

MATHS

T

le

COMPLÉMENTAIRES

Auteurs

Delphine ARNAUD

Thibault FOURNET-FAYAS

Muriel GOARIN

Hélène GRINGOZ

François GUIADER

Marie HASCOËT

Didier KRIEGER

Christine LADEIRA

Laura MAGANA

Paul MILAN

Frédéric WEYERMANN

Livre

du professeur

MAGNARD

Édition : Marilyn MAISONGROSSE assistée de Anne LANFRANCHI
Responsable éditorial : Adrien FUCHS
Maquette de couverture : Primo&Primo
Mise en pages et schémas : Nord-compo

Aux termes du Code de la propriété intellectuelle, toute reproduction ou représentation, intégrale ou partielle de la présente publication, faite par quelque procédé que ce soit (reprographie, microfilmage, scannérisation, numérisation...), sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

L'autorisation d'effectuer des reproductions par reprographie doit être obtenue auprès du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC), 20, rue des Grands-Augustins-75006 Paris-Tel. : 01 44 07 47 70.

© Magnard – Paris, 2020 – 5, allée de la 2^e D.B. – 75015 Paris – www.magnard.fr – ISBN : 978-2-210-11425-8

SOMMAIRE

CHAPITRE 1	Suites et modèles discrets	5
CHAPITRE 2	Limites et continuité	29
CHAPITRE 3	Convexité	45
CHAPITRE 4	Fonction logarithme népérien	59
CHAPITRE 5	Primitives et équations différentielles	85
CHAPITRE 6	Calcul intégral	101
CHAPITRE 7	Lois discrètes	115
CHAPITRE 8	Lois de probabilité à densité	135
CHAPITRE 9	Statistiques à deux variables	153
THÈME 1	Modèles définis par une fonction d'une variable	169
THÈME 2	Modèles d'évolution	173
THÈME 3	Approche historique de la fonction logarithme	181
THÈME 4	Calculs d'aires	187
THÈME 5	Répartition des richesses, inégalités	193
THÈME 6	Inférence bayésienne	197
THÈME 7	Répétitions d'expériences indépendantes, échantillonnage	201
THÈME 8	Temps d'attente	207
THÈME 9	Corrélation et causalité	213

CHAPITRE 1 Suites et modèles discrets

Manuel p. 14-39

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre permet de consolider et enrichir les connaissances sur les suites vues en classe de Première. Nous étudierons en particulier deux notions sur les suites : la limite d'une suite et les suites arithmético-géométriques.

Pour cela, dans un premier temps, nous ferons une approche intuitive de la limite d'une suite, et nous verrons des méthodes pour déterminer la limite d'une suite : opérations sur les limites, théorème de comparaison, théorème des gendarmes...

Dans un second temps, nous étudierons deux cas particuliers de suites :

– les suites géométriques (déjà vues en classe de Première). Ici nous étudierons comment déterminer la limite d'une suite géométrique (de raison positive) et la limite de la somme des termes d'une suite géométrique (de raison positive strictement inférieure à 1).

– les suites arithmético-géométriques.

Objectifs

- Modéliser un problème par une suite
- Représenter graphiquement une suite
- Déterminer la limite d'une suite en utilisant les opérations sur les limites ou en levant une forme indéterminée
- Déterminer la limite d'une suite en utilisant le théorème de comparaison ou le théorème des gendarmes
- Calculer une limite de suite géométrique et de la somme des termes d'une suite géométrique
- Étudier une suite arithmético-géométrique

II. Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 15

1. Utiliser des pourcentages

$$1. 30 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 33.$$

Le nouveau prix de l'article est 33 €.

$$2. \frac{4\,025 - 3\,500}{3\,500} \times 100 = 15.$$

Donc le nombre d'habitants a augmenté de 15 % entre 2020 et 2021.

2. Calculer les termes d'une suite définie par une formule explicite

$$1. a) u_0 = 3^0 - 1 = 0$$

$$b) u_5 = 3^5 - 1 = 242$$

$$2. a) v_0 = \frac{0+5}{0+1} = 5$$

$$b) v_{10} = \frac{10+5}{10+1} = \frac{15}{11}$$

3. Calculer les termes d'une suite définie par une formule de récurrence

$$1. u_0 = 3$$

$$u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

$$u_3 = 2u_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$$

$$2. v_0 = -2$$

$$v_1 = v_0 + 0 = -2$$

$$v_2 = v_1 + 1 = -2 + 1 = -1$$

$$v_3 = v_2 + 2 = -1 + 2 = 1$$

4. Utiliser les suites arithmétiques

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + (-3)$.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -3$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + n \times r$

$$u_n = 5 - 3n$$

c) $u_{10} = 5 - 3 \times 10 = -25$

5. Utiliser les suites géométriques

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2 \times v_n$.

