \end{aligned}$$

On a donc bien une relation de Panjer avec

$$a = -\frac{p}{1-p} < 1 \text{ et } b = \frac{p}{1-p} \times (n+1)$$

(notons que $p(Z = 0) \neq 1$ pour une loi binomiale).

140. Loi de Poisson

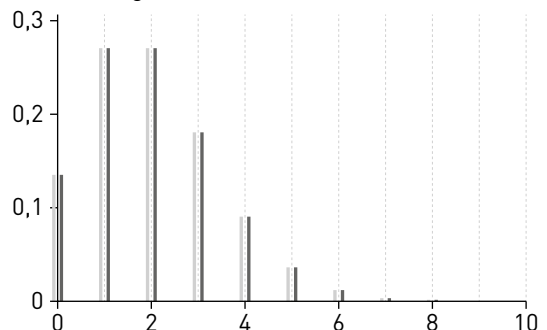
1. a)

X	Y1
0	0.1353
1	0.2707
2	0.2707
3	0.1804
4	0.0902
5	0.0361
6	0.012
7	0.0034
8	8.6E-4
9	1.9E-4
10	3.8E-5

X=0

$p(X = k) < 0,01$ à partir de $k = 7$.

b) On a : (en gris clair ci-dessous)



c) $0 \times 0,14 + 1 \times 0,27 + 2 \times 0,27 + \dots + 7 \times 0,034 \approx 2$
donc on peut penser que l'espérance associée à une loi de Poisson de paramètre λ est λ .

2. a)

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
0	0.1351			
1	0.2707			
2	0.2709			
3	0.1806			
4	0.0902			
5	0.036			
6	0.012			
7	0.0034			
8	8.5E-4			
9	1.9E-4			
10	3.7E-5			

X=0

En gris soutenu sur le graphique précédent.

b) Pour Y , n est assez grand (1 000) et un succès est assez rare (probabilité 0,002 c'est-à-dire une chance sur 500) et $E(Y) = 2$ donc la probabilité d'obtenir k succès, $p(Y = k)$ est proche de $p(X = k)$ où X suit une loi de Poisson de paramètre $E(Y)$, ce que l'on a bien constaté sur les graphiques.

3. a) Appelons X la variable aléatoire suivant une loi binomiale (on suppose les billets indépendants) donnant le nombre de faux billets reçus sur le total des billets en notre possession dans une vie.

On ne connaît pas les paramètres de cette loi mais on sait que :

- le nombre total de billets que l'on a en sa possession en une vie est très grand ;
- la probabilité qu'un billet soit faux est très petite ;
- comme on nous dit qu'en moyenne, on en reçoit 3, cela veut dire que $E(X) = 3$.

Toutes les conditions sont réunies pour approximer X par une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre 3.

b) On approxime $p(X > 4)$ par

$$p(Y > 4) = 1 - \frac{3^0}{0!}e^{-3} - \frac{3^1}{1!}e^{-3} - \frac{3^2}{2!}e^{-3} - \frac{3^3}{3!}e^{-3} - \frac{3^4}{4!}e^{-3} \approx 0,185.$$

141. Déénombrer avec les probabilités

1. Si on considère la variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,5$ alors

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times 0,5^k \times 0,5^{n-k} = \binom{n}{k} \times 0,5^n.$$

Ainsi l'expression dans l'énoncé est

$$p(X = 0) + p(X = 1) + \dots + p(X = n) = 1.$$

2. En multipliant par 2^n les deux membres de l'égalité précédente, on obtient l'égalité souhaitée.

Travaux pratiques

p. 398-401

TP 1. Calculatrice et loi binomiale

• **Durée estimée :** 10 min

• **Objectif :** Utiliser la calculatrice pour calculer directement des probabilités de la forme $p(X = k)$ et $p(X \leq k)$.

Activité de l'élève.

TP 2. Choisir le bon nombre

• **Durée estimée :** 55 min

• **Objectif :** Travailler la programmation autour d'un problème de seuil.

1. a) $f(3) = 6$ et $f(6) = 720$.

b) $f(n) = n!$

c) ...

```
2. def k_parmi_n(k, n):
    return f(n)/(f(k)*f(n-k))
```

3.

```
def proba_binom(n, p, k):
    return k_parmi_n(k, n)*p**k*(1-p)**(n-k)
```

4. a) $p(X > k) \leq \alpha \Leftrightarrow 1 - p(X \leq k) \leq \alpha$
 $\Leftrightarrow p(X \leq k) \geq 1 - \alpha$

b)

```
def seuil(n, p, alpha):
    proba = proba_binom(n, p, 0)
    k = 0
    while proba < 1-alpha:
        k = k+1
        proba = proba + proba_binom(n, p, k)
    return k
```

5. `seuil(10, 0.3, 0.05)` renvoie 5, ce qui doit normalement correspondre à la plus petite valeur de k telle que $p(X \leq k) \geq 0,95$ où X suit la loi $B(10 ; 0,3)$.

En tabulant $k \mapsto p(X \leq k)$, où X suit la loi $B(10 ; 0,3)$, on obtient :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
0	0.0282			
1	0.1493			
2	0.3828			
3	0.6496			
4	0.8497			
5	0.9527			
6	0.9894			
7	0.9984			
8	0.9999			
9	1			
10	1			

X=0

et on retrouve bien cette valeur $k = 5$.

6. a) Pour chaque personne ayant réservé une place, on considère que c'est un succès si elle se rend effectivement au concert. N donne donc le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 543$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli avec la probabilité d'un succès $p = 0,97$ donc N suit la loi binomiale de paramètres $n = 543$ et $p = 0,97$.

b) $p(N > 530) \approx 0,17$ ce qui correspond à la probabilité qu'il manque des fauteuils si l'artiste prévoit 530 places.

c) $p(N > 540) \approx 0,00001$ donc le risque qu'il manque des places si elle prévoit 540 fauteuils est inférieur à 1 % (de l'ordre de 0,001 %).

d) `seuil(543, 0.97, 0.01)` doit donner la réponse : il renvoie 535.

TP 3. Un train bien rempli

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Simuler avec Python.

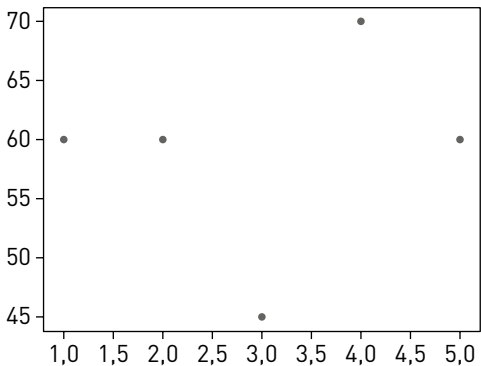
```
1. def simul_tarif():  
    p=random.random()  
    if p<=0.37:  
        tarif=45  
    if p>0.37 and p<=0.68:  
        tarif=60  
    if p>0.68 and p<=0.9:  
        tarif=70  
    if p>0.9:  
        tarif=85  
    return tarif
```

2. ...

3. a) Les entiers de 1 à 100.

b) 100 tarifs de billets simulés à l'aide de la fonction `simul_tarif`.

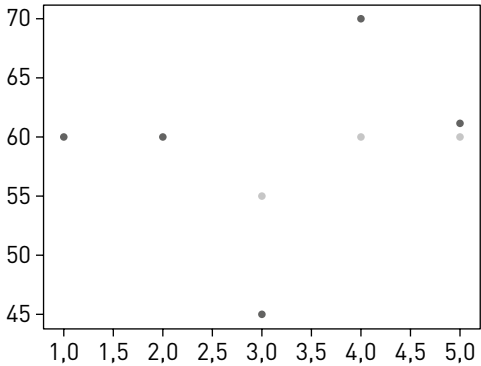
4. a)



b) Les commandes exécutées sont successivement :

```
plt.plot([1],[60], 'b.')  
plt.plot([2],[60], 'b.')  
plt.plot([3],[55], 'b.')  
plt.plot([4],[58.75], 'b.')  
plt.plot([5],[59], 'b.')
```

On obtient donc (les premiers points en gris foncé, ou rouge, et gris clair, ou bleu, sont superposés)



5. ...

6. a) De 60 environ.

b) Cette valeur correspond au tarif moyen qui doit se rapprocher de :

$$E(X) = 45 \times 0,37 + 60 \times 0,31 + 70 \times 0,22 + 85 \times 0,1 = 59,15.$$

TP 4. La planche de Galton

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Répondre au problème d'entrée de chapitre avec les connaissances acquises sur la loi binomiale.

A. Avec 3 étages

1. a) 5 € puis 10 €.
- b) Dans les 3 cas (il va tout le temps à droite sauf une fois qui peut être à l'étage 1, 2 ou 3), il finit dans le réceptacle à 10 €.
2. a) En admettant que le fait qu'il aille à droite ou à gauche à un étage n'a pas d'influence sur le fait qu'il aille à droite ou à gauche aux autres, c'est-à-dire que les directions sont indépendantes à chaque étage, et en considérant qu'un succès est l'événement « le palet va à gauche » alors X donne le nombre de succès quand on réalise $n = 3$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,5$.
- b) $p(X=0)=p(X=3)=0,125$ et $p(X=1)=p(X=2)=0,375$.

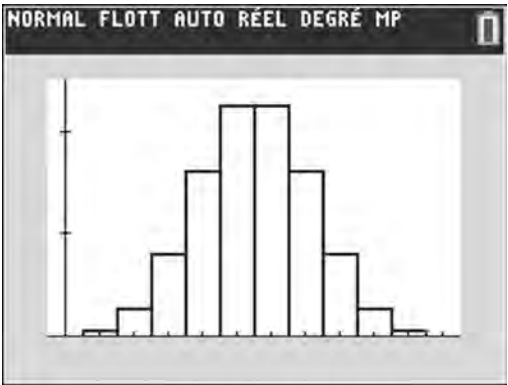
```
3. import random
gauche = 0
for i in range(3):
    if random.random() <= 0.5 :
        gauche = gauche + 1
    if gauche == 0 :
        print("500 euros")
    if gauche == 1 :
        print("10 euros")
    if gauche == 2 :
        print("5 euros")
    if gauche == 3 :
        print("1000 euros")
```

4.

g_i	1000	5	10	500
$p(G = g_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

B. Avec 11 étages

1. Il y a 11 étages donc 1 clou au-dessus, puis 2 clous, etc. puis 11 clous à l'étage le plus bas ce qui correspond à 12 façons de tomber (un réceptacle à gauche de chacun des clous et un à droite du dernier).
2. a) ...
- b) La loi binomiale.
3. a) Si la boule va 0 fois à droite, elle se retrouve dans le réceptacle 0 ; si elle va 1 fois à droite elle se retrouve dans le réceptacle 1 ; etc. Le numéro du réceptacle dans lequel finit la bille est donc donné par le nombre de fois où la bille va aller à droite sur les 11 clous qu'elle va rencontrer : R suit la loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0,5$.
- b) Avec la calculatrice (graduations tous les 1 en abscisse et 0,1 en ordonnée).



- c) On retrouve la forme caractéristique de la répartition des billes observée dans la vidéo.
4. C'est le phénomène de fluctuation d'échantillonnage.

CHAPITRE 13 Variables aléatoires, concentration et loi des grands nombres

Manuel p. 402-437

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre poursuit le travail initié en classe de Première sur les variables aléatoires, notamment sur l'espérance et la variance. Il se décompose en deux parties.

Dans un premier temps sont présentées la notion de somme de variables aléatoires, les propriétés de linéarité de l'espérance et d'additivité de la variance (dans le cas de variables aléatoires indépendantes). Ces résultats permettent la modélisation et la simplification de situations diverses (par exemple lancers d'un très grand nombre de dés). Les exercices proposés peuvent varier de la simple application de formule à la modélisation de problèmes pour obtenir la valeur d'une espérance par exemple. Cette première partie sera aussi l'occasion d'un retour sur la loi binomiale et la découverte des notions d'échantillon de variables aléatoires et de variable aléatoire moyenne.

Le second temps de ce chapitre concerne la découverte et l'utilisation des inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de concentration. Le travail, là aussi varié entre l'application simple de formule et l'analyse de situations plus complexes, porte surtout sur la manipulation d'inégalités afin de minorer ou majorer des probabilités. Enfin, comme conséquence de ces résultats, la loi des grands nombres est (ré)abordée.

On rappelle enfin que la partie sur concentration et loi des grands nombres ne figure pas dans les sections abordables par un sujet de bac d'après le BO du 23 février 2020.

Objectifs

- Travailler avec $X + Y$ ou aX .
- Travailler avec un échantillon.
- Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Utiliser l'inégalité de concentration.
- Comprendre et visualiser la loi des grands nombres.

II. Corrigés

Pour prendre un bon départ p. 403

1. Connaître et utiliser la loi de Bernoulli

- a) 0,32
- b) 0,68
- c) 0,32
- d) $0,32 \times 0,68 = 0,2176$

2. Connaître et utiliser la loi binomiale

a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,25$.

b) $p(X = 6) \approx 0,145$ et $p(X \leq 9) \approx 0,803$.

c) $p(X \geq 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p(X \leq 9) \approx 0,197$

3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire

$$E(X) = \frac{1}{2} \times (-4) + \frac{1}{3} \times 7 + \frac{1}{12} \times 12 + \frac{1}{2} \times 20 = 3$$

$$V(X) = \frac{1}{2} \times (-4 - 3)^2 + \frac{1}{3} \times (7 - 3)^2 + \frac{1}{12} \times (12 - 3)^2 + \frac{1}{2} \times (20 - 3)^2 = \frac{182}{3} \approx 60,7$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{182}{3}} \approx 7,8$$

4. Faire une simulation avec Python

```

import random
def jeu() :
    a = random.random()
    if a <= 0.01 :
        k = 45
    if a > 0.01 and a <= 0.05 :
        k = 5
    if a > 0.05 :
        k = -5
    return k
  
```

5. Utiliser une valeur absolue

1. a) $|x - 4| \geq 3$ traduit le fait que la distance entre x et 4 est supérieure ou égale à 3.

b) $|x - 5| \leq 0,5$ traduit le fait que la distance entre x et 5 est inférieure ou égale à 0,5.

2. a) $2 \leq X \leq 5 \Leftrightarrow |X - 3,5| \leq 1,5$

b) $X < 1\,000$ ou

$x > 1\,500 \Leftrightarrow |X - 1\,250| > 250$.

Activités

p.404-405

1 Découvrir la linéarité de l'espérance

• **Durée estimée** : 25 min

• **Objectif** : Découvrir la linéarité de l'espérance sur un exemple simple.

1. X peut prendre les valeurs 5 ou 10 et :

x_i	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y peut prendre les valeurs 5, 2 ou 0 et :

y_i	5	2	0
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

2. $E(X) = 7,5$ et $E(Y) = 2$.

3. a) On gagne $5 + 5 = 10$ euros.

b) Si on fait 1, on gagne 10 euros.

Si on fait 2, on gagne 15 euros.

Si on fait 3, on gagne 7 euros.

Si on fait 4, on gagne 10 euros.

Si on fait 5, on gagne 5 euros.

Si on fait 6, on gagne 10 euros.

Z peut prendre les valeurs 15, 10, 7 ou 5 et :

z_i	5	7	10	15
$p(Z = z_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

c) $E(Z) = 5 \times \frac{1}{6} + \dots + 15 \times \frac{1}{6} = 9,5$

On remarque que $E(Z) = E(X) + E(Y)$.

4. a) D peut prendre les valeurs 10, 4 ou 0 et :

d_i	10	4	0
$p(D = d_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

On en déduit que $E(D) = 4$.

b) On remarque que $E(D) = 2 \times E(Y)$.

2 Décomposer une variable aléatoire suivant une loi binomiale

• **Durée estimée** : 20 min

• **Objectif** : Au travers d'un exercice de programmation, utiliser la somme de plusieurs variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli.

1.

```

def bernoulli(p) :
    a = random.random()
    if a <= p :
        r = 1
    else :
        r = 0
    return r
  
```

2. ...

3. Les résultats de `bernoulli(p)` à l'intérieur de la boucle sont indépendants et on somme pour obtenir s . Cela revient donc à additionner n (nombres de boucles) valeurs aléatoires identiques suivant une loi $\mathcal{B}(p)$ et indépendantes. X est la variable aléatoire donnant le résultat de s à la fin de l'exécution suit donc une loi binomiale de paramètres n et p .

3 Découvrir l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

• **Durée estimée** : 25 min

• **Objectif** : Introduire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur un exemple.

A. S'éloigner de l'espérance

1. $E(X) = 0 \times 0,682 + \dots + 25000 \times 10^{-7} = 1,423\ 03$ (on peut aussi utiliser la calculatrice).

2. a) $p(|X - E(X)| \geq 15) = p(|X - 1,423| \geq 15)$
 $= p(X \in]-\infty; -13,577] \cup [16,423; +\infty[)$
 $= p(X \geq 16,423)$ puisque $X \geq 0$ donc
 $p(|X - E(X)| \geq 15) = p(X = 20) + p(X = 100)$
 $+ p(X = 1000) + p(X = 25000) = 0,0127$.

b) De même $p(|X - E(X)| \geq 100)$
 $= p(X = 1000) + p(X = 25\ 000) = 2,7 \times 10^{-6}$.

c) De même $p(|X - E(X)| \geq 10000) = p(X = 25\ 000)$
 $= 7 \times 10^{-7}$.

3. $p(|X - E(X)| \geq \delta)$ se rapproche de 0 quand δ devient grand.

B. Comparer $p(|X - E(X)| \geq \delta)$ et $\frac{V(X)}{\delta^2}$

1. • Pour $\delta = 15$, $\frac{V(X)}{\delta^2} = 2$.

• Pour $\delta = 100$, $\frac{V(X)}{\delta^2} = 0,045$.

• Pour $\delta = 10\ 000$, $\frac{V(X)}{\delta^2} = 4,5 \times 10^{-6}$.

2. Dans ces trois cas, $p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.

3. On peut conjecturer que $p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$ pour tout δ .

4 Découvrir la loi des grands nombres

• **Durée estimée :** 25 min

• **Objectif :** Introduire l'inégalité de concentration sur un exemple.

1. X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$ donc $E(X_i) = p = 0,5$ et $V(X_i) = p \times (1 - p) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$.

2. Pour δ non nul, d'après l'inégalité de concentration, on a $p(|M_n - 0,5| \geq \delta) \leq \frac{0,25}{n \times \delta^2}$.

3. a) Comme $p(|M_n - 0,5| \geq 0,1) \leq \frac{0,25}{n \times 0,1^2} = \frac{25}{n}$,

il suffit de trouver n tel que $\frac{25}{n} \leq 0,01 \Leftrightarrow n \geq 2\ 500$.

b) Il suffit de trouver n tel que

$$\frac{25}{n} \leq 0,001 \Leftrightarrow n \geq 25\ 000.$$

c) $0 \leq p(|M_n - 0,5| \geq 0,1) \leq \frac{25}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{25}{n} = 0$

donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|M_n - 0,5| \geq 0,1) = 0.$$

d) Il est peu probable que la valeur de M_n ne soit pas dans $]0,4; 0,6[$ après un grand nombre de lancers.

4. $0 \leq p(|M_n - 0,5|) \leq \frac{0,25}{n\delta^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0,25}{n\delta^2} = 0$

donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|M_n - 0,5|) = 0.$$

5. a) C'est le nombre de PILE obtenu sur le total de lancers c'est-à-dire la proportion de PILE obtenue.

b) C'est la loi qui dit que quand on réalise un grand nombre de fois (de manière indépendante) une même expérience, la fréquence d'un événement (ici « obtenir PILE ») dans l'échantillon s'approche de la probabilité de cet événement quand on réalise l'expérience (ici 0,5).

À vous de jouer

p. 407

1. a. $E(X + Y) = 3 + 5 = 8$

b. $E(2,5X) = 2,5 \times 3 = 7,5$

c. $V(2X) = 2^2 \times 0,5 = 2$

2. $E(X + Y) = 15 + 15 = 30$ et $V(X + Y) = 1,2 + 0,3 = 1,5$ car X et Y indépendantes.

3. X est la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis par Jean sur ses 10 lancers et Y est la variable aléatoire donnant le nombre de lancers réussis par Sophie sur ses 20 lancers.

4. On pose X la variable aléatoire donnant le gain au premier jeu, Y celle au deuxième et Z celle au troisième. Alors $X + Y + Z$ correspond au gain total de Numa.

5. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et suivent toutes une même loi $\mathcal{B}(0,5)$ car la probabilité d'obtenir PILE est 0,5.

$X_1 + X_2 + \dots + X_{40}$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,5$. Elle correspond au nombre de PILE obtenu sur les 40 lancers.

6. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,34$ donc $E(X) = n \times p = 2,72$.

7. $E(X_1) = 12 \times 0,48 = 5,76$

Donc $E(S) = 3E(X_1) = 17,28$.

8. 1.

x_i	1	4	-2
$p(X = x_i)$	0,25	0,25	0,5

2. $E(X) = 0,25$ donc $E(Z) = 15E(X) = 3,75$.

9. 1. a) $p(|P - 32| < 6) = p(|P - 32| \geq 6)$
 $= 1 - p(|P - 32| \geq 6)$

or $p(|P - 32| \geq 6) \leq \frac{9}{6^2} = 0,25$ donc :

$-p(|P - 32| \geq 6) \geq -0,25$ puis $1 - p(|P - 32| \geq 6) \geq 0,75$
 c'est-à-dire $p(|P - 32| < 6) \geq 0,75$.

b) La probabilité que ce médecin voie entre 26 et 38 patient(e)s (exclus) c'est-à-dire entre 27 et 37 patient(e)s est supérieure ou égale à 0,75.

2. $21 = 32 - 9$ et $41 = 32 + 9$ donc on cherche

$p(|P - 32| \geq 9) \text{ or } p(|P - 32| \geq 9) \leq \frac{9}{9^2} = \frac{1}{9}$.

10. $1 = 2 - 1$ et $3 = 2 + 1$

On veut donc minorer $p(|I - 2| < 1)$.

$p(|I - 2| < 1) \geq 1 - \frac{0,25}{1^2} = 0,25$.

11. On appelle X_i pour i entier entre 1 et 100 le gain du i -ème joueur. On a alors $\{X_1; X_2; \dots; X_{100}\}$ qui est un échantillon associé à une loi d'espérance 10 et de variance 2 et $M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100}$ sa moyenne.

On cherche $p(|M - 10| < 3) \geq 1 - \frac{2}{100 \times 3^2}$ avec

$1 - \frac{2}{100 \times 3^2} \approx 0,998$.

12. Pour tout i entier entre 1 et 30,

$E(X_i) = 20 \times 0,6 = 12$

et $V(X_i) = 20 \times 0,6 \times 0,4 = 4,8$. On a donc

$p(|M - 12| \geq 4) \leq \frac{4,8}{30 \times 4^2} = 0,01$.

13. Quand sa taille augmente, la moyenne d'un échantillon associé à une loi se rapproche de l'espérance associée à cette loi donc, ici, de :

$0,4 \times 1 + 0,5 \times 10 + 0,1 \times 30 = 8,4$.

14. On peut estimer que $\mu = 50$.

15. 1. Comme il y a 20 000 billes, ce qui est grand, on peut considérer que le prélèvement de 3 billes ne changera pas les probabilités et donc que le prélèvement peut être considéré comme un tirage avec remise de 3 billes.

2. a) La loi de X_1 est donnée par :

$p(X_1 = 1) = 0,7$, $p(X_1 = 2) = 0,25$ et $p(X_1 = 9) = 0,05$.

Les lois de X_2 et X_3 sont considérées identiques.

b) $E(X_1) = 1,65$ donc $E(S) = 3E(X_1) = 4,95$.

$V(X_1) = 3,0275$ donc $V(S) = 3V(X_1) = 9,0825$.

16. 1. On peut avancer l'argument que la production est grande.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de défauts d'une vis prise au hasard. La loi de X est donnée par :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	0,97	0,02	0,01

On a $E(X) = 0,04$ en posant X_i le nombre de défauts de la i -ème vis de l'échantillon, les X_i sont considérés comme indépendants et de même loi (celle de X).

$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{200}$ donc $E(S) = 200E(X) = 8$.

17. 1. $E(R) = 2,5$ et $V(R) = 1,25$.

2. Les lancers étant identiques et indépendants, les variables aléatoires $\{X_1; \dots; X_n\}$ donnant les résultats de n lancers successifs forment un échantillon de variables aléatoires d'espérance 2,5 et de variance 1,25.

Appelons M la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

On cherche à trouver n tel que

$p(|M - 2,5| \geq 0,5) \leq 0,01$

or $p(|M - 2,5| \geq 0,5) \leq \frac{1,25}{n \times 0,5^2} = \frac{5}{n}$ donc une condi-

tion suffisante est

$\frac{5}{n} \leq 0,01 \Leftrightarrow \frac{5}{0,01} \leq n$ c'est-à-dire $n \geq 500$.

18. Les parties étant indépendantes, les variables aléatoires $(X_1; \dots; X_n)$ donnant les nombres de lignes réalisées lors de n parties successives forment un échantillon de variables aléatoires d'espérance 125 et de variance 10

Appelons M la variable aléatoire moyenne de cet échantillon.

On cherche à trouver n tel que

$$p(|M - 125| \geq 5) \leq 0,05$$

or $p(|M - 125| \geq 5) \leq \frac{100}{n \times 5^2} = \frac{4}{n}$ donc une condition suffisante est

$$\frac{4}{n} \leq 0,05 \Leftrightarrow \frac{4}{0,05} \leq n \text{ c'est-à-dire } n \geq 80.$$

Exercices

apprendre à démontrer

p.416

Pour s'entraîner

Soit $p \in]0; 1[$.

On va utiliser le raisonnement par récurrence.

Pour tout entier $n \geq 1$ on considère la propriété $P(n)$: si X suit $\mathcal{B}(n; p)$ alors on a $V(X) = np(1 - p)$.

Initialisation : pour $n = 1$, X suit une loi de Bernoulli de paramètre p (car il n'y a qu'une seule répétition).

Alors $V(X) = p(1 - p) = 1 \times p(1 - p)$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

Hérédité : soit un entier $n \geq 1$. Supposons que la propriété $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $V(X) = np(1 - p)$ si X suit $\mathcal{B}(n; p)$.

Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire $V(X) = (n + 1)p(1 - p)$ si X suit $\mathcal{B}(n + 1; p)$.

Soit Y une variable aléatoire qui suit $\mathcal{B}(n + 1; p)$.

Y peut-être décomposée sous en une somme de variables aléatoires indépendantes $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n + X_{n+1}$ où chacun des X_i suit la loi $\mathcal{B}(p)$.

Alors $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit $\mathcal{B}(n; p)$ donc

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = np(1 - p).$$

De plus $V(Y) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n + X_{n+1}) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) + V(X_{n+1})$ car d'après le prérequis $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.

Donc $V(Y) = np(1 - p) + p(1 - p)$ car X_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre p .

Donc $E(Y) = (n + 1)p(1 - p)$ en factorisant.

Conclusion : on en conclut que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$. Par récurrence, si X suit $\mathcal{B}(n; p)$ alors $V(X) = np(1 - p)$.

Exercices

calculs et automatismes

p. 417

19. Espérance d'une somme (1)

Non.

20. Espérance d'une somme (2)

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\Leftrightarrow E(Y) = E(X + Y) - E(X)$$

$$= 0,45 - 3 = -2,55$$

21. Espérance d'une somme (3)

$$b) \{0,2 + 10 \times 0,1\}$$

22. Linéarité d'une espérance

$$2E(X) + 3E(Y)$$

23. Variance d'une somme (1)

X et Y doivent être indépendantes.

24. Variance d'une somme (2)

d) Il n'est pas précisé que les variables aléatoires sont indépendantes.

25. Variance d'une somme (3)

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \Leftrightarrow V(Y) = V(X + Y) - V(X)$$

$$= 15,26 - 13,23 = 3,03$$

26. Écart-type d'une somme

$$c) \{V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 2 \text{ donc}$$

$$\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X + Y)} = \sqrt{2}\}$$

27. Somme de variables aléatoires (1)

Faux son espérance est $10 \times 0,6 = 6$.

28. Somme de variables aléatoires (2)

$$\text{Faux } \sqrt{5 \times 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

29. Échantillon

$$a) V(M_n) = \frac{1,25}{n} \text{ donc sa limite est } 0.$$

30. Loi des grands nombres

a)

31. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et écart-type

c) $V = 5^2 = 25$ et $\delta = 10$ donc $\frac{V}{\delta^2} = 0,25$.

32. Loi des grands nombres

-2,3 environ.

33. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$p(|X - 20| < 6) \geq 1 - \frac{9}{6^2} = 0,75$

34. Inégalité de concentration

Cette probabilité est majorée par

$\frac{V}{n\delta^2} = \frac{4}{100 \times 5^2} = 0,0016$.

Exercices d'application

p. 418-423

Calculer l'espérance

et la variance de $X + Y$ ou aY

35. a) $E(X + Y) = 7$

b) $E(3X) = 6$

c) $E(-2Y) = -10$

36. 1. a) $E(X + Y) = 1560$

b) $E(4X) = 6000$

c) $E(3Y) = 180$

2. $E(4X + 3Y) = 6180$

37. a) $E(X + Y) = -1$

b) $E(2X + 5Y) = -2$

c) $E(2X + 10) = 2E(X) + 10 = 8$

d) $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ car X et Y indépendantes donc $V(X + Y) = 2,5$.

e) $V(3X) = 3^2 V(X) = 18$

f) $V(nY) = n^2 V(Y) = 0,5n^2$.

38. 1. On calcule d'abord

$E(X) = 0,5 \times (-2) + \dots + 0,1 \times 4 = 0$.

De même $E(Y) = 0,5$.

Donc $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 0,5$.

2. On calcule d'abord

$V(X) = 0,5 \times (-2 - 0)^2 + \dots + 0,1 \times (4 - 0)^2 = 5,4$.

De même $V(Y) = 108,75$.

Donc $V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 114,15$ car X et Y indépendantes.

3. On en déduit $\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X + Y)} \approx 10,68$.

39. D'après l'énoncé $E(X) = 0,6$,

$V(X) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$, $E(Y) = 0,33$ et

$V(Y) = 0,33 \times 0,67 = 0,2211$.

a) $E(X + Y) = 0,93$

b) $V(X + Y) = 0,4611$ car X et Y indépendantes.

c) $E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0,27$

40. D'après l'énoncé, $E(X) = np = 5$,

$V(X) = np(1 - p) = 2,5$.

De même $E(Y) = 4,2$ et $V(Y) = 2,436$.

$E(X + Y) = 9,2$

$V(X + Y) = 4,936$ car X et Y indépendantes.

$\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X + Y)} \approx 2,22$

41. 1. a) La seule valeur que peut prendre Y est 6 et la loi de Y est donnée par $p(Y = 6) = 1$.

b) $E(Y) = 6$ et $V(Y) = 1 \times (6 - 6)^2 = 0$.

2. $E(X + Y) = 9$

$V(X + Y) = V(X) + V(Y) = V(X) = 0,5$ car X et Y indépendantes et $V(Y) = 0$.

42. 1. Y peut prendre les valeurs -15, 0, 60 ou 150.

2. $E(Y) = 3E(X) = -11,73$.

3. $V(Y) = 3^2 V(X) = 9 \times 2,83^2 = 72,0801$

Donc $\sigma(Y) = 8,49$.

4. Z peut prendre les valeurs -3, 2, 22 ou 52.

$E(Z) = E(X) + 2 = -1,91$

$V(Z) = V(X) = 2,83^2$

Donc $\sigma(Z) = 2,83$.

43. 1. $E(X) = 0,25 \times 10 + 0,25 \times 1 + 0,25 \times (-2) + 0,25 \times (-4) = 1,25$.

En jouant un grand nombre de partie on peut espérer gagner en moyenne 1,25 euros.

$$V(X) = 0,25 \times (10 - 1,25)^2 + \dots + 0,25 \times (-4 - 1,25)^2 = 28,6875$$

2. a) $Z = 2X$

b) $E(Z) = 2E(X) = 2,5$

$$V(Z) = 2^2 V(X) = 114,75$$

3. a) $Y = X + 1$

b) $E(Y) = E(X) + 1 = 2,25$ et $V(Y) = V(X) = 28,6875$ donc $\sigma(Y) \approx 5,36$.

Modéliser avec une somme de variables aléatoires

44. X est la variable aléatoire donnant le résultat du dé tétraédrique et Y est la variable aléatoire donnant le résultat du dé cubique.

45. On pose X la variable aléatoire donnant le numéro de la boule tirée au hasard dans l'urne et Y la variable aléatoire donnant le nombre obtenu après le lancer de la pièce.

46. $Z = X_1 + X_2 + X_3$ où X_i donne le gain algébrique pour la carte obtenue en i -ème position.

La loi des X_i est donnée dans le tableau suivant :

x_i	7	4	-1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{9}{13}$

Alors $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{10}{13}$.

Donc $E(Z) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{30}{13}$.

47. 1. $X + Y$ correspond au temps total de trajet en minutes de Myriam dans les bus.

2. $E(X) = 7,5$ et $E(Y) = 6$.

3. $E(X + Y) = 13,5$. En moyenne, Myriam passera 13 min 30 s dans le bus pour aller au lycée.

48. 1. X suit une loi $\mathcal{B}(30; 0,46)$ car elle répète de manière identique et indépendante 30 fois une même épreuve de Bernoulli dont le succès est de marquer un jet de 7 mètres (de probabilité 0,46). De même Y suit $\mathcal{B}(50; 0,78)$.

2. $X + Y$ correspond au nombre de jets de 7 mètres marqués au total sur la journée.

3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 30 \times 0,46 + 50 \times 0,78 = 52,8$

Sur un grand nombre de journées d'entraînement, Elia peut espérer en moyenne marquer 52,8 jets de 7 mètres sur les 80 jets.

Sommer des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi $\mathcal{B}(p)$

49. a) $n = 15$ et $p = 0,6$.

b) $n = 25$ et $p = 0,12$.

c) $n = 150$ et $p = 0,999$.

d) $n = 1\,000$ et $p = 0,2$.

50. a) Une loi $\mathcal{B}(0,23)$.

b) Une loi $\mathcal{B}(0,7)$.

51. $E(X) = np$ avec $p = \frac{3}{4}$ et $E(X) = 60$.

On a donc $n = \frac{60}{\frac{3}{4}} = 80$.

52. 1. D'après l'énoncé, chacun des X_i suit une loi $\mathcal{B}(0,1)$. De plus les X_i sont indépendants car les 10 lancers sont indépendants.

Donc la somme X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$.

2. $E(X) = np = 10 \times 0,1 = 1$ et

$$V(X) = np(1 - p) = 10 \times 0,1 \times 0,9 = 0,9.$$

53. 1. En posant Z_i la variable aléatoire donnant 1 si le résultat du dé lu en i -ème position est 4 ou 0 sinon, on a $Z = Z_1 + \dots + Z_{30}$.