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

$$v_n = 3 \times 2^{n-1}$$

c) $v_{10} = 3 \times 2^{10-1} = 1\,536$

6. Calculer des sommes

1. a) $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \frac{50 \times 51}{2}$
 $= 1\,275$

b) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{12} = \frac{1 - 2^{13}}{1 - 2}$
 $= 8\,191$

2. $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_9$
 $= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^9$
 $= u_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^9)$
 $= u_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q}$
 $= 2 \times \frac{1 - (-3)^{10}}{1 - (-3)}$
 $= -29\,524$

A ► Première étude de cas

1. $30\,000 \times \frac{90}{100} + 10\,000 = 37\,000$

Donc en 2021, il y aura 37 000 abonnés.

$37\,000 \times \frac{90}{100} + 10\,000 = 43\,300$

Donc en 2022, il y aura 43 300 abonnés.

2. a) $u_0 = 30$

$$u_1 = 37$$

$$u_2 = 43,3$$

b) On a $u_0 = 30$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 10$

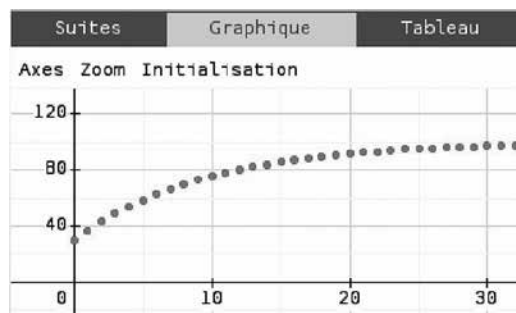
$$u_{20} \approx 91,490$$

$$u_{30} \approx 97,033$$

$$u_{40} \approx 98,965$$

$$u_{50} \approx 99,639$$

c)



d) Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, les termes u_n semblent se rapprocher de la valeur 100.

B ► Deuxième étude de cas

1. $100 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 110$

Donc en 2021, il y aura 110 singes.

$110 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 121$

Donc en 2022, il y aura 121 singes.

2. a) $v_0 = 100$

$$v_1 = 110$$

$$v_2 = 121$$

b) On a $v_0 = 100$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1,1v_n$

$$v_{20} \approx 673$$

$$v_{30} \approx 1\,745$$

$$v_{40} \approx 4\,526$$

$$v_{50} \approx 11\,739$$

Activités

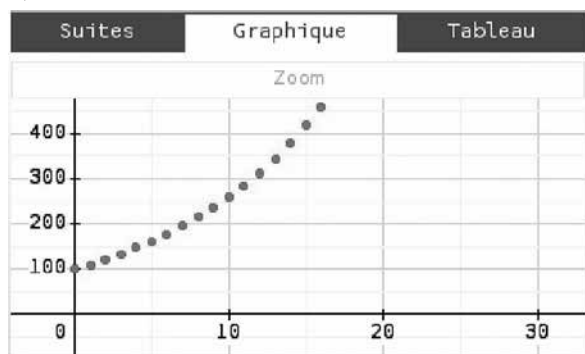
p. 16-17

1. Introduire la notion de limite d'une suite – (Thème 2)

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Introduire la notion de limite d'une suite (suite ayant pour limite un nombre réel, suite ayant pour limite l'infini).

c)



d) Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, les termes u_n deviennent de plus en plus grands.

3. Une telle évolution est impossible.

La population sera confrontée à des problèmes de places ou de ressources.

2. Découvrir des propriétés sur les limites

• **Durée estimée :** 20 min

• **Objectif :** Découvrir des propriétés sur les limites (théorème de comparaison et théorème des gendarmes) à l'aide d'une approche graphique.