Chacun des Z_i suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

2. $E(Z_1) = E(Z_2) = \dots = E(Z_{30}) = \frac{1}{6}$.

Donc $E(Z) = 30E(Z_1) = 5$. Sur un très grand nombre de lancers de 30 dés, on peut espérer en moyenne obtenir 5 dés qui tombent sur 4.

On pouvait également dire que Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \frac{1}{6}$ pour en déduire que $E(Z) = np = 5$.

54. 1. En posant Y_i la variable aléatoire donnant 1 si la pièce du test numéro i n'a pas résisté et 0 sinon.

Les tests sont indépendants donc les Y_i le sont aussi. On a alors $Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{30}$ et la loi des Y_i est la loi $\mathcal{B}(0, 05)$.

2. Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,05$. Ainsi $E(Y) = np = 1,5$.

55. 1. La loi $\mathcal{B}(0, 452)$.

$$2. E\left(\frac{X}{1000}\right) = \frac{1}{1000}E(X) = \frac{1}{1000} \times 1000 \times 0,452 = 0,452$$

$$V\left(\frac{X}{1000}\right) = \frac{1}{1000^2}V(X) = \frac{1}{10^6} \times 1000 \times 0,452 \times (1 - 0,452) = 2,48 \times 10^{-4}$$

Sommer des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi

56. 1. En posant X_i la variable aléatoire donnant le résultat du dé lu en i -ème position, on a $X = X_1 + \dots + X_{100}$.

La loi des X_i est donnée dans le tableau suivant :

y_i	1	2	3	4	5	6
$p(Y = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. On a $E(X) = E(X_1) + \dots + E(X_{100}) = 100E(X_1)$.

$$\text{Or } E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + \dots + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5.$$

Donc $E(X) = 350$.

Cela signifie que sur un très grand nombre de lancers de 100 dés, on obtient en moyenne une somme proche de 350.

57. $E(S) = 20E(X_1)$ les variables aléatoires X_i suivants toutes la même loi.

Or $E(X_1) = 12 \times 0,3 = 3,6$ donc $E(S) = 72$.

$V(S) = 20V(X_1)$ les variables aléatoires X_i suivants toutes la même loi et étant indépendantes.

Or $V(X_1) = 12 \times 0,3 \times 0,7 = 2,52$.

Donc $V(S) = 20 \times 2,52 = 50,4$.

58. Soit X_i la variable aléatoire donnant le nombre de baguettes mal cuites dans la boulangerie numéro i (pour i entre 1 et 10).

Les X_i sont indépendants et suivent toutes la loi $\mathcal{B}(50; 0,03)$: $(X_1; X_2; \dots; X_{10})$ forment un échantillon de variables aléatoires.

On a $E(X_i) = np = 1,5$ et $V(X_i) = np(1 - p) = 1,455$.

Donc $E(Z) = 10E(X_i) = 15$ et

$V(Z) = 10V(X_i) = 14,55$ donc $\sigma(Z) \approx 3,81$.

59. 1. Soit X_i la variable aléatoire donnant le nombre de tartines mangées le jour de la semaine numéro i (pour i entre 1 et 7).

Les X_i sont indépendants et suivent toutes une même loi dont la loi est donnée dans le tableau ci-dessous.

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,25	0,62	0,13

La somme $X_1 + \dots + X_7 = S$ donne le nombre de tartines mangées par Carmen au cours d'une semaine.

2. $(X_1; X_2; \dots; X_7)$ forment un échantillon de variables aléatoires.

On a $E(X_i) = 1,88$ et $V(X_i) = 0,3656$.

Donc $E(S) = 7E(X_i) = 13,16$ et $V(S) = 7V(X_i) = 2,5592$ donc $\sigma(S) \approx 1,60$.

$$\mathbf{60.} E(S_{50}) = 50E(X) = 50(6 \times 0,579) = 173,7$$

$$V(S_{50}) = 50V(X) = 50(6 \times 0,579 \times (1 - 0,579)) \approx 73,13$$

$$E(M_{50}) = E(X) = 6 \times 0,579 \approx 3,47$$

$$V(M_{50}) = \frac{V(X)}{50} = \frac{6 \times 0,579 \times (1 - 0,579)}{50} = 0,03$$

$$\mathbf{61.} E(S_n) = nE(X) = 5,6n$$

$$V(S_n) = nV(X) = n \times \frac{1}{16} = \frac{n}{16}$$

$$E(M_n) = E(X) = 5,6$$

$$V(M_n) = \frac{V(X)}{n} = \frac{1}{16n}$$

Manipulations de variables aléatoires et d'inégalités

62. 1. $I =]7; 17[$

2. $J =]-\infty; -2[$ et $K = [8; +\infty[$.

$$\mathbf{63. a)} |Y - 5| < 5$$

$$\mathbf{b)} |Y - 48| \leq 3$$

$$\mathbf{c)} |Y - 13| > 1$$

$$\mathbf{d)} |Y - 9| \geq 7$$

64. 0,8 (événement contraire)

65. 0,65 (événement contraire)

66. 0,28 (événement contraire)

67. $p(|B - 8| \geq 3) = \overline{p(|B - 8| < 3)} = 1 - p(|B - 8| < 3)$
donc
 $p(|B - 8| \geq 3) \leq 0,36 \Leftrightarrow 1 - p(|B - 8| < 3) \leq 0,36$
 $\Leftrightarrow p(|B - 8| < 3) \geq 0,64.$

68. $p(|C - 4| \geq 3) < 0,02$

69. $p(|B + 12| < 2) \geq 0,89$

70. 1. $p(|Z - 10| \leq 3) = p(Z \in [7 ; 13])$
 $= 0,25 + 0,3 = 0,55$

2. 0,45

71. $p(|A - 10| < 3) = p(A \in]7 ; 13[) = 0,4$ et
 $p(|A - 8| < 1) = p(A \in]7 ; 9]) = 0,15.$

On a donc

$p(|A - 11| < 2) = p(A \in]9 ; 13]) = 0,4 - 0,15 - 0 = 0,25.$

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

72. 1. a) $p(|F - 165| \geq 8) \leq \frac{25}{8^2}$ avec $\frac{25}{8^2} \approx 0,39.$

b) $p(|F - 165| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2}$ avec $\frac{25}{10^2} = 0,25.$

2. $p(|H - 180| \geq 10) \leq \frac{36}{10^2}$ avec $\frac{36}{10^2} = 0,36$: la probabilité qu'un homme pris au hasard dans cette population mesure 1,70 m ou moins, ou 1,90 m ou plus, est inférieure à 0,36.

73. 1. a) $p(|C - 150| \geq 60) \leq \frac{900}{60^2}$ avec $\frac{900}{60^2} = 0,25.$

b) La probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population consomme 90 litres ou moins, ou 210 litres ou plus est inférieure à 0,25.

2. $p(|C - 150| < 90) \geq 1 - \frac{900}{90^2}$ avec $1 - \frac{900}{90^2} \approx 0,89$
donc $p(|C - 150| < 90) > 0,85.$

74. 1. $p(|M - 50| < 20) \geq 1 - \frac{10^2}{20^2}$ avec $1 - \frac{10^2}{20^2} = 0,75$
ou plus directement $p(|M - E(M)| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2^2}$

avec $1 - \frac{1^2}{2^2} = 0,75.$

2. a) $p(|M - 50| \geq 40) \leq \frac{10^2}{40^2}$ avec $\frac{10^2}{40^2} = 0,0625.$

Remarque : On peut aussi remarquer que $40 = 4\sigma(M).$

b) $p(M \geq 90) = p(|M - 50| \geq 40) - p(M \leq 10) \leq 0,0525$

75. Soit F le nombre de feuilles utilisées par Lycia.
On cherche $p(F \in [1\,000 ; 1\,500]) = p(F \in]999 ; 1501])$
 $= p(|F - 1\,250| < 251).$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$p(|F - 1\,250| < 251) \geq 1 - \frac{80^2}{251^2}$ avec $1 - \frac{80^2}{251^2} \approx 0,898$

donc elle ne peut pas en être sûre au seuil de 90 % (mais c'en est assez proche néanmoins).

76.1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 45$ et $p = 0,2.$

2. a) « ... si $|X - 9| \geq 3$ ».

b) On sait que $E(X) = 45 \times 0,2 = 9$ et
 $V(X) = 42 \times 0,2 \times 0,8 = 7,2.$

On a donc $p(|X - 9| \geq 3) \leq \frac{7,2}{3^2}$ avec $\frac{7,2}{3^2} = 0,8$

c'est-à-dire qu'il y a au plus 80 % de chance que la quantité de nourriture prévue ne soit pas adaptée ce qui ne donne pas une information très intéressante.

c) $|X - 9| \geq 3$ et $7 \leq X \leq 11$ sont les mêmes événements.

La calculatrice donne $p(7 \leq X \leq 11) \approx 0,35$ donc la majoration trouvée à la question 2. b) n'est pas très bonne.

77. 1. M suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,6.$

2. a) On sait que $E(M) = 20 \times 0,6 = 12$ et
 $V(M) = 20 \times 0,6 \times 0,4 = 4,8.$

On cherche $p(|M - 12| < 3) \geq 1 - \frac{4,8}{3^2}$ avec

$$1 - \frac{4,8}{3^2} \approx 0,47.$$

b) $p(9 < M < 15) \approx 0,75$ donc la minoration obtenue à la question **2. a)** n'est pas très bonne.

78. 1. $p(|D - 1000| \geq 100) \leq \frac{100^2}{100^2} = 1$ ce que l'on sait déjà puisqu'une probabilité est comprise entre 0 et 1.

2. $p(|D - 1000| < 250) \geq 1 - \frac{100^2}{250^2}$ avec $1 - \frac{100^2}{250^2} = 0,84$ donc Ben a au moins 84 % de chance d'avoir raison ce qui ne semble pas très risqué.

Somme des variables aléatoires et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

79. 1. $E(G) = 0,55$ et $V(G) = 0,9975$.

2. a) $p(|G - 0,55| \geq 2,45) \leq \frac{0,9975}{2,45^2}$ avec

$$\frac{0,9975}{2,45^2} \approx 0,17.$$

b) L'événement $|G - 0,55| \geq 2,45$ est l'événement $G \in]-\infty; -1,9] \cup [3; +\infty[= [3; +\infty[$ puisque le gain est positif.

La probabilité de gagner plus de 3 jetons est donc inférieure à 0,17 environ.

80. 1. $E(T) = 300$ et $V(T) = 8^2 + 8^2 = 128$.

2. a) On doit avoir $|T - 300| < 30$.

b) $p(|T - 300| < 30) \geq 1 - \frac{128}{30^2}$ avec $1 - \frac{128}{30^2} \approx 0,86$

donc cette probabilité est relativement élevée.

81. 1. $E(A) = 5$ et $V(A) = 0,15^2 + 0,1^2 = 0,0325$.

2. $p(|A - 5| < 0,6) \geq 1 - \frac{0,0325}{0,6^2}$ avec $1 - \frac{0,0325}{0,6^2} \approx 0,91$

donc il est très probable que la montre soit équilibrée.

Utiliser l'inégalité de concentration

82. 1. Soit $X_1, X_2, \dots, X_{35}$ les variables aléatoires donnant les résultats des 35 mesures de même loi que X et $M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{35}}{35}$.

$$p(|M - 9,5| \geq 0,5) \leq \frac{0,04}{35 \times 0,5^2} \text{ avec } \frac{0,04}{35 \times 0,5^2} \approx 0,005.$$

2. a) $p(|M - 9,5| < 0,2) \geq 1 - \frac{0,04}{35 \times 0,2^2}$ avec

$$1 - \frac{0,04}{35 \times 0,2^2} \approx 0,97.$$

b) On est sûr au seuil de 97 % que la moyenne des mesures réalisées sera comprise strictement entre 9,3 et 9,7 cm.

83. 1. $E(B) = 0,91$ et $V(B) = 0,9019$.

2. a) $p(|M - 0,91| \geq 1,09) \leq \frac{0,9019}{50 \times 1,09^2}$ avec

$$\frac{0,9019}{50 \times 1,09^2} \approx 0,015.$$

b) Cela veut dire que la probabilité que le nombre de buts marqués en moyenne par match sur cette saison soit inférieur à -0,18 ou supérieur à 2 c'est-à-dire soit supérieur à 2 est inférieure ou égale à 0,015 environ.

84. 1. $E(X_j) = 2\,500 \times 0,6 = 1\,500$ et

$$V(X_j) = 2\,500 \times 0,6 \times 0,4 = 600.$$

2. a) $p(M \notin]1\,400; 1\,600]) = p(|M - 1500| < 100)$

$$= p(|M - 1500| \geq 100) \leq \frac{600}{200 \times 100^2} \text{ avec}$$

$$\frac{600}{200 \times 100^2} = 0,0003.$$

b) La probabilité qu'il n'y ait pas entre 1 400 et 1 600 (exclus) logements ayant du courrier en moyenne sur les 200 tournées est inférieure ou égale à 0,0003.

85. 1. $E(X) = 1,088$ et $V(X) = 1,304\,256$.

2. a) On appelle X_i , pour i entier entre 1 et 1 700 le nombre de points marqués au i -ème tir et $M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{1700}}{1700}$ la moyenne des points par tir.

Les événements $M \in [0; 1] \cup [1,176; 3]$ et

$M \in]-\infty; 1] \cup [1,176; +\infty[$ sont identiques puisqu'on marque au minimum 0 point et au maximum 3 points.

On cherche donc

$$p(|M - 1,088| \geq 0,088) \leq \frac{1,304\,256}{1\,700 \times 0,088^2} \text{ avec}$$

$$\frac{1,304\,256}{1\,700 \times 0,088^2} \approx 0,1.$$

b) Il y a donc moins de 10 % de chance qu'il marque 1 700 points ou moins, ou 2 000 points ou plus sur ces 1 700 tirs ($1\,700 \times 1,176 = 1\,999,2$).

86. 1. $E(G) = -1,5$ et $V(G) = 2,35$.

2. Soit $G_1, G_2, \dots, G_{1000}$ les gains algébriques de ces

1 000 personnes et $M = \frac{G_1 + G_2 + \dots + G_{1000}}{1000}$ leur gain moyen.

$$p(M \in]-1,7; -1,3[)$$

$$= p(|M + 1,5| < 0,2) \geq 1 - \frac{2,35}{1000 \times 0,2^2}$$

$$\text{avec } 1 - \frac{2,35}{1000 \times 0,2^2} = 0,94125.$$

3. Le gain de l'organisateur correspond à l'opposé de la perte des joueurs donc l'organisateur a raison si $1\,000M \in]-1\,700; -1\,300[\Leftrightarrow M \in]-1,7; -1,3[$ dont on sait qu'il est réalisé avec une probabilité de $0,94125 > 0,9$ donc il a raison.

87. 1. $E(E) = 0,5$ et $V(E) = 0,25$.

2. C'est la proportion de filles dans les 2 180 000 naissances.

3. $p(M \in]0,49; 0,51[) = p(|M - 0,5| < 0,01)$

$$\geq 1 - \frac{0,25}{2\,180\,000 \times 0,01^2} \text{ avec}$$

$$1 - \frac{0,25}{2\,180\,000 \times 0,01^2} \approx 0,999.$$

4. Si la probabilité qu'un enfant soit une fille à la naissance était réellement de 0,5 alors, la probabilité que la proportion de filles soit entre 0,49 et 0,51 dans un échantillon de 2,18 millions d'enfants serait supérieure à environ 0,999 (c'est-à-dire extrêmement élevée). Comme ce n'est pas le cas dans cet échantillon des naissances en France entre 2016 et 2018, on peut penser que la probabilité qu'un enfant soit une fille à la naissance n'est pas 0,5.

$$\mathbf{88. 1. a)} M = \frac{B_1 + B_2 + \dots + B_{500}}{500}$$

b) $p(M \in]21,5; 22,5[)$

$$= p(|M - 22| < 0,5) \geq 1 - \frac{0,4^2}{500 \times 0,5^2}$$

$$\text{avec } 1 - \frac{0,4^2}{500 \times 0,5^2} = 0,99872.$$

2. L'avion ne contient pas d'autres bagages que ceux de ses passagers ou ne contient pas tous les bagages de ses passagers si la masse totale de bagage des passagers est inférieure ou égale à 10 500 kg ou supérieure ou égale à 11 500 kg c'est-à-dire si $M \in]-\infty; 21] \cup [23; +\infty[$.

$$\text{On a } p(|M - 22| \geq 1) \leq \frac{0,4^2}{500 \times 1^2} \text{ avec}$$

$$\frac{0,4^2}{500 \times 1^2} = 0,00032.$$

Utiliser la loi des grands nombres

89. La moyenne va se rapprocher de $E(G) = -1$.

90. $E(X_i) \approx 1,5$

91. $E(X_i) \approx 12,5$ d'après le graphique et la loi des grands nombres or $E(A) = 13$ et $E(B) = 8,75$ donc les X_i suivent la même loi que A.

92. Le nuage de points bleus car c'est celui pour lequel la moyenne de buts par matchs semble se rapprocher de l'espérance 0,64.

93. 1. Une liste donnant un échantillon de taille n associé à X .

2. Ces instructions renvoient la moyenne de deux échantillons de tailles 1 000 et 10 000 donc une valeur proche de $E(X)$ qui est donc proche de 2,1.

Exercices d'entraînement p. 424-427

Problèmes et variables aléatoires

94. 1. On répète 25 fois de manière identique et indépendante une même expérience de Bernoulli (le succès est une bonne réponse de probabilité 0,2).

X compte les succès donc X suit $\mathcal{B}(25; 0,2)$.

2. a) $Y = 25 - X$

b) $E(X) = np = 5$ donc $E(Y) = E(25 - X) = 25 - E(X) = 20$.

3. a) $Z = 2X - 0,5Y$

b) On calcule

$$E(Z) = 2E(X) - 0,5E(Y) = 2 \times 5 - 0,5 \times 20 = 0.$$

Sur un grand nombre de tels QCM, la moyenne de Tess est 0 point.

95. 1. $200 + 10 \times 12 = 320$ euros au maximum sur l'année.

2. a) X suit $\mathcal{B}(12; 0,5)$.

b) $Y = 200 + 10X$

c) $E(Y) = 200 + 10E(X) = 260$ car $E(X) = np = 6$.

3. Pour cela, il faudrait que son père ait fait 5 PILE ou plus l'an dernier donc que $X \geq 5$.

$p(X \geq 5) = 1 - p(X \leq 4) \approx 0,806$: c'est la probabilité que Lubin ait touché au moins 250 euros l'an dernier.

96. 1.

```
def jeu() :
    a = random.random()
    if a <= 0,028 :
        r = 55
    if a <= 0,17 and a > 0,028 :
        r = 5
    if a <= 0,37 and a > 0,17 :
        r = 1
    if a > 0,37 :
        r = -5
    return r
```

2. On peut écrire `[jeu() for i in range(5)]` par exemple.

3. a) On a $E(X) = -0,7$.

Donc $E(S) = 5E(X) = -3,5$.

b) En moyenne, lorsqu'il joue un grand nombre de fois 5 parties, Thomas perd 3,50 euros.

c) $V(X) = 103,71$

On en déduit que $V(S) = 5V(X) = 518,55$ puis que $\sigma(S) \approx 22,8$.

97. 1. $E(M_n) = E(X) = 0,65$

$$V(M_n) = \frac{V(X)}{n} = \frac{3,7275}{n}$$

2. On résout $\frac{3,7275}{n} < 0,5$ $\frac{3,7275}{0,5} < n$ car n et

0,5 positifs. Il faut prendre $n \geq 8$ soit à partir de $n = 8$.

98. 1. On peut poser $Z = X_1 + X_2 + X_3$ où X_i est le gain lors du tirage i .

La loi de X_i est donnée par :

$x1_i$	0	2	3
$p(X_1 = x1_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{3}$

(on a $E(X_1) = \frac{29}{15}$).

La loi de X_2 est donnée par :

$x2_i$	-5	-2	0
$p(X_2 = x2_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$

(on a $E(X_2) = -\frac{31}{15}$).

La loi de X_3 est donnée par :

$x3_i$	0	10
$p(X_3 = x3_i)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

(on a $E(X_3) = 2$).

2. On a $E(Z) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = \frac{29}{15} - \frac{31}{15} + 2 = \frac{28}{15}$.

Sur un grand nombre de parties, on peut espérer gagner en moyenne environ 1,87 euros.

3. a) S_n représente le gain total sur n parties.

b) $E(S_n) = nE(Z) = \frac{28}{15}n$

c) On veut $E(S_n) > 100 \Leftrightarrow \frac{28}{15}n > 100 \Leftrightarrow n > \frac{375}{7}$.

Il faut jouer 54 fois pour espérer remporter plus de 100 euros.

99. 1.

z_i	$z_1 = ax_1$	$z_2 = ax_2$	...	$z_n = ax_n$
$p(Z = z_i)$	p_1	p_2	...	p_n

2. $E(Z) = p_1 \times z_1 + p_2 \times z_2 + \dots + p_n \times z_n$
 $= ax_1 p_1 + ax_2 p_2 + \dots + ax_n p_n$
 $= a(p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n)$
 $= aE(X)$

donc $E(ax) = aE(X)$.

3. $V(Z) = p_1 \times (z_1 - E(Z))^2 + p_2 \times (z_2 - E(Z))^2 + \dots$
 $+ p_n \times (z_n - E(Z))^2$
 $= p_1 \times (ax_1 - aE(X))^2 + p_2 \times (ax_2 - aE(X))^2 + \dots$
 $+ p_n \times (ax_n - aE(X))^2$ car $E(Z) = aE(X)$

$$\begin{aligned}
 &= a^2 \{x_1 - E(X)\}^2 p_1 + a^2 \{x_2 - E(X)\}^2 p_2 + \dots + a^2 \{x_n - E(X)\}^2 p_n \\
 &= a^2 \{p_1 \times \{x_1 - E(X)\}^2 + p_2 \times \{x_2 - E(X)\}^2 + \dots \\
 &+ p_n \times \{x_n - E(X)\}^2\} = a^2 V(X) \\
 &\text{donc } V(aX) = a^2 V(X).
 \end{aligned}$$

100.

```

import math
e=float(input("entrer l'espérance de X"))
s=float(input("entrer l'écart-type de X"))
n=int(input("entrer n la taille de l'échantillon"))
print("l'espérance de Mn vaut :", e)
s1=math.sqrt((s**2)/n)
print("l'écart-type de la moyenne de l'échantillon est :", s1)
    
```

101. On a $V(M_n) = \frac{21,25^2}{n} = \frac{451,5625}{n}$.

Donc $\sigma(M_n) = \sqrt{\frac{451,5625}{n}}$.

On veut donc $\sqrt{\frac{451,5625}{n}} \leq 1$

$\frac{21,25}{\sqrt{n}} \leq 1$ donc $21,25 \leq \sqrt{n}$ et $451,5625 \leq n$

Il faut donc choisir $n \geq 452$.

102. 1. a) Pour $m = 2$ et $t = 3$ on a $E(X) = 0,75$ et $E(Y) = -0,9$.

Donc $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = -0,15$.

De plus $V(X) = 0,6875$ et $V(Y) = 6,69$.

Les jeux sont consécutifs et indépendants donc X et Y sont indépendantes.

Ainsi $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et donc

$\sigma(X + Y) = \sqrt{V(X) + V(Y)} \approx 2,72$.

b) Non car $E(X + Y) < 0$.

2. a) Il faut que $E(X + Y) > 0$.

Or $E(X) = \frac{1+m}{4}$ et $E(Y) = -\frac{6}{5} + \frac{t}{10}$.

Il faut donc $\frac{1+m}{4} - \frac{6}{5} + \frac{t}{10} > 0$

$\Leftrightarrow 5 + 5m - 24 + 2t > 0 \Leftrightarrow 5m + 2t > 19$ pour que le jeu soit avantageux.

b) Par exemple $(2; 1); (2; 2); (3; 1); (2; 3)$.

103. 1. a) On répète 8 fois de manière identique et indépendante une même expérience de Bernoulli qui consiste à transmettre un bit (le succès est que le bit est mal transmis, de probabilité 0,002). X suit la loi $\mathcal{B}(8; 0,002)$.

b) $E(X) = np = 0,016$ et

$V(X) = np(1-p) = 0,015968$ et donc $\sigma(X) \approx 0,126$.

2. a) S correspond au nombre de bits mal transmis sur un échantillon d'un million d'octets.

b) 1 Mo = 1 million d'octets. Donc il s'agit de $E(S) = 10^6 \times E(X) = 16\,000$: 16 000 bits incorrects sur 1 Mo.

c) $E(M) = E(X) = 0,016$ et $V(M) = \frac{V(X)}{10^6}$

donc $\sigma(M) = \frac{\sigma(X)}{10^3} \approx 0,000126$.

Utiliser un échantillon dans le cadre d'un prélèvement

104. 1. Comme l'effectif de l'entreprise est relativement grand par rapport au prélèvement (1 500 par rapport à 10). On peut considérer que c'est un tirage avec remise.

2. $E(S) = 10 \times 1\,870 = 18\,700$

$V(S) = 10V(X) = 10 \times 223^2$ donc

$\sigma(S) = \sqrt{10 \times 223^2} \approx 705,2$.

105. 1. Chacun des X_i suit une loi $\mathcal{B}(0,66)$ et on les considère indépendants.

S suit donc une loi $\mathcal{B}(200; 0,66)$.

2. $E(S) = np = 132$ et $\sigma(S) = \sqrt{np(1-p)} \approx 6,7$.

3. On utilise la méthode du chapitre 12. Avec la calculatrice, on trouve $a = 119$ et $b = 145$. Un tel intervalle est donc $[119; 145]$.

106. 1. L'énoncé dit qu'il y a un très grand nombre de billets. Donc on peut considérer que les probabilités ne changent pas et que les tirages sont indépendants.

2.

x_i	-1	9	49	99
$p(X=x_i)$	0,969	0,02	0,01	0,001

On a $E(X) = -0,2$ et $V(X) = 36,36$ donc $\sigma(X) \approx 6,03$.

3. $E(S) = 3E(X) = -0,6$ est ce que peut espérer Manon en moyenne en tirant 3 tickets.

$$V(S) = 3V(X) \text{ donc } \sigma(S) = \sqrt{3V(X)} \approx 10,4.$$

Inégalités de Bienaymé-Tchebychev

107. 1. $p(|D - 30\,000| \geq 5\,000) \leq \frac{4\,000\,000}{5\,000^2} = 0,16$

2. a) $p(|D - 30\,000| \geq 5\,000)$
 $= p((D \leq 25\,000) \cup (D \geq 35\,000))$
 $= p(D \leq 25\,000) + p(D \geq 35\,000) \text{ or }$
 $p(D \geq 35\,000) = p(D \geq 30\,000 + 5\,000)$
 $= p(D \leq 30\,000 - 5\,000) = p(D \leq 25\,000) \text{ donc }$
 $p(|D - 30\,000| \geq 5\,000) = 2p(D \geq 35\,000) \text{ soit }$

$$\frac{p(|D - 30\,000| \geq 5\,000)}{2} = p(D \geq 35\,000).$$

b) D'après **1.** et **2. a)**, on a $p(D \geq 35\,000) \leq 0,08$ il y a donc moins de 8 % de chance qu'une ampoule dure 35 000 heures ou plus donc la réponse est : non.

108. 1. a) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 4 \times 10^{24}$ et $p = 0,5$.

b) $E(X) = 2 \times 10^{24}$, $V(X) = 10^{24}$ et $\sigma(X) = 10^{12}$.

2. a) Ce n'est pas dans ses capacités.

b) $p(|X - 2 \times 10^{24}| < 10^{13} + 1) \geq 1 - \frac{10^{24}}{(10^{13} + 1)^2}$

avec $1 - \frac{10^{24}}{(10^{13} + 1)^2} \approx 0,99$.

c) Il y a plus de 99 % de chance que le nombre d'atomes désintégré soit égal à 2×10^{24} à plus ou moins 10^{13} atomes près.

Inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de concentration « sans symétrie »

109. 1. a) Car l'événement $X \in]-\infty ; 6] \cup [12 ; +\infty[$ n'est pas de la forme $|X - 8| \geq \delta$ (ou son contraire).

b) $|X - 8| \geq 2 \Leftrightarrow X \in]-\infty ; 6] \cup [10 ; +\infty[$ donc
 $(|X - 8| \geq 2) = (X \in]-\infty ; 6] \cup [12 ; +\infty[) \cup (X \in [10 ; 12[)$
donc $p(|X - 8| \geq 2) = p(X \in]-\infty ; 6] \cup [12 ; +\infty[)$
 $+ p(X \in [10 ; 12[) \geq p(X \in]-\infty ; 6] \cup [12 ; +\infty[).$

c) $p(X \in]-\infty ; 6] \cup [12 ; +\infty[) \leq p(|X - 8| \geq 2) \leq \frac{1}{2^2} = 0,25$

2. a) Car l'événement $X \in]5 ; 13[$ n'est pas de la forme $|X - 8| < \delta$ (ou son contraire).

b) $|X - 8| < 3 \Leftrightarrow X \in]5 ; 11[$
donc $X \in]5 ; 13[= (|X - 8| < 3) \cup (X \in [11 ; 13[)$ donc
 $p(X \in]5 ; 13[) = p(|X - 8| < 3) + p(X \in [11 ; 13[)$
 $\geq p(|X - 8| < 3).$

c) $p(X \in]5 ; 13[) \geq p(|X - 8| < 3) \geq 1 - \frac{1^2}{3^2}$ avec
 $1 - \frac{1^2}{3^2} \approx 0,89.$

110. On cherche

$$p(A > 7) \geq p(|A - 11,2| < 4,2) \geq 1 - \frac{4}{4,2^2}$$

avec $1 - \frac{4}{4,2^2} \approx 0,77.$

111. 1. $S \geq 1\,000 \Leftrightarrow M \geq 100 \text{ or } |M - 95| \geq 5$
 $\Leftrightarrow M \geq 100 \text{ ou } M \leq 90.$

Ainsi $p(|M - 95| \geq 5) = p(M \geq 100) + p(M \leq 90)$
 $\geq p(M \geq 100) = p(S \geq 1\,000).$

2. $p(S \geq 1\,000) \leq p(|M - 95| \geq 5) \leq \frac{5^2}{10 \times 5^2} = 0,1$

112. 1. $E(X) = 11,4$ et $V(X) = 9,54.$

2. $p(M < 11) \leq p(|M - 11,4| \geq 0,4)$

$$\leq \frac{9,54}{2\,000 \times 0,4^2} = 0,03$$

Déterminer la taille d'un échantillon

113. On considère $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

et on cherche n tel que $p(|M_n - 250| < 5) \geq 0,95.$

Comme $p(|M_n - 250| < 5) \geq 1 - \frac{100}{n \times 5^2} = 1 - \frac{4}{n}$

une condition suffisante est $1 - \frac{4}{n} \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq 80.$

114. 1. $E(G) = -\frac{1}{37}$ et $V(G) = \frac{1368}{1369}$.

2. On considère $G_1, G_2, \dots, G_n$ les variables aléatoires donnant les gains des joueurs successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que G .

On pose alors $M_n = \frac{G_1 + G_2 + \dots + G_n}{n}$ et on cherche n

tel que $p\left(\left|M_n + \frac{1}{37}\right| < \frac{1}{37}\right) \geq 0,95$.

Comme

$$p\left(\left|M_n + \frac{1}{37}\right| < \frac{1}{37}\right) \geq 1 - \frac{\frac{1368}{1369}}{n \times \left(\frac{1}{37}\right)^2} = 1 - \frac{1368}{n}$$

une condition suffisante est

$$1 - \frac{1368}{n} \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq 27\,360.$$

115. On considère $T_1, T_2, \dots, T_n$ les variables aléatoires donnant les temps de trajets successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que T .

On pose alors $M_n = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_n}{n}$ et on cherche n

tel que $p(|M_n - 6| < 0,25) \geq 0,98$.

Comme

$$p(|M_n - 6| < 0,25) \geq 1 - \frac{0,25^2}{n \times 0,25^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

une condition suffisante est $1 - \frac{1}{n} \geq 0,98 \Leftrightarrow n \geq 50$.

116. On considère $A_1, A_2, \dots, A_n$ les variables aléatoires donnant les apports caloriques journaliers successifs : on suppose qu'elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi d'espérance 3 000 et d'écart-type 50.

On pose alors $M_n = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}$ et on cherche

n tel que $p(|M_n - 3\,000| < 100) \geq 0,99$.

Comme

$$p(|M_n - 3\,000| < 100) \geq 1 - \frac{50^2}{n \times 100^2} = 1 - \frac{1}{4n}$$

une condition suffisante est

$$1 - \frac{1}{4n} \geq 0,99 \Leftrightarrow n \geq 25.$$

117. 1. a) On obtient soit 1 PILE (avec une probabilité 0,6) soit 0 PILE (avec une probabilité 0,4) donc X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,6.

b) $E(X_i) = 0,6$ et $V(X_i) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$.

2. a) $]0,5 ; 0,7[$ pour $\delta = 0,1$.

b) On cherche n tel que

$$p(|M_n - 0,6| < 0,1) \geq 0,95.$$

Comme

$$p(|M_n - 0,6| < 0,1) \geq 1 - \frac{0,24}{n \times 0,1^2} = 1 - \frac{24}{n}$$

une condition suffisante est

$$1 - \frac{24}{n} \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq 480 \text{ donc } n_0 = 480.$$

c) Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de PILE obtenus quand on lance 480 fois cette pièce. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 480$ et $p = 0,6$ et on cherche $p(X > 240) \approx 0,999\,99$.

Pour 480 lancers, on est sûr à un seuil bien plus élevé que 95 % d'obtenir plus de PILE que de FACE : encore une fois, l'inégalité de concentration n'est pas optimale.

Déterminer δ ou V

118. 1. Pour $\delta \geq \sqrt{200}$ l'inégalité est vérifiée.

2. $p(|X - 10| \geq \delta) \leq \frac{4}{\delta^2} \leq 0,02$.

119. a) On résout d'abord $\frac{V(Y)}{\delta^2} \leq 0,01 \Leftrightarrow \delta \geq 10\sigma(Y)$.

Pour ces valeurs de δ , on a

$$p(|Y - E(Y)| \geq \delta) \leq \frac{V(Y)}{\delta^2} \leq 0,01.$$

b) On résout d'abord $1 - \frac{V(Y)}{\delta^2} > \frac{8}{9} \Leftrightarrow \delta > 3\sigma(Y)$.