A ► Théorème de comparaison

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

B ► Théorème des gendarmes

1. $w_1 = \frac{(-1)^1}{1} = -1$

$w_2 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$

$w_3 = \frac{(-1)^3}{3} = -\frac{1}{3}$

$w_4 = \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4}$

$w_5 = \frac{(-1)^5}{5} = -\frac{1}{5}$

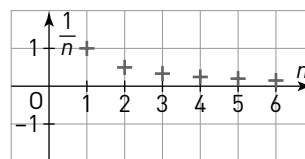
2. Pour tout entier $n \geq 1$,

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$

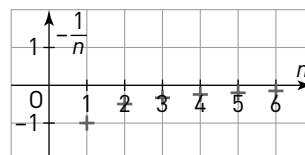
Donc $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ car $n > 0$

Donc $-\frac{1}{n} \leq w_n \leq \frac{1}{n}$

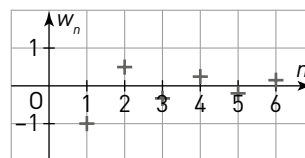
3. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ est représentée ci-dessous :



La suite $\left(-\frac{1}{n}\right)$ est représentée ci-dessous :



La suite (w_n) est représentée ci-dessous :



4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$

5. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

3. Étudier des suites géométriques

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** À l'aide d'une modélisation sur un tableur, essayer de conjecturer la limite d'une suite géométrique et de la somme des termes d'une suite géométrique.

1. $u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$u_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$

$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

Donc $u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Donc $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3. $S_1 = u_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = u_1 + u_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

4. a)

	A	B	C
1	Jour	u_n	S_n
2	1	0,5	0,5
3	2		

b) Dans la cellule B3, il faut rentrer $=1/2*B2$

Dans la cellule C3, il faut rentrer $=C2+B3$

c) Voir le tableur.

d) Pour des grandes valeurs de n , les termes u_n semblent se rapprocher de 0, et les termes S_n semblent se rapprocher de 1.

$$\frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Donc les termes S_n semblent se rapprocher de

$$\frac{u_1}{1-q}$$

e) Donc Diane ne peut pas donner du fromage à sa sœur sans être lésée, car il semble que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

4. Découvrir les suites arithmético-géométriques – (Thème 2)

• **Durée estimée** : 30 min

• **Objectif** : Découvrir les suites arithmético-géométriques en partant d'un exemple concret.

1. $500 \times \frac{80}{100} + 200 = 600$

Donc en 2021, il y aura 600 abonnés.

$600 \times \frac{80}{100} + 200 = 680$

Donc en 2022, il y aura 680 abonnés.

2. a) $u_0 = 500$, $u_1 = 600$ et $u_2 = 680$

b) Chaque année, 80 % des abonnés se réabonnent, et il y a 200 nouveaux abonnés. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{80}{100}u_n + 200 = 0,8u_n + 200$$

c) $u_1 - u_0 = 100$ et $u_2 - u_1 = 80$

Donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.

Donc la suite n'est pas arithmétique.

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{6}{5} \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{17}{15}$$

Donc $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

Donc la suite n'est pas géométrique.

3. $x = 0,8x + 200 \Leftrightarrow 0,2x = 200$

$$\Leftrightarrow x = \frac{200}{0,2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1\,000$$

Donc $x_0 = 1\,000$

4. Soit (v_n) la suite définie par :

$$v_n = u_n - 1\,000$$

a) $v_0 = 500 - 1\,000 = -500$

$v_1 = 600 - 1\,000 = -400$

$v_2 = 680 - 1\,000 = -320$

b) $\frac{v_1}{v_0} = \frac{4}{5}$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{5}$.

Donc la suite (v_n) semble géométrique de raison $\frac{4}{5}$ soit 0,8.

5. a) Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1\,000 \\ &= 0,8u_n + 200 - 1\,000 \\ &= 0,8u_n - 800 \end{aligned}$$

Or $v_n = u_n - 1\,000$, donc :

$$u_n = v_n + 1\,000$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } v_{n+1} &= 0,8 \times (v_n + 1\,000) - 800 \\ &= 0,8v_n + 800 - 800 \\ &= 0,8v_n \end{aligned}$$

b) Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$.

c) Pour tout entier naturel n ,

$$v_n = v_0 \times q^n, \text{ donc } v_n = -500 \times 0,8^n.$$

Or $v_n = u_n - 1\,000$, donc

$$u_n = v_n + 1\,000.$$

$$\text{Donc } u_n = -500 \times 0,8^n + 1\,000$$

6. $2\,050 = 2\,020 + 30$

Or $u_{30} = -500 \times 0,8^{30} + 1\,000$

$$u_{30} \approx 999$$

Donc en 2050, il y aura environ 999 abonnés.