Pour ces valeurs de δ , on a

$$p(|Y - E(Y)| < \delta) \geq 1 - \frac{V(Y)}{\delta^2} > \frac{8}{9}.$$

120. D'après l'énoncé, on a

$$p(|X - 70| \geq 10) > 0,1.$$

D'autre part, $p(|X - 70| \geq 10) \leq \frac{V(X)}{10^2}$ d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

$$\text{On a donc } \frac{V(X)}{10^2} > 0,1 \Leftrightarrow V(X) > 10.$$

121. 1. On résout d'abord

$$1 - \frac{V(S)}{\delta^2} \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geq \frac{100}{\delta^2} \Leftrightarrow \delta \geq 100.$$

Pour ces valeurs de δ , on a

$$p(|S - 300| < \delta) \geq 1 - \frac{100}{\delta^2} \geq 0,99.$$

2. D'après la question précédente, $p(S \in]200 ; 400[) = p(S \geq 201) \geq 0,99$ donc $a = 200$ convient.

122. Travail de l'élève.

1. Bienaymé l'a formulée et Tchebychev l'a démontrée.

2. On peut par exemple penser au théorème de Fermat-Wiles ou au théorème de Pythagore dont on trouve des formulations dans des textes de différentes civilisations (babylonienne, indienne, chinoise) mais dont la première démonstration connue est donnée par Euclide.

On pourra ouvrir le spectre des recherches aux recherches simultanées (on pense notamment au calcul différentiel de Leibniz et Newton).

123. Travail de l'élève.

1. Les sondages précédant d'un an les élections de 2017 donnent des intentions de votes très sur-évalués ou sous-évalués pour de nombreux candidats.

2. La sincérité des réponses (cf J-M. Le Pen en 2002 par exemple), taille des échantillons, etc.

3.... (pour le graphique, on pourra par exemple afficher les intentions de votes successives d'un ou une candidate afin de commenter son évolution dans le temps).

x_i	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,9	0,08	0,02

$S = X_1 + X_2 + \dots + X_{10}$ où X_i est le nombre de feuilles prises lors de la i -ème impression (chacune des X_i suit la loi de X et sont indépendantes car les impressions sont indépendantes).

2. On trouve $E(X) = 1,12$ donc $E(S) = 10E(X) = 11,2$.

3. On trouve $V(X) = 0,1456$ donc $V(S) = 10V(X) = 1,456$.

On en déduit que $\sigma(S) \approx 1,21$.

125. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (1)

1. $E(Z) = 6E(X) = 6\,000$ et $V(Z) = 6 \times 15 = 90$ par indépendance des volumes de chacune des bouteilles.

2. Cette probabilité est $p(Z \in]5\,950 ; 6\,050[)$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$p(Z \in]5\,950 ; 6\,050[) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2}$$

$$p(Z \in]5\,950 ; 6\,050[) \geq 1 - \frac{90}{50^2}$$

$$p(Z \in]5\,950 ; 6\,050[) \geq 0,964.$$

3. a) Comme le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise, on considère que c'est une répétition de 200 expériences de Bernoulli (de succès le fait que la pack d'eau contienne entre 5,950 et 6,050 L, de probabilité 0,98) effectuée de manière identique et indépendante.

N suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,98$.

b) Avec la calculatrice, $p(N \geq 194) \approx 0,891$.

c) On a $E(N) = np = 196$. Sur un grand nombre de lots de 200 packs, en moyenne, 196 contiennent entre 5,950 et 6,050 L.

126. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (2)

1. Albane car $\sigma(A) < \sigma(T)$.

2. a) Albane et Thomas ne répondent qu'aux questions de leur discipline donc le score sur un thème n'a pas de lien avec le score sur l'autre.

b) $E(S) = 86$ et, A et T étant indépendantes,

$$V(S) = 3^2 + 4^2 = 25 \text{ puis } \sigma(S) = 5.$$

$$\mathbf{3. a)} \quad p(|S - 86| < 15) \geq 1 - \frac{25}{15^2} \text{ avec } 1 - \frac{25}{15^2} \approx 0,889.$$

124. Somme de variables aléatoires

1. La loi de X est donnée par le tableau :

b) $p(|S - 86| < 15) = p(S \in]71 ; 101]) = p(S \geq 72)$ puisqu'il y a 100 questions donc Albane et Thomas sont sûrs de gagner un lot à un seuil proche de 89 %.

127. Inégalité de concentration, loi des grands nombres et simulation

1. a) $E(X) = 2,5$ et $V(X) = 1,25$.

b) On considère $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant les résultats des lancers successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que X .

On pose alors $M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ et on cherche n

tel que $p(|M - 2,5| < 0,05) \geq 0,95$.

Comme

$$p(|M - 2,5| < 0,05) \geq 1 - \frac{1,25}{n \times (0,05)^2} = 1 - \frac{500}{n},$$

une condition suffisante est

$$1 - \frac{500}{n} \geq 0,95 \Leftrightarrow n \geq 10\,000.$$

2. a) La probabilité que le résultat soit 4 est 0,35 et non 0,25 (par exemple si $a = 0,7$ alors r vaut d'abord 3 mais prend ensuite la valeur 4 qui est renvoyée).

b)

y_i	1	2	3	4
$p(Y = y_i)$	0,25	0,25	0,15	0,35

c) $E(Y) = 2,6$ et $V(Y) = 1,44$.

d) Sous la condition que les valeurs renvoyées par la fonction sont indépendantes.

4. a) De $E(Y) = 2,6$.

$$b) p(|M - 2,6| < 0,05) \geq 1 - \frac{1,44}{10\,000 \times (0,05)^2}$$

$$\text{avec } 1 - \frac{1,44}{10\,000 \times (0,05)^2} = 0,942\,4 \text{ donc oui,}$$

c'est assez probable.

c) Si on joue 10 000 fois, on voit que la moyenne des résultats doit probablement se trouver dans l'intervalle $]2,55 ; 2,65[$ avec ce programme alors qu'elle devrait très probablement être dans $]2,45 ; 2,55[$ si le programme était correct.

On peut donc jouer 10 000 fois et constater que la moyenne des résultats n'est pas dans $]2,45 ; 2,55[$ ce qui devrait être le cas avec une probabilité supérieure à 0,95.

Préparer le BAC Je me teste

p. 430

128. B car c'est égal à $5E(X)$.

129. B car c'est égal à $E(X) + E(Y)$.

130. B car X et Y étant indépendantes, c'est $V(X) + V(Y) = 0,04^2 + 0,12^2$.

131. C car la variable aléatoire moyenne qui a la même espérance que X .

132. D en résolvant l'équation $E(X) + bE(Y) = 0$.

133. D d'après le cours.

134. A = $\frac{V}{\delta^2}$ où $\delta = 2$.

135. C et D car il serait suffisant d'avoir

$$1 - \frac{2}{n \times 0,2^2} > 0,95$$

136. B d'après la loi des grands nombres.

Préparer le BAC Je révise

p. 431

137. Problème ouvert

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de fois où elle touche la cible 1 et Y celle pour la cible 2.

Les tirs étant indépendants, on peut dire que X suit $\mathcal{B}(20 ; 0,4)$ et Y suit $\mathcal{B}(10 ; 0,1)$.

On a donc $E(X) = 8$ et $E(Y) = 1$.

Soit Z la variable aléatoire donnant le nombre de points : on a $Z = 5X + 20Y$.

Sur un grand nombre d'entraînements, elle peut espérer en moyenne $E(Z)$ points avec :

$$E(Z) = E(5X + 20Y) = 5E(X) + 20E(Y) = 40 + 20 = 60$$

c'est-à-dire 60 points.

138. Avec un programme

1. La loi de X est donnée par :

x_i	-4	5	100
$p(X = x_i)$	0,78	0,18	0,04

2. D'après la ligne 11, elle est utilisée 10 fois.

3. - 40 signifie que l'on a obtenu - 4 dix fois (soit 10 parties perdues).

Cette probabilité vaut $0,78^{10} \approx 0,083$.

4. a) On peut écrire $S = X_1 + \dots + X_{10}$ où X_i est le gain à la i -ème des 10 parties et où tous les X_i suivent la loi donnée dans la question 1.

b) On a $E(S) = 10E(X) = 17,8$ car $E(X) = 1,78$.

On peut espérer gagner en moyenne 17,8.

139. Espérance et concentration

1. On considère $T_1, T_2, \dots, T_{52}$ les variables aléatoires donnant les temps d'attente successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que T . On pose alors :

$$M = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_{52}}{52} \text{ et } p(M - 600 < 60) \geq 1 - \frac{2\,000}{52 \times 60^2}$$

$$\text{avec } 1 - \frac{2\,000}{52 \times 60^2} \approx 0,989.$$

2. a) $T' = T - 60$ donc $E(T') = 540$ et $V(T') = 2\,000$.

b) On considère $T'_1, T'_2, \dots, T'_n$ les variables aléatoires donnant les temps d'attente successifs : elles sont toutes indépendantes et suivent la même loi que T' .

On pose alors $M'_n = \frac{T'_1 + T'_2 + \dots + T'_n}{n}$ et on cherche n

tel que $p(|M'_n - 540| < 30) \geq 0,99$.

Comme

$$p(|M'_n - 540| \geq 1) - \frac{2000}{n \times 30^2} = 1 - \frac{20}{9n},$$

une condition suffisante est

$$1 - \frac{20}{9n} \geq 0,99 \Leftrightarrow n \geq \frac{2\,000}{9}$$

donc à partir de 223 clients.

140. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,25$.

2. a) $G = 2X$

b) $E(X) = 12,5$ et $V(X) = 9,375$ donc $E(G) = 25$ et $V(G) = 37,5$.

3. a) $S = 2X - 0,5(50 - X) = 2X - 25 + 0,5X = 2,5X - 25$

b) $E(S) = 2,5E(X) - 25 = 6,25$ et $V(S) = V(2,5X) = 2,5^2 V(X) = 58,593\,75$.

$$\text{c) } p(|S - 6,25| \geq 31,75) \leq \frac{58,593\,75}{31,75^2}$$

$$\text{avec } \frac{58,593\,75}{31,75^2} \approx 0,058.$$

d) $|S - 6,25| \geq 31,75$

$\Leftrightarrow S \in]-\infty; -25,5] \cup [38; +\infty[$ or le score minimal est -25 donc $|S - 6,25| \geq 31,75 \Leftrightarrow S \geq 38$.

La probabilité que l'on obtienne 38 points ou plus à ce jeu est inférieure à 0,058 environ.

e) $S \geq 38 \Leftrightarrow 2,5X - 25 \geq 38$

$\Leftrightarrow 2,5X \geq 63 \Leftrightarrow X \geq 25,2$ c'est-à-dire $X \geq 26$.

Ainsi, $p(S \geq 38) = p(X \geq 26) \approx 0,000\,04$.

f) La majoration (de l'ordre de 0,06) n'est pas très bonne puisque la « vraie » probabilité est bien plus faible (de l'ordre de 0,000 04).

Exercices vers le supérieur p. 432-433

141. Variables aléatoires en tant que fonctions

1. a) $\Omega = \{\text{rouge ; vert ; noir ; blanc}\}$

b) $G(\text{rouge}) = 1, G(\text{vert}) = 0, G(\text{noir}) = 0$

et $G(\text{blanc}) = -2$.

c) G est une variable aléatoire.

Sa loi est :

g_i	-2	0	1
$p(G = g_i)$	0,1	0,7	0,2

2. a) $\Omega' = \{7 ; 8 ; 9 ; 10 ; \text{valet ; dame ; roi ; as}\}$

b) $V(7) = V(8) = V(9) = V(10) = 0, V(\text{valet}) = V(\text{dame}) = V(\text{roi}) = 10$ et $V(\text{as}) = 20$.

142. Variables aléatoires, univers et espérance

1. a) Ils sont identiques car $X = x_i$ si et seulement si $X(\omega) = x_i$ c'est-à-dire si et seulement si $\omega \in A_i$.

$$\text{b) } p_i = p(X = x_i) = p(X \in A_i) = \sum_{\omega \in A_i} p(\omega)$$

$$\begin{aligned} 2. E(X) &= x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n \\ &= x_1 \times p(X = x_1) + x_2 \times p(X = x_2) + \dots + x_n \times p(X = x_n) \end{aligned}$$

$$= x_1 \times \sum_{\omega \in A_1} p(\omega) + x_2 \times \sum_{\omega \in A_2} p(\omega) + \dots + x_n \times \sum_{\omega \in A_n} p(\omega)$$

$$= \sum_{\omega \in A_1} (p(\omega) \times x_1) + \sum_{\omega \in A_2} (p(\omega) \times x_2) + \dots + \sum_{\omega \in A_n} (p(\omega) \times x_n)$$

or pour tout $\omega \in A_i, x_i = X(\omega)$ donc

$$E(X) = \sum_{\omega \in A_1} (p(\omega) \times X(\omega)) + \sum_{\omega \in A_2} (p(\omega) \times X(\omega)) + \dots$$

$$+ \sum_{\omega \in A_n} (p(\omega) \times X(\omega)) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times X(\omega)).$$

143. Linéarité de l'espérance

$$1. E(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times Y(\omega))$$

$$2. E(X + Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times (X(\omega) + Y(\omega)))$$

$$3. E(X) + E(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times X(\omega))$$

$$+ \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times Y(\omega)) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times (X(\omega) + Y(\omega)))$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times (X(\omega) + Y(\omega))) = E(X + Y)$$

144. Variables comparables et espérance

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times X(\omega)) \leq \sum_{\omega \in \Omega} (p(\omega) \times Y(\omega)) = E(Y) \text{ si } X(\omega) \leq Y(\omega) \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

145. Inégalité de Markov

1. Soit $\omega \in \Omega$.
 - si $X(\omega) \geq \delta$ alors $Y(\omega) = \delta$ donc $X(\omega) \geq Y(\omega)$.
 - si $X(\omega) < \delta$ alors $Y(\omega) = 0$ donc $X(\omega) \geq Y(\omega)$ puisque X est positive.

On vient de montrer que $X \geq Y$ donc $E(X) \geq E(Y)$.

2. a)

y_i	0	δ
$p(Y = y_i)$	$1 - p(X \geq \delta)$	$p(X \geq \delta)$

- b) $E(Y) = p(X \geq \delta) \times \delta$
3. On a donc $E(X) \geq E(Y) = p(X \geq \delta) \times \delta$ donc
- $$p(X \geq \delta) \leq \frac{E(X)}{\delta} \text{ puisque } \delta > 0.$$

146. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1. $Z = (X - E(X))^2$ est une variable aléatoire positive donc on peut appliquer l'inégalité de Markov.
2. Pour δ positif, appliquons l'inégalité de Markov à Z et δ^2 :

$$p(Z \geq \delta^2) \leq \frac{E(Z)}{\delta^2}, \text{ or}$$

- $Z \geq \delta^2 \Leftrightarrow (X - E(X))^2 \geq \delta^2 \Leftrightarrow |X - E(X)| \geq \delta$;
- $E(Z) = V(X)$ d'après le rappel de l'énoncé ;

$$\text{on a donc } p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

147. Écritures équivalentes

1. Les X_i suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre p car la probabilité d'un succès dans la i -ème répétition du schéma de Bernoulli vaut p .
2. Comme le cadre est un schéma de Bernoulli, les expériences sont identiques et indépendantes et donc les X_i sont indépendantes.
3. $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ donne le nombre de succès sur les n répétitions donc $X_1 + X_2 + \dots + X_n = X$ ce qui prouve que l'on peut décomposer X en une somme de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$.

148. Jeu de couleurs

Soit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique à ce jeu. D'après le graphique et la loi des grands nombres, on a $E(G) = -0,1$ environ.

D'autre part,

$$E(G) = p \times (-1) + (1 - p) \times 2 = 2 - 3p$$

où p est la probabilité de perdre (c'est-à-dire la proportion de boules noires dans l'urne).

On a donc $p = 0,7$ après résolution de $2 - 3p = -0,1$.

Pour n le nombre de boules noires, on a $\frac{n}{30} = p = 0,7$

donc $n = 21$: il y a 21 boules noires et 9 boules rouges.

149. Variables aléatoires indépendantes (1)

1. À l'aide d'un tableau à double entrée par exemple, on trouve $p(S = 7) = \frac{6}{64}$ et $p(R = 1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

2. $p(S = 7) \cap (R = 1) = \frac{2}{64}$ car les issues qui conviennent sont $\{6 ; 1\}$ et $\{5 ; 2\}$.

$$3. \frac{6}{64} \times \frac{32}{64} = \frac{3}{64} \neq \frac{2}{64}$$

S et R ne sont pas indépendantes.

150. Variables aléatoires indépendantes (2)

1. La loi de X est donnée par :

x_i	0	2
$p(X = x_i)$	0,5	0,5

La loi de Y st donnée par :

y_i	0	5
$p(Y=y_i)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

On a :

• $p(X = 2 \cap Y = 5) = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$

et $p(X = 2) \times p(Y = 5) = \frac{1}{6}$: il y a égalité.

• $p(X = 0 \cap Y = 5) = p(\{5\}) = \frac{1}{6}$

et $p(X = 0) \times p(Y = 5) = \frac{1}{6}$: il y a égalité.

• $p(X = 2 \cap Y = 0) = p(\{2 ; 4\}) = \frac{1}{3}$

et $p(X = 2) \times p(Y = 0) = \frac{1}{3}$: il y a égalité.

• $p(X = 0 \cap Y = 0) = p(\{1 ; 3\}) = \frac{1}{3}$

et $p(X = 0) \times p(Y = 0) = \frac{1}{3}$: il y a égalité.

Les variables X et Y sont donc indépendantes.

151. Variables aléatoires indépendantes (3)

À l'aide d'un arbre (seules les deux premières étapes sont nécessaires) par exemple, on obtient

que : $p((X = 1) \cap (Y = 10)) = p(Y = 10) = \frac{1}{6}$

$p(X = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y = 10) = \frac{1}{6}$.

On en déduit que

$p((X = 1) \cap (Y = 10)) \neq p(X = 1) \times p(Y = 10)$.

X et Y ne sont donc pas indépendantes.

Remarque : On peut considérer $X = 2$ et $Y = 10$.
En effet, $p((X = 2) \cap (Y = 10)) = 0$ et $p(X = 2) \neq 0$ et $P(Y = 10) \neq 0$.

152. Variance et indépendance

1. Non :

• $p(U = 3) = \frac{1}{12}$ et $p(D = 0) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

donc $p(U = 3) \times p(D = 0) = \frac{1}{16}$;

• $p((U = 3) \cap (D = 0)) = \frac{1}{12}$;

donc $p(U = 3) \times p(D = 0) \neq p((U = 3) \cap (D = 0))$.

2. $V(U) = \frac{49}{6}$ et $V(D) = 0,1875$ donc $V(U) + V(D) = \frac{401}{48}$.

La loi de $U + D$ est :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(U + D = y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

donc $V(U + D) = \frac{329}{48}$.

Dans ce cas où U et V ne sont pas indépendantes, on a $V(U + D) \neq V(U) + V(D)$.

153. Espérance et indépendance

1. Pour résumer, on peut utiliser un tableau à double entrée :

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Ainsi on a la loi de XY donnée par :

r_i	1	2	3	4	6	8	9	12	16
$p(XY=r_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{12}$

2. On trouve $E(XY) = 6,25$.

3. La loi de X (et celle de Y) est donnée par :

x_i	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Donc $E(X) = E(Y) = 2,5$.

On remarque que

$E(X) \times E(Y) = 6,25 = E(XY)$.

154. Variance de Konig-Huygens

$V(X + Y) = E[(X + Y)^2] - [E(X + Y)]^2$ d'après le premier prérequis

$$= E(X^2 + 2XY + Y^2) - [E(X) + E(Y)]^2$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - ([E(X)]^2 + 2E(X)E(Y) + [E(Y)]^2)$$

$$= E(X)^2 + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - [E(X)]^2 - 2E(X)E(Y) - [E(Y)]^2$$

d'après le deuxième prérequis

$$= E(X)^2 - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$= V(X) + V(Y) \text{ d'après le premier prérequis.}$$

Travaux pratiques

p. 434-437

TP 1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev et loi binomiale

- **Durée estimée** : 55min
- **Objectif** : Confronter la majoration donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et la valeur de la probabilité dans le cadre de la loi binomiale afin de constater que cette majoration est loin d'être optimale.

A. Premier exemple

1.... $\Leftrightarrow 0 \leq X \leq 2$ ou $9 \leq X \leq 10$.

2....for i in [0, 1, 2, 9, 10]

On obtient 0,050 6 environ.

B. Calcul de $p(|S_n - np| \geq \sqrt{n})$ et inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1. a)

```
def p1(n, p):
    return sum([proba_binom(n, p, i)
                for i in range(n+1)
                if abs(i-n*p) >= math.sqrt(n)])
```

b)...

2. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n d'espérance np et de variance $np(1-p)$:

$$p(|S_n - np| \geq \sqrt{n}) \leq \frac{np(1-p)}{(\sqrt{n})^2} = p(1-p).$$

3. a) 0,247 5

b) Dans le cas $n = 10$ et $p = 0,55$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

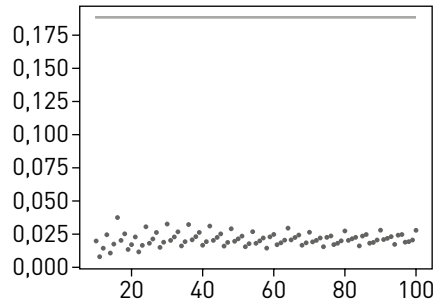
$p(|S_n - np| \geq \sqrt{n}) \leq 0,2475$ alors que l'on sait que $p(|S_n - np| \geq \sqrt{n}) \approx 0,050 6$ dans ce cas : la majoration donnée n'est pas très bonne.

C. Comparaison de $p(|S_n - np| \geq \sqrt{n})$ et $p(1-p)$

1.

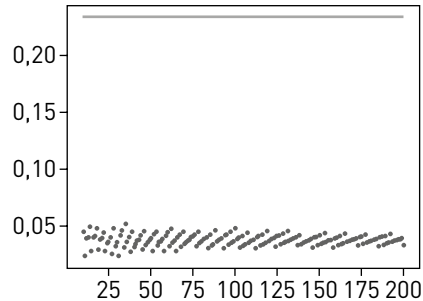
```
def p2(k, p):
    return [p1(n, p) for n in range(10, k+1)]
```

2. a) On obtient :



Pour un p donné, la majoration n'est jamais très bonne.

b) Par exemple avec $k = 200$ et $p = 0,63$:



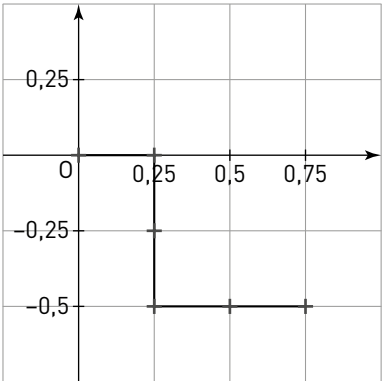
Oui, cela confirme les observations de la question précédente.

c) À « n constant», on remarque que les probabilités sont globalement plus grandes quand p est proche de 0,5 : c'est normal car dans ce cas, la variance $np(1-p)$ est plus grande c'est-à-dire que les valeurs éloignées de l'espérance np sont plus probables.

TP 2. Marche aléatoire

- **Durée estimée** : 50 min
- **Objectif** : Travailler avec une marche aléatoire et, en particulier, discuter de l'éloignement du point de départ.

1. a) On obtient (les points marquent les positions d'arrêts successives du centre du robot) :



b) $X = [0, -0,25, -0,25, -0,25, 0, 0]$
et $Y = [0, 0, -0,25, -0,5, -0,5, -0,25]$

2. a)

```
def modif1 (L) :  
    L.append (L[len(L) -1] + 0.25)  
    return L
```

b)

```
def modif2 (L) :  
    L.append (L[len(L) -1] - 0.25)  
    return L
```

c)

```
def modif3 (L) :  
    L.append (L[len(L) -1])  
    return L
```

3. a) L'abscisse augmente de 0,25 et l'ordonnée reste identique donc c'est un déplacement vers la droite.

b) • Si $a = 2$, c'est un déplacement vers la gauche.

• Si $a = 3$, c'est un déplacement vers le fond.

• Si $a = 4$, c'est un déplacement vers l'avant.

4. a) Non.

b)...

c) Si on considère l'abscisse du robot, la variable aléatoire X_i donnant la valeur à y ajouter à l'étape i suit la loi :

x_i	-0,25	0	0,25
$p(X = x_i)$	0,25	0,5	0,25

d'espérance 0 et de variance 0,031 25.

Cela veut dire qu'après 1 000 étapes par exemple, l'abscisse du point est donnée par la variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}$ d'espérance $1\,000 \times 0 = 0$ et de variance

$1\,000 \times 0,031\,25 = 31,25$ (toutes les variables aléatoires X_i sont indépendantes).

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$p(|S| \geq 20) \leq \frac{31,25}{20^2} = 0,078\,125 \text{ donc, bien qu'en}$$

1 000 étapes, le robot ait pu atteindre (au maximum) les abscisses - 250 ou 250, la probabilité qu'il soit éloigné du point de départ de plus de 20 est inférieure à 0,078 125 (et on sait que cette majoration n'est pas optimale).

Il en va de même pour les ordonnées.

TP 3. Échantillons et écarts-types

• **Durée estimée :** 40 min

• **Objectif :** Simuler N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ . Calculer l'écart type s de la série des moyennes des échantillons observés et la comparer à $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$.

Calculer la proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre la moyenne et μ est inférieur ou égal à ks pour $k = 1, 2, 3$.

A. Observations

1. 2. 3. 4. 5. 6. a) b)...

7. a) $\sigma = 3$ et $n = 100$ ici donc $\frac{\delta}{\sqrt{n}} = 0,3$: la valeur s

en D102 doit être proche de 0,3 normalement.

b) Normalement oui.

c) Normalement oui.

8. a) b) c) d)...

e) Autour de 70 %.

f) Pour $k = 2$: autour de 95 %.

Pour $k = 3$: autour de 100 %.

B. Simulation

1. $\mu = 600 \times 0,5 + 300 = 600$

$$\text{Et } \delta = 600 \times \frac{\sqrt{3}}{6} = 100\sqrt{3}.$$

2. De 600 (loi des grands nombres).

$$3. \text{ De } \frac{\delta}{\sqrt{n}} = \frac{100\sqrt{3}}{\sqrt{300}} = \frac{100\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = 10.$$

TP 4. Étude de sondages

- **Durée estimée** : 55 min
- **Objectif** : Répondre à la question d'entrée de chapitre en étudiant le lien entre le coût et la précision d'un sondage. On commencera par faire le lien entre sondages et échantillons pour faire le lien avec ce chapitre.

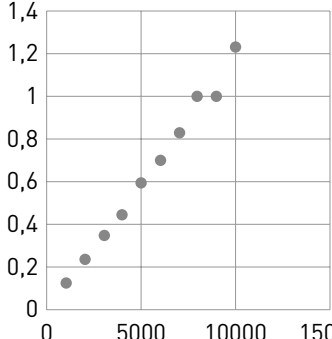
A. Premier tour des élections présidentielles 2017 en France

1. a) Sous l'hypothèse d'indépendance.
S suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,2$.
- b) [176 ; 225].
- c) Il doit être crédité d'entre 17,6 % et 22,5 % des voix soit une marge d'erreur de 2,4 % – 2,5 %.
- d) Normalement, on ne devrait pas avoir une proportion en dehors de [0,176 ; 0,225] donc on peut douter de leur fiabilité ou de leur représentativité (pour de multiples raisons, pas nécessairement parce qu'ils ont mal été réalisés).
2. Intervalle de fluctuation : [1 922 ; 2 079], soit entre 19,22 % et 20,79 % : la marge d'erreur est d'environ 0,8 %.

B. Deuxième tour des élections présidentielles 2017

1. a) 1 €
- b) Par exemple pour 2 000 sondés, le coût est de 2 000 € et la marge d'erreur de 2,1 % environ alors que pour 4 000 sondés, le coût est de 4 000 € (le double de 2 000 €) mais la marge d'erreur est de 1,5 % environ, elle n'est donc pas divisée par 2.

2. a) Avec un tableur, on obtient :

	A	B	C
1	x	y	$y' = 1/y^2$
2	1000	2,9	0,11890606
3	2000	2,1	0,22675737
4	3000	1,7	0,34602076
5	4000	1,5	0,44444444
6	5000	1,3	0,59171598
7	6000	1,2	0,69444444
8	7000	1,1	0,82644628
9	8000	1	1
10	9000	1	1
11	10000	0,9	1,23456789
12			
13	Points de coordonnées		
14	$(x ; y')$		
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			
22			
23			
24			
25			
26			

- Les points semblent quasi alignés.
- b) Elle semble linéaire avec $f(x) = 0,000\,12x$.
- c) Pour x sondés, $f(x) = \frac{1}{\text{Marge d'erreur}^2}$ donc la marge d'erreur est $\frac{1}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{\sqrt{0,000\,12x}} \approx \frac{1}{0,011\sqrt{x}}$.
- Pour 1 000 000 personnes sondées, cela donne 0,09 % environ.

Sujet type A

p. 444

1. Suite arithmetico-géométrique et limite

1. a) $u_1 = 0,8 \times u_0 + 35 = 0,8 \times 150 + 35 = 155$

Donc il y a 155 vélos en stock au 1^{er} juillet 2021.

b) Chaque année, le stock est amputé de 20 % (donc multiplié par 0,8) puis augmenté de 35.

u_n représente le nombre de vélos en stock à l'année 2020 + n . Donc $u_{n+1} = 0,8u_n + 35$.

2. a) En B3 on peut saisir « $=0,8*B2+35$ ».

b) La limite de (u_n) semble être 175.

3. a) Pour tout entier n ,

$$v_n = u_n - 175 \text{ donc } u_n = v_n + 175.$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 175 = 0,8u_n + 35 - 175 \\ &= 0,8(v_n + 175) - 140 \\ &= 0,8v_n + 140 - 140 \\ &= 0,8v_n \end{aligned}$$

donc (u_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = u_0 - 175 = 150 - 175 = -25$.

b) Pour tout entier n , $v_n = v_0 \times 0,8^n = -25 \times 0,8^n$.

$$\text{Donc } u_n = v_n + 175 = -25 \times 0,8^n + 175.$$

c) $-1 < 0,8 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$.

$$\text{Par opérations, } \lim_{n \rightarrow +\infty} -25 \times 0,8^n + 175 = 175.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 175.$$

4. Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= [-25 \times 0,8^{n+1} + 175] - [-25 \times 0,8^n + 175] \\ &= -25 \times 0,8^{n+1} + 25 \times 0,8^n \\ &= 25 \times 0,8^n (-0,8 + 1) \\ &= 25 \times 0,8^n \times 0,2 > 0 \end{aligned}$$

donc (u_n) est croissante.

5. a)

```
n = 0
u = 1
while u < 170 :
    n = n + 1
    u = 0.8 * u + 35
print(n)
```

b) Le programme renvoie $n = 8$.

Donc le stock de vélos dépassera 170 en 2028.

2. Variable aléatoire

1. a) R donne le nombre de succès quand on réalise 200 fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'un succès (« obtenir un bonbon rouge ») est 0,2 donc R suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,2$.

$$\text{b) } p(X = 35) \approx 0,049$$

$$\text{c) } p(40 \leq R \leq 50) = p(R \leq 50) - p(R \leq 39) \approx 0,494$$

$$\text{d) } E(R) = n \times p = 200 \times 0,2 = 40$$

2. a) G suit la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0,25$.

b) On trouve $[61 ; 90]$.

c) $63 \in [61 ; 90]$ donc il n'y a pas de raison de mettre en cause l'affirmation du site B.

3. a) S donne le nombre total de bonbons rouges reçus par Rayane et Gabriel.

$$\text{b) } E(S) = E(R) + E(G) = 200 \times 0,2 + 300 \times 0,25 = 115$$

c) Les commandes étant indépendantes, on peut supposer que R et G le sont également.

$$\text{On a donc } V(S) = V(R) + V(G) = 200 \times 0,2 \times 0,8 + 300 \times 0,25 \times 0,75 = 88,25 \text{ puis } \sigma(S) = \sqrt{88,25} \approx 9,4.$$

3. Géométrie dans l'espace

$$\text{1. a) } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$(AB) : \begin{cases} x = 10t \\ y = -8t \text{ (} t \text{ réel)} \\ z = 2t \end{cases} \text{ et } (CD) : \begin{cases} x = -1 + 15t \\ y = -8 + 12t \text{ (} t \text{ réel)} \\ z = 5 + 3t \end{cases}$$

b) $\frac{10}{15} \neq \frac{-8}{12}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, donc (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

$$\begin{cases} 10t = -1 + 15u \\ -8t = -8 + 12u \\ 2t = 5 + 3u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24 = 0 \\ u = -0,5 \\ t = 2,5 + 1,5u \end{cases} \text{ ce système n'a pas}$$

de solution donc (AB) et (CD) ne sont pas sécants. Donc (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. a) Les coordonnées de I vérifient

$$\begin{cases} x = 10t \\ y = -8t \\ z = 2t \\ x = 5 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} t = 0,5 \\ y = -4 \\ z = 1 \\ x = 5 \end{cases} \text{ donc } I(5; -4; 1).$$

Les coordonnées de J vérifient

$$\begin{cases} x = -1 + 15t \\ y = -8 + 12t \\ z = 5 + 3t \\ x = 4 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ y = -4 \\ z = 6 \\ x = 4 \end{cases} \text{ donc } J(4; -4; 6).$$

$$IJ = \sqrt{(4-5)^2 + (-4-(-4))^2 + (6-1)^2} = \sqrt{26}.$$

$$\vec{IJ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{AB} \cdot \vec{IJ} = 10 \times (-1) + (-8) \times 0 + 2 \times 5 = 0 \text{ et}$$

$$\vec{CD} \cdot \vec{IJ} = 15 \times (-1) + (-8) \times 0 + 3 \times 5 = 0.$$

$\vec{IJ}$ est orthogonal à $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$, comme I est sur (AB) et J sur (CD), on en déduit que (IJ) est perpendiculaire à (AB) et (CD).

3. a) M' et J sont deux points distincts de (CD) donc $(CD) = (M'J)$.

Δ est parallèle à $(M'J)$ et passe par I, donc le plan $(M'IJ)$ contient Δ .

Soit d la droite parallèle à (IJ) passant par M' , alors le plan $(M'IJ)$ contient d .

Donc d et Δ sont coplanaires.

d est parallèle à (IJ), qui est perpendiculaire à (CD), donc d et (CD) sont orthogonales.

(CD) est parallèle à Δ donc d et Δ sont orthogonales. d et Δ étant à la fois coplanaires et orthogonales, elles sont sécantes en un point P.

b) M' et P sont deux points distincts de d , donc $d = (M'P)$.

I et P sont deux points distincts de Δ , donc $\Delta = (IP)$.

D'après la question précédente, $(M'P)$ et (IP) sont orthogonales et sécantes en P, elles sont donc perpendiculaires.

Donc le triangle MPM' est rectangle en P.

c) MPM' est rectangle en P donc, d'après le théorème de Pythagore, $MM' > MP$.