À vous de jouer !

p. 19-27

1. On note u_n la distance parcourue par Nawal n jours après le premier jour d'entraînement.

$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

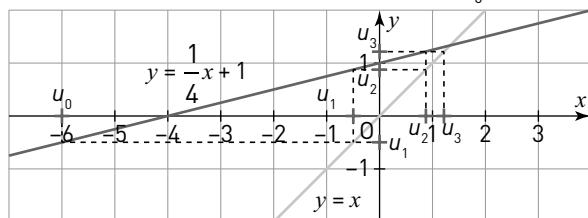
$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1,1u_n$$

2. On note u_n la somme disponible sur le compte le 1^{er} janvier 2020+n.

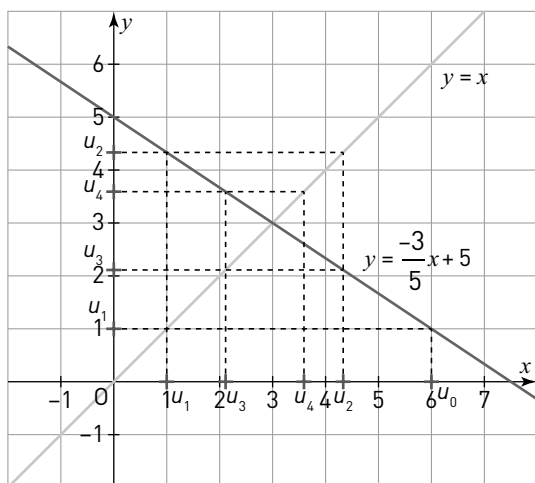
$u_0 = 5\,000$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (u_n + 2\,000) \times \left(1 + \frac{2}{100}\right) \\ &= 1,02u_n + 2\,040. \end{aligned}$$

3. Attention : dans l'énoncé il faut lire $u_0 = -6$



4.



5. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (par somme)

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (par produit et somme)

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -5 = -5$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - 5 = +\infty$ (par produit et somme)

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n - 5} = 0$ (par quotient).

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ (par produit)

6. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -10 = -10$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 10\right) = -10$ (par somme)

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n}\right) = 0$ (par produit)

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 = 3$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ (par somme)

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{1 + \frac{1}{n}}\right) = 3$ (par quotient)

7. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n^2 = +\infty$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $-\infty + \infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2(-n + 2)$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n + 2 = -\infty$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ (par produit).

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

Donc on a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ ».

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^2 \left(1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} = 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ (par produit).

8. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n \times \left(3 + \frac{1}{n}\right)}{n \times \left(5 - \frac{2}{n}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{5 - \frac{2}{n}}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{5}$$

b) Pour tout entier $n \geq 2$,

$$v_n = \frac{n \times (2)}{n^2 \times \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)} = \frac{2}{n \times \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = -1$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \times \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) = -\infty$$

$$\text{Donc, } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

9. a). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

$$\text{Donc } n^2 - 5 \leq u_n \leq n^2 + 5.$$

$$\text{Donc } u_n \geq n^2 - 5.$$

$$\text{b). } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 5 = +\infty.$$

D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

10. a). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(2n) \leq 1$.

$$\text{Donc } -\sqrt{n} - 1 \leq v_n \leq -\sqrt{n} + 1.$$

$$\text{Donc } v_n \leq -\sqrt{n} + 1.$$

$$\text{2. } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\sqrt{n} + 1 = -\infty.$$

D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$.

$$\text{Donc } -5 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq -5 + \frac{1}{n}.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -5 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -5 + \frac{1}{n} = -5.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -5$.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

$$\text{Donc } 42 - \frac{5}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq 42 + \frac{5}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 42 - \frac{5}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 42 + \frac{5}{\sqrt{n}} = 42.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 42$.

13. a) $0 < 0,6 < 1$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

b) (u_n) est une suite géométrique de raison $3 > 1$ et de premier terme $u_0 = -4$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

14. 1. (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= u_1 + u_1 \times q + \dots + u_1 \times q^{n-1} \\ &= u_1 \times (1 + q + \dots + q^{n-1}) \\ &= u_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \\ &= 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} \\ &= 5 \times \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \end{aligned}$$

$$\text{2. } 0 < \frac{1}{5} < 1. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 5.$$

$$\text{15. } x = 2x + 5 \Leftrightarrow -x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = -5$$

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_n = u_n - (-5) = u_n + 5.$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} + 5 \\ &= 2u_n + 5 + 5 \\ &= 2(u_n + 5) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 5 = 3$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 \times 2^n$.