$(M'P)$ et (IJ) sont parallèles ainsi que $(M'J)$ et (PI), le quadrilatère $M'PIJ$, possédant de plus deux angles

droits en I et J, est un rectangle. Donc $M'P = IJ$.
Donc $MM' > IJ$.

Ainsi quelque soit les points M de (AB) et M' de (CD), on a $MM' \geq IJ$.

IJ est donc la distance minimale entre les droites (AB) et (CD).

4. Équation différentielle en sciences physiques

A. $P_S(100) = P_E \times e^{-a \times 100} = 7 \times e^{-0,046 \times 100} \approx 0,07 < 0,08$ donc il sera nécessaire de placer au moins un amplificateur pour que le signal soit détectable en sortie.

B. 1. $y' + 0,035y = 0 \Leftrightarrow y' = -0,035y$

L'ensemble des solutions est $y : x \mapsto Ke^{-0,035x}$, K réel.

2. a) g est solution de l'équation $y' + 0,035y = 0$ donc $g : x \mapsto Ke^{0,035x}$, K réel.

De plus $g(0) = 7$ donc $Ke^{-0,035 \times 0} = 7$, donc $K = 7$.

Donc $g(x) = 7e^{-0,035x}$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.

b) On a $P_S(L) = P_E \times e^{-aL}$ où $P_E = 7$ et $P(L) = g(L)$ donc $7e^{-0,035L} = 7e^{-aL}$.

Par identification, $a = 0,035$.

3. a) $g'(x) = -0,0245e^{-0,035x} < 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$.
Donc g est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,035x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7e^x = 0$.

Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

4. a) $g(100) = 7e^{-0,035 \times 100} \approx 0,2 > 0,08$ donc le signal sera encore détecté au bout de 100 km de propagation.

b) $g(x) \geq 0,08 \Leftrightarrow 7e^{-0,035x} \geq 0,08$

$$\Leftrightarrow e^{-0,035x} \geq \frac{0,08}{7}$$

$$\Leftrightarrow -0,035x \geq \ln\left(\frac{0,08}{7}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{\ln\left(\frac{0,08}{7}\right)}{-0,035}$$

$\frac{\ln\left(\frac{0,08}{7}\right)}{-0,035} \approx 127,76$ donc la longueur maximale est d'environ 127,76 km.

Sujet type B

p. 447

1. Équation différentielle et économie

A. 1. $f'(x) = 0,5 - 0,5e^{-0,5x+0,4}$

$$2. 0,5 - 0,5e^{-0,5x+0,4} \geq 0 \Leftrightarrow e^{-0,5x+0,4} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -0,5x + 0,4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0,8$$

Donc $f'(x) \leq 0$ pour $x \leq 0,8$ et $f'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0,8$.
Donc f est strictement décroissante sur $[0; 0,8]$ et strictement croissante sur $[0,8; +\infty[$.

Elle admet donc bien un minimum en 0,8.

B. 1. $h'(x) = 0,5$ et

$$0,5 + 0,25x - 0,5h(x) = 0,5 + 0,25x - 0,5 \times 0,5x = 0,5$$

h est donc bien une solution particulière de (E).

2. a) On a $h'(x) = 0,5 + 0,25x - 0,5h(x)$.

g est solution de (E) si et seulement si

$$g'(x) = 0,5 + 0,25x - 0,5g(x)$$

$$\Leftrightarrow g'(x) - h'(x) = 0,5 + 0,25x - 0,5g(x) - (0,5 + 0,25x - 0,5h(x))$$

$$\Leftrightarrow g'(x) - h'(x) = -0,5(g(x) - h(x))$$

$$\Leftrightarrow g' - h' = -0,5(g - h)$$

Donc g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E').

b) Les solutions de (E') sont $y : x \mapsto Ke^{-0,5x}$, K réel.

Donc g est une solution de (E) si et seulement si il existe un réel K tel que

$$g(x) - h(x) = Ke^{-0,5x} \Leftrightarrow g(x) = h(x) + Ke^{-0,5x}$$

$$= 0,5x + Ke^{-0,5x}$$

Les solutions de (E) sont donc $y : x \mapsto 0,5x + Ke^{-0,5x}$, K réel.

c) $f(x) = 0,5x + e^{-0,5x+0,4} = 0,5x + e^{0,4}e^{-0,5x}$
 $= 0,5x + Ke^{-0,5x}$ ou $K = e^{0,4}$

Donc f est bien une solution de (E).

La condition initiale est $f(0) = 0,5 \times 0 + e^{-0,5 \times 0 + 0,4} = e^{0,4}$.

C. 1. En A nous avons montré que f admet un minimum pour $x = 0,8$. Le coût total de fabrication est donc minimal pour 80 objets.

2. La recette est donnée par $x \mapsto 0,6x$

$$\text{donc } R(x) = 0,6x - f(x)$$

$$= 0,6x - (0,5x + e^{-0,5x+0,4})$$

$$= 0,1x - e^{-0,5x+0,4}$$

a) $R'(x) = 0,1 + 0,5e^{-0,5x+0,4} > 0$ pour tout $x \geq 0$.

Donc R est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

b) R est continue, car dérivable, et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

De plus 0 est compris entre $R(0) = -e^{0,4}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = +\infty$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, $R(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.

On a $3,12 < \alpha < 3,13$.

c) f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $f(\alpha) = 0$, donc $f(x) \geq 0$ pour $x \geq \alpha$, soit pour $x \geq 3,13$.

L'entreprise réalise donc un bénéfice à partir de 313 objets vendus.

2. Suites et probabilités

1. $p_2 = P(G_2) = P(G_1)P_{G_1}(G_2) + P(\overline{G_1})P_{\overline{G_1}}(G_2)$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$$

2. $p_{n+1} = P(G_{n+1}) = P(G_n)P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G_n})P_{\overline{G_n}}(G_{n+1})$

$$= p_n \times \frac{1}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$$

3. (p_n) semble tendre vers 0,4.

4. a) Pour tout entier n ,

$$u_n = p_n - \frac{2}{5} \text{ donc } p_n = u_n + \frac{2}{5}$$

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(u_n + \frac{2}{5}\right) + \frac{1}{10}$$

$$= -\frac{1}{4}u_n$$

donc (u_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.

b) $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$

Pour tout entier n , $u_n = u_1 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$,

donc $p_n = u_n + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c) $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.

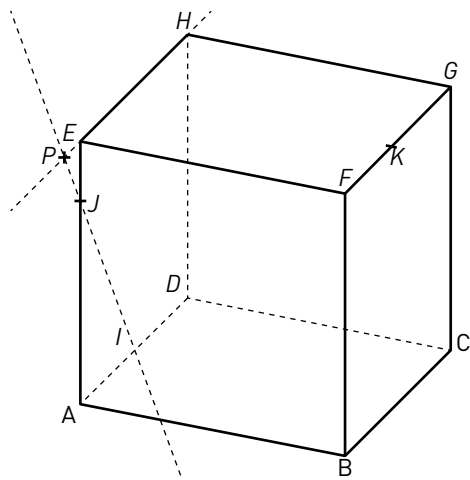
Par opérations, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{5} = 0,4$

(u_n) converge donc vers 0,4.

Après un grand nombre de parties, la probabilité que le joueur, ou la joueuse, gagne une partie est de 0,4.

3. Problème de géométrie repérée

A. 1.



2. K appartient aux plans (IJK) et (EFG) tandis que I appartient à (IJK) mais pas à (EFG). Les deux plans sont donc sécants en une droite contenant K.

P appartient à la droite (HE), incluse dans le plan (EFG), et à la droite (IJ), incluse dans le plan (IJK). P est donc un point de la droite d'intersection de (EFG) et (IJK) distinct de K.

(EFG) et (IJK) s'intersectent donc en la droite (PK).

B. 1. a) $I\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $J\left(0; 0; \frac{3}{4}\right)$ et $K\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$.

b) $\vec{IJ} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\vec{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{IK} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1 \times 4 + 0 \times a + 1 \times b = 0 \Leftrightarrow b = -4$$

$$\vec{IJ} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 0 \times 4 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times a + \frac{3}{4} \times (-4) = 0 \Leftrightarrow a = -6$$

c) $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$, deux vecteurs directeurs non colinéaires de (IJK), donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à (IJK).

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, \text{ (IJK) admet donc une équation de la forme}$$

$$4x - 6y - 4z + d = 0 \text{ (d réel).}$$

$$I \in \text{(IJK)} \Leftrightarrow 4 \times 0 - 6 \times \frac{1}{2} - 4 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3$$

Une équation cartésienne de (IJK) est donc $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.

3. a) $C(1; 1; 0)$ et $\vec{CG} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc (CG) : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \text{ (t réel)} \\ z = t \end{cases}$

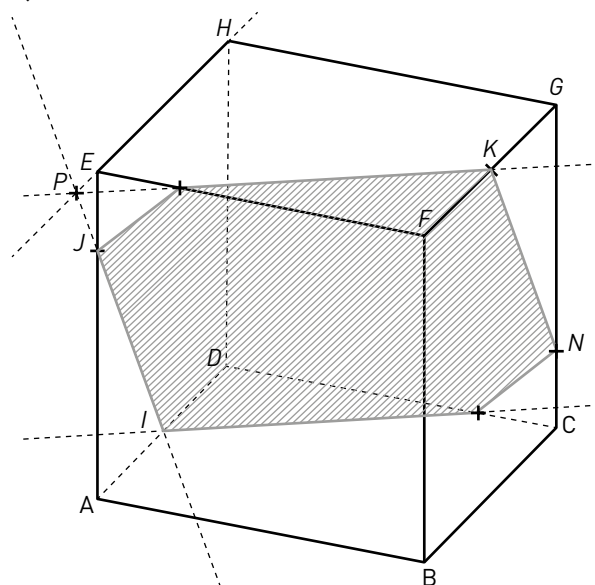
b)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \\ 4x - 6y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \\ 4 \times 1 - 6 \times 1 - 4t + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc $N\left(1; 1; \frac{1}{4}\right)$.

c)



C. (FR) est orthogonale au plan (IJK) donc $\vec{n}$, un vecteur normal à (IJK), est un vecteur directeur de (FR).

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } F(1; 0; 1) \text{ donc (FR) : } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 - 4t \end{cases} \quad (t \text{ réel}).$$

R est le point d'intersection de (FR) et (IJK)

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 - 4t \\ 4x - 6y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 - 4t \\ 4(1 + 4t) - 6(-6t) - 4(1 - 4t) + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{17} \\ y = \frac{9}{34} \\ z = \frac{20}{17} \\ t = -\frac{3}{68} \end{cases}$$

Donc $R\left(\frac{14}{17}; \frac{9}{34}; \frac{20}{17}\right)$.

$z_R > 1$ donc R n'est pas à l'intérieur du cube.

4. Probabilités

1. c)
2. b)
3. b)
4. a)
5. b) et c)
6. a) et b)
7. a)
8. c)

Sujet type C

p. 450

1. Équations différentielles

1. d)
2. c)
3. c)

2. Problème ouvert en probabilités

On peut considérer la variable aléatoire X donnant le nombre de fois où l'on devrait tomber sur une case noire quand on lance 100 fois une bille avec une roulette équilibrée.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = \frac{18}{37}$.

Un intervalle de fluctuation centré associé à X au seuil de 95 % est [39 ; 58]. Comme la boule est tombée 55 fois sur une case noire dans cette roulette, on peut penser qu'il n'y a pas de problème, au seuil de 95 %.

Remarque : On peut varier les valeurs des seuils.

3. Géométrie et modélisation

$$1. \begin{cases} 3 + t = 10k \\ 6t = 2 + 6k \\ -3t = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + \frac{4}{3}k = 10k \\ 6 \times \frac{4}{3}k = 2 + 6k \\ t = \frac{4}{3}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{9}{26} \\ k = 1 \\ t = \frac{4}{3}k \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc D_1 et D_2 ne s'intersectent pas.

Les deux espèces ne sont donc jamais amenées à se croiser.

2. a) Un vecteur directeur de D_1 est $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de D_2 est $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 1 \times 3 + 6 \times 13 + (-3) \times 27 = 0 \text{ et}$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 10 \times 3 + 6 \times 13 + (-4) \times 27 = 0$$

$\vec{n}$ est donc normal à D_1 et D_2 .

b) $\vec{HH'}$ est colinéaire à $\vec{n}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (HH').

$H \in D_1$ soit donc t réel tel que $H(3 + t; 6t; -3t)$.

$$\text{Alors (HH') : } \begin{cases} x = 3 + t + 3m \\ y = 6t + 13m \\ z = -3t + 27m \end{cases} \quad (m \text{ réel}).$$

$H' \in D_2$, soit donc k réel tel que $H'(10k; 2 + 6k; -4k)$.

$H' \in (HH')$, il existe donc un réel m tel que :

$$\begin{cases} 10k = 3 + t + 3m \\ 2 + 6k = 6t + 13m \\ -4k = -3t + 27m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10k - 3 - t = 3m \\ 2 + 6k - 6t = 13m \\ -4k + 3t = 27m \end{cases}$$

d'après le logiciel, on a $k = \frac{675}{1814}$ et $t = \frac{603}{907}$.

Donc

$$H\left(3 + \frac{603}{907}; 6 \times \frac{603}{907}; -3 \times \frac{603}{907}\right) = \left(\frac{3324}{907}; \frac{3618}{907}; -\frac{1809}{907}\right)$$

$$\text{et } H'\left(10 \times \frac{675}{1814}; 2 + 6 \times \frac{675}{1814}; -4 \times \frac{675}{1814}\right)$$

$$= \left(\frac{3375}{907}; \frac{3839}{907}; -\frac{1350}{907}\right)$$

$$\begin{aligned} HH' &= \sqrt{\left(\frac{3324}{907} - \frac{3375}{907}\right)^2 + \left(\frac{3618}{907} - \frac{3839}{907}\right)^2 + \left(\frac{-1809}{907} - \frac{-1350}{907}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{289}{907}} \approx 0,56 \end{aligned}$$

la distance minimale est d'environ 56 mètres.

3. a) $M \in D_1$, soit donc t réel tel que $M(3 + t; 6t; -3t)$.

$$\begin{aligned} BM &= \sqrt{[3 + t - 2]^2 + [6t - 4]^2 + [-3t - 0]^2} \\ &= \sqrt{46t^2 - 40t + 17} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } BM^2 = 46t^2 - 40t + 17.$$

La fonction $f : t \mapsto 46t^2 - 40t + 17$ est une fonction du second degré telle que $-\frac{b}{2a} = -\frac{-40}{46} = \frac{20}{23}$ et

$a = 46 > 0$, elle est donc décroissante sur $\left]-\infty; \frac{20}{23}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{20}{23}; +\infty\right[$. Elle admet donc un

minimum en $t = \frac{20}{23}$.

BM^2 et, par conséquent, BM sont donc minimales pour $t = \frac{20}{23}$.

$$\text{Donc } M\left(3 + \frac{20}{23}; 6 \times \frac{20}{23}; -3 \times \frac{20}{23}\right) = \left(\frac{89}{23}; \frac{120}{23}; -\frac{60}{23}\right).$$

b) D'après la question précédente, la distance BM

$$\text{minimale est } \sqrt{46 \times \left(\frac{20}{23}\right)^2 - 40 \times \frac{20}{23} + 17} = \sqrt{17} \approx 4,12.$$

La distance minimale entre la balise et les tortues vertes est donc de 412 mètres environ.

4. Suite et limite

A. 1. $f(x) = x \Leftrightarrow x - \ln(x^2 + 1) = x \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

L'ensemble des solutions est $\{0\}$.

$$\mathbf{2.} f'(x) = 1 - 2x \times \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1}.$$

$x^2 + 1 > 0$ et $(x - 1)^2$ pour tout réel x et $(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Donc f' est strictement positive pour tout $x \neq 1$ et nulle pour $x = 1$.

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par compo-

sition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ donc, par opérations, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

3. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de plus $f(0) = 0 - \ln(0^2 + 1) = 0$ et

$$f(1)(x) = 1 - \ln(1^2 + 1) = 1 - \ln(2) < 1.$$

Donc $0 \leq f(x) \leq 1$, soit $f(x) \in [0; 1]$, pour tout $x \in [0; 1]$.

4. a) Cet algorithme, pour une valeur entière ren-
trée dans A , renvoie le plus petit entier N tel que $f(N) \geq A$.

b) L'algorithme renvoie $N = 110$.

B. 1. Montrons par récurrence $P_n : \langle u_n \in [0; 1] \rangle$

Initialisation ($n = 0$) : $u_0 = 1 \in [0; 1]$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : si il existe un entier n tel que P_n est vraie, alors $u_n \in [0; 1]$.

Donc, d'après A3., $f(u_n) \in [0; 1]$.

$u_{n+1} = f(u_n)$ donc $u_{n+1} \in [0; 1] : P_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, P_n est vraie pour tout entier n .

2. Montrons par récurrence $P_n : \ll u_{n+1} < u_n \gg :$

Initialisation ($n = 0$) : $u_0 = 1$ et $u_1 = u_0 - \ln(u_0^2 + 1) = 1 - \ln(2) < 1$ donc $u_1 < u_0$: P_0 est vraie.

Hérédité : si il existe un entier n tel que P_n est vraie, alors $u_{n+1} < u_n$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $f(u_{n+1}) < f(u_n)$, soit $u_{n+2} < u_{n+1}$: P_{n+1} est vraie.

D'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, P_n est vraie pour tout entier n .

Donc, pour tout entier n , $u_{n+1} < u_n$.

Conclusion : (u_n) est strictement décroissante.

3. (u_n) est une suite strictement décroissante est minorée par 0, elle est donc convergente.

4. D'après **A.1.**, $f(\ell) = \ell$ a pour solution $\ell = 0$.

Sujet type D

p. 453

1. Suite récurrente d'ordre 2

A. 1. Il faut saisir « =5/4*B3-1/4*B2 ».

2.

n	u_n
0	3
1	6
2	6,75
3	6,938
4	6,984
5	6,996

3. (u_n) semble converger vers 7.

B. 1. a) Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4}u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est constante.

b) $v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 6 - \frac{1}{4} \times 3 = \frac{21}{4}$ donc $v_n = \frac{21}{4}$ pour tout entier n .

$$\text{Soit } u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{21}{4} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}.$$

1.a) Montrons par récurrence $P_n : \ll u_n < u_{n+1} < 15 \gg :$

Initialisation ($n = 0$) : $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et $3 < 6 < 15$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : si il existe un entier n tel que P_n est vraie, alors $u_n < u_{n+1} < 15$.

$$\text{Alors } \frac{1}{4}u_n < \frac{1}{4}u_{n+1} < \frac{15}{4}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} < \frac{1}{4}u_{n+1} + \frac{21}{4} < \frac{15}{4} + \frac{21}{4}$$

Soit $u_{n+1} < u_{n+2} < 9 < 15$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, P_n est vraie pour tout entier n .

b) Pour tout entier n :

• $u_{n+1} < u_n$ donc (u_n) est croissante ;

• $u_n < 15$ donc (u_n) est majorée ;

donc (u_n) est convergente.

3. a) Pour tout entier n ,

$$w_n = u_n - 7 \text{ donc } u_n = w_n + 7$$

$$w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 \\ &= \frac{1}{4}(w_n + 7) - \frac{7}{4} \\ &= \frac{1}{4}w_n \end{aligned}$$

donc (w_n) est géométrique de premier terme

$$w_0 = -4 \text{ et de raison } \frac{1}{4}.$$

b) Pour tout entier n ,

$$w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},$$

$$\text{donc } u_n = w_n + 7 = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

$$\text{c) } -1 < \frac{1}{4} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0.$$

Par opérations, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$.

2. Succession d'épreuves, loi binomiale

1. $\{C; P; N\}^5$

2. $0,15 \times 0,8^3 \times 0,05 = 0,003\ 84$

3. Géométrie

A. 1. a)

2. c)

B. 1. b)

2. c)

C. 1. b)

2. c)

4. Logarithme et géométrie

1. a) $f(x) = 1 \times (1 - \ln(x))^2 + x \times \left(-\frac{1}{x}\right) \times 2(1 - \ln(x))$
 $= 1 - 2\ln(x) + \ln(x)^2 - 2 + 2\ln(x)$
 $= \ln(x)^2 - 1$
 $= (\ln(x) - 1)(\ln(x) + 1)$

b) Pour $x \leq 1$, $\ln(x) \leq 0$ donc $\ln(x) - 1 < 0$.

$$\ln(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$$

f' est donc positive pour $x \in \left]0; \frac{1}{e}\right]$ et négative

pour $x \in \left[\frac{1}{e}; 1\right]$. f' est donc strictement croissante

sur $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$.

x	0	$\frac{1}{e}$	1
Variations de f		$\frac{4}{e}$	

2. a) Graphiquement, l'aire du triangle vaut approximativement 0,625 u.a.

b) $g'(x) = \frac{1}{x}$ donc $g'(0,2) = \frac{1}{0,2} = 5$

$g(0,2) = \ln(0,2) = -\ln(5)$

Donc une équation de $d_{0,2}$ est :

$$\begin{aligned} y &= g'(0,2)(x - 0,2) + g(0,2) \\ &= 5(x - 0,2) - \ln(5) \\ &= 5x - 1 - \ln(5) \end{aligned}$$

c) $5x - 1 - \ln(5) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \ln(5)}{5}$ donc

$N_{0,2}\left(\frac{1 + \ln(5)}{2}; 0\right)$, donc $ON_{0,2} = \frac{1 + \ln(5)}{5}$

$5 \times 0 - 1 - \ln(5) = -1 - \ln(5)$ donc $P_{0,2}(0; -1 - \ln(5))$, donc

$OP_{0,2} = 0 - (-1 - \ln(5)) = 1 + \ln(5)$.

L'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$, rectangle en O est

$$\frac{OP_{0,2} \times ON_{0,2}}{2} = \frac{(1 + \ln(5)) \times \frac{1 + \ln(5)}{5}}{2} = \frac{(1 + \ln(5))^2}{10} \text{ u.a.}$$

3. $A(a) = \frac{1}{2}a(1 - \ln(a))^2 = \frac{1}{2}f(a)$

Or, d'après le tableau de variations de la question

1. b), f admet un maximum pour $a = \frac{1}{e}$.

Donc l'aire $A(a)$ est maximale pour $a = \frac{1}{e}$.

$$A\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{e} = \frac{2}{e}$$

5. Équations différentielles, résistance et condensateur

1. a) $E = 10 \text{ V}$ et $RC = 10^5 \times 10^{-6} = 0,1$

$$\begin{aligned} RCu' + u &= E \Leftrightarrow 0,1u' + u = 10 \Leftrightarrow 10(0,1u' + u) = 10 \times 10 \\ &\Leftrightarrow u' + 10u = 100 \end{aligned}$$

b) $g: t \mapsto 10$ est une solution particulière de l'équation.

u est une solution de l'équation différentielle si et seulement si $u - g$ est une solution de $y' + 10y = 0 \Leftrightarrow y = -10y$.

Cette équation a pour solutions $y: t \mapsto Ke^{-10t}$, K réel. Donc les solutions de l'équation différentielle sont $u: t \mapsto 10 + Ke^{-10t}$, K réel.

b) $u(0) = 0 \Leftrightarrow 10 + Ke^{-10 \times 0} = 0 \Leftrightarrow 10 + K = 0 \Leftrightarrow K = -10$

Donc $u(t) = 10 - 10e^{-10t}$.

c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} -10t = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$ donc, par composition,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-10t} = 0.$$

Par opérations, $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 10$.

À terme, la tension dans le condensateur sera proche de 10 V.

3. a) $0,95 \times 10 = 9,5$ donc, graphiquement, le temps de charge est $T \approx 0,3$ s.

b) $u(t) = 9,5 \Leftrightarrow 10 - 10e^{-10t} = 9,5$

$$\Leftrightarrow e^{-10t} = 0,05$$

$$\Leftrightarrow -10t = \ln(0,05)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(0,05)}{-10} = \frac{\ln(20)}{10} \approx 0,3$$

Donc $T \approx 0,3$ s.

4. u est solution de l'équation différentielle

$$R \times 10^{-6} u' + u = 10 \Leftrightarrow u' + \frac{10^6}{R} u = \frac{10^7}{R}$$

$g: t \mapsto 10$ est une solution particulière de cette équation.

u est solution de l'équation différentielle si et seulement si $u - g$ est solution de l'équation

$$u' + \frac{10^6}{R} u = 0 \Leftrightarrow u' = -\frac{10^6}{R} u.$$

Cette équation a pour solutions $y: t \mapsto Ke^{-\frac{10^6}{R}t}$, K réel.

Donc les solutions de l'équation différentielle sont

$$u: t \mapsto 10 + Ke^{-\frac{10^6}{R}t}, K \text{ réel.}$$

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow 10 - Ke^{-\frac{10^6}{R} \times 0} = 0 \Leftrightarrow 10 + K = 0 \Leftrightarrow K = -10$$

$$\text{Donc } u: t \mapsto 10 - 10e^{-\frac{10^6}{R}t}.$$

On cherche R tel que $u(2 \times \frac{\ln(20)}{10}) = 9,5$.

$$u(2 \times \frac{\ln(20)}{10}) = 9,5 \Leftrightarrow 10 - 10e^{-\frac{10^6}{R} \times 2 \times \frac{\ln(20)}{10}} = 9,5$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{10^6}{R} \times 2 \times \frac{\ln(20)}{10}} = 0,05$$

$$\Leftrightarrow -\frac{10^6}{R} \times 2 \times \frac{\ln(20)}{10} = \ln(0,05) = -\ln(20)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R} = 5 \times 10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{1}{5 \times 10^{-6}} = 2 \times 10^5$$

Donc $R = 2 \times 10^5$ V.

Sujet type E

p. 456

1. Suite

1. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Par différence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + \sqrt{n}) = +\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ Par différence, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - 3 \right) = -3.$$

Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

c) $w_n = n^2 - n^3 = n^2(1 - n)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ Par différence, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - n) = -\infty$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$.

d) $a_n = \frac{n+3}{2n+4} = \frac{n \left(1 + \frac{3}{n} \right)}{n \left(2 + \frac{4}{n} \right)} = \frac{1 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{4}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0 \text{ Par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0 \text{ Par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{4}{n} \right) = 2.$$

Par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

2. a) Montrons par récurrence $P_n: \ll b_n \geq \sqrt{n} \gg$.

Initialisation ($n = 0$) : $b_0 = 0$ et $\sqrt{0} = 0$ donc $b_0 \geq \sqrt{0}$: P_0 est vraie.

Hérédité : si il existe un entier n tel que P_n est vraie, alors $b_n \geq \sqrt{n}$.

$$\text{Alors } b_n^2 + 2 \geq n + 2$$

$$\text{Donc } \sqrt{b_n^2 + 2} \geq \sqrt{n + 2}$$

$$\text{Or } n + 2 \geq n \text{ donc } \sqrt{n + 2} \geq \sqrt{n}.$$

Soit $b_{n+1} \geq \sqrt{n}$ donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, P_n est vraie pour tout entier n .

b) Pour tout entier n , $b_n \geq \sqrt{n}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
 Donc, d'après le théorème de comparaison,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$.

c)

n	0	1	2	3	4
b_n	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{8}$

On peut émettre la conjecture suivante ; $b_n = \sqrt{2n}$
 pour tout entier n .

d) Soit (x_n) définie par $x_n = \sqrt{2n}$ pour tout entier n .
 $x_0 = \sqrt{2 \times 0} = 0$ et, pour tout entier n ,
 $x_{n+1} = \sqrt{2(n+1)} = \sqrt{2n+2} = \sqrt{x_n^2 + 2}$
 $= \sqrt{x_n^2 + 2}$

(x_n) a donc le même terme initial et la même
 expression par récurrence que (b_n) .

Donc, pour tout entier n , $b_n = x_n = \sqrt{2n}$.

2. Loi binomiale et variable aléatoire

1. a) On a :

x_i	-2,5	2	10
$p(X = x_i)$	0,65	0,25	0,1

b) • $E(X) = 0,65 \times (-2,5) + 0,25 \times 2 + 0,1 \times 10$
 $= -0,125$.

• $V(X) = 0,65 \times (-2,5 - (-0,125))^2 +$
 $0,25 \times (2 - (-0,125))^2 + 0,1 \times (10 - (-0,125))^2$
 $= 15,046875$.

2.

```

def jeu()
    a = random.random()
    if a <= 0.1 :
        r = 10
    if a > 0.1 and a <= 0.35 :
        r = 2
    if a > 0.35 :
        r = -2.5
    return r
  
```

3. a) La variable aléatoire S donne son gain total
 sur les n parties.

b) $E(S) = nE(X_i) = -0,125n$

c) On résout : $E(S) < -10 \Leftrightarrow -0,125n < -10$
 $\Leftrightarrow n > 80$.

Elle perd donc en moyenne plus de 10 euros si elle
 joue à chaque fois plus de 80 parties.

4. $Y = 3X$ donc $E(Y) = 3E(X) = -0,375$.

Cela veut dire que sur un grand nombre de
 joueur, chacun perd en moyenne environ 0,375 €
 donc sur 2 000 joueurs, Oscar gagne environ
 $2\,000 \times 0,375 = 750$ €.

3. Géométrie repérée

1. On a ABCDEFGH un cube, donc les plans (ABC)
 et (EFG) sont parallèles.

Or le plan (SBD) intersecte le plan (ABC) en la
 droite (LM) et le plan (ABC) en la droite (BD).

Donc (LM) et (BD) sont parallèles.

2. On a $F(6 ; 0 ; 6)$ et $E(0 ; 0 ; 6)$, soit $L(x ; y ; z)$.

Alors $\overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FL} \begin{pmatrix} x-6 \\ y \\ z-6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{FL} = \frac{2}{3} \overrightarrow{FE} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-6 \\ y \\ z-6 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-6 = -4 \\ y = 0 \\ z-6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc $L(2 ; 0 ; 6)$.

3. a) $B(6 ; 0 ; 0)$ donc $\overrightarrow{BL} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc

$$(BL) : \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases} \quad (t \text{ réel}).$$

b) Pour $t = \frac{3}{2}$ on a $\begin{cases} x = 6 - 4 \times \frac{3}{2} = 0 \\ y = 0 \\ z = 6 \times \frac{3}{2} = 9 \end{cases}$ donc le point de

coordonnées $(0 ; 0 ; 9)$ est sur (BL).

De plus, ce point a une abscisse et une ordonnée
 nulles, donc est sur l'axe (AK).

Ce point est donc le point d'intersection de (BJ) et
 (AK), soit S. Donc $S(0 ; 0 ; 9)$.

4.a) On a $B(6 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 6 ; 0)$ et $L(2 ; 0 ; 6)$,

$$\text{donc } \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BL} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \vec{n} = -6 \times 3 + 6 \times 3 + 0 \times 2 = 0 \text{ et}$$

$$\overrightarrow{BL} \cdot \vec{n} = -4 \times 3 + 0 \times 3 + 6 \times 2 = 0.$$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (BDL), donc $\vec{n}$ est orthogonal à (BDL).

b) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est orthogonal à (BDL), donc (BDL) a une

équation cartésienne de la forme $3x + 3y + 2z + d = 0$ (d réel).

$$B \in (\text{BDL}) \Leftrightarrow 3 \times 6 + 3 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -18$$

Donc une équation cartésienne de (BDL) est $3x + 3y + 2z - 18 = 0$.

c) M est le point d'intersection de (BDL) et (EH).

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \\ 3x + 3y + 2z - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 6 \\ 3 \times 0 + 3s + 2 \times 6 - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 6 \\ s = 2 \end{cases}$$

Donc $M(0 ; 2 ; 6)$.

5. SELM a pour base le triangle ELM, rectangle en E, et pour hauteur [SE].

$$\text{Donc } A(\text{SELM}) = \frac{1}{3} A(\text{ELM}) \times SE = \frac{1}{3} \times \frac{EL \times EM}{2} \times SE$$

$E(0 ; 0 ; 6)$, $L(0 ; 0 ; 9)$, $S(0 ; 0 ; 9)$ et $M(0 ; 2 ; 6)$ donc :

$$EL = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2 + (6-2)^2} = 2$$

$$EM = \sqrt{(0-0)^2 + (2-0)^2 + (6-6)^2} = 2$$

$$SE = \sqrt{(0-0)^2 + (0-0)^2 + (9-6)^2} = 3$$

$$\text{Donc } A(\text{SELM}) = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times 3 = 2 \text{ m}^2.$$

5. Le triangle SLE est rectangle en E donc

$$\cos(\widehat{SLE}) = \frac{LE}{SL}.$$

$$\text{Or } SL = \sqrt{(2-0)^2 + (0-0)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{13} \text{ et } LE = 2$$

$$\text{donc } \cos(\widehat{SLE}) = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

$$\widehat{SLE} = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \approx 56^\circ \text{ est bien compris entre } 55^\circ$$

et 60° . La contrainte est respectée.

4. Logarithme et suite

A. 1. $f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \ln\left(\frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0. \text{ Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{1}{x} = 3 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

$$\text{Par quotient } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3. \text{ Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln(3).$$

$\mathcal{C}_f$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = \ln(3)$

2. a) $f'(x) = \frac{3(x+1) - 1(3x+1)}{(x+1)^2} \times \frac{1}{\frac{3x+1}{x+1}}$

$$= \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{3x+1} = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

b) Pour $x \geq 0$, on a $x+1 \geq 1 > 0$ et $3x+1 \geq 1 > 0$.

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)} > 0 \text{ pour } x \geq 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

B. 1. Montrons par récurrence P_n : « $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ » :

Initialisation ($n = 0$) : $u_0 = 3$,

$$u_1 = \ln\left(\frac{3u_0+1}{u_0+1}\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0,9 \text{ et } \frac{1}{2} \leq \ln\left(\frac{5}{2}\right) \leq 3 \text{ donc}$$

P_0 est vraie.

Hérédité : Si il existe un entier n tel que P_n est

vraie, alors $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ donc
 $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3 \times \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 1}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) > \frac{1}{2} \text{ donc } \frac{1}{2} \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} :$$

P_{n+1} est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence sur $\mathbb{N}$, P_n est vraie pour tout entier n .

2. Pour tout entier n :

- $u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) est décroissante.
- $u_n \geq \frac{1}{2}$ donc (u_n) est minorée.

Donc (u_n) est convergente.

C. 1. g est continue, car dérivable, et strictement croissante sur $[x_0; +\infty[$, de plus 0 est compris entre $g(x_0) \approx 0,088$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[x_0; +\infty[$.

$g(x) > 0$ pour tout $x \in]0; x_0]$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0; x_0]$.

Donc l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $]0; +\infty[$.

2. a)

```

x ← 0,22
Tant que  $\ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right) - x > 0$  faire
    x ← x + 0.001
Fin Tant que
    
```

b) La dernière valeur prise par x est 0,523.

3. On a $g(x) = 0$ pour $x \approx 0,52$.

Or $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.

Donc la solution approchée de $f(x) = x$ est 0,52.

Donc, à 0,01 près, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n \approx 0,52$.