Or $v_n = u_n + 5$, donc $u_n = v_n - 5$.

Donc $u_n = 3 \times 2^n - 5$.

$$16. x = -4x + 10 \Leftrightarrow 5x = 10$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = v_n - 2$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= v_{n+1} - 2 \\ &= -4v_n + 10 - 2 \\ &= -4v_n + 8 \\ &= -4(v_n - 2) \\ &= -4w_n \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison -4 et de premier terme $w_0 = v_0 - 2 = 5$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 5 \times (-4)^n$.

Or $w_n = v_n - 2$, donc $v_n = w_n + 2$.

Donc $v_n = 5 \times (-4)^n + 2$.

$$17. 1. x = 3x + 8 \Leftrightarrow -2x = 8$$

$$\Leftrightarrow x = -4$$

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_n = u_n - (-4) = u_n + 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} + 4 \\ &= 3u_n + 8 + 4 \\ &= 3u_n + 12 \\ &= 3(u_n + 4) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 + 4 = 2$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2 \times 3^n$.

Or $v_n = u_n + 4$, donc $u_n = v_n - 4$.

Donc $u_n = 2 \times 3^n - 4$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 \times 3^{n+1} - 4 - (2 \times 3^n - 4) \\ &= 2 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n \\ &= 2 \times 3^n \times (3 - 1) \\ &= 2 \times 3^n \times 2 \\ &= 4 \times 3^n \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

$$18. 1. X = 0,6x + 2 \Leftrightarrow 0,4x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Soit (w_n) la suite définie par

$$w_n = v_n - 5.$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= v_{n+1} - 5 \\ &= 0,6v_n + 2 - 5 \\ &= 0,6v_n - 3 \\ &= 0,6(v_n - 5) \\ &= 0,6w_n \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,6 et de premier terme $w_0 = v_0 - 5 = 2$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2 \times 0,6^n$.

Or $w_n = v_n - 5$, donc $v_n = w_n + 5$.

Donc $v_n = 2 \times 0,6^n + 5$.

$$\begin{aligned} 2. S_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} \\ &= (2 \times 0,6^0 + 5) + (2 \times 0,6^1 + 5) \\ &\quad + \dots + (2 \times 0,6^{n-1} + 5) \\ &= 5 \times n + 2 \times (0,6^0 + 0,6^1 + \dots + 0,6^{n-1}) \\ &= 5 \times n + 2 \times \frac{1 - 0,6^n}{1 - 0,6} \\ &= 5 \times n + 5 \times (1 - 0,6^n) \end{aligned}$$

Or $0 < 0,6 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,6^n = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

19. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 5\,000$.

2. Chaque année, 60 % des abonnés se réinscrivent, et 10 % des personnes non abonnées s'abonnent.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,6u_n + 0,1v_n$

3. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,6u_n + 0,1(5\,000 - u_n) \\ &= 0,6u_n + 500 - 0,1u_n \\ &= 0,5u_n + 500 \end{aligned}$$

$$4. x = 0,5x + 500 \Leftrightarrow 0,5x = 500$$

$$\Leftrightarrow x = 1\,000$$

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 1\,000$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - 1\,000 \\ &= 0,5u_n + 500 - 1\,000 \\ &= 0,5u_n - 500 \\ &= 0,5(u_n - 1\,000) \\ &= 0,5w_n \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $w_0 = u_0 - 1\,000 = -400$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -400 \times 0,5^n$.

Or $w_n = u_n - 1\,000$, donc $u_n = w_n + 1\,000$.

Donc $u_n = -400 \times 0,5^n + 1\,000$.

20. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 10\,000$.

2. Chaque année, 80 % des abonnés de *RougeTel* se réabonnent à *RougeTel* et 30 % des abonnés de *BleuMobile* partent chez *RougeTel*.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,8u_n + 0,3v_n$.

3. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,8u_n + 0,3(10\,000 - u_n) \\ &= 0,8u_n + 3\,000 - 0,3u_n \\ &= 0,5u_n + 3\,000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{4. } x &= 0,5x + 3\,000 \Leftrightarrow 0,5x = 3\,000 \\ &\Leftrightarrow x = 6\,000 \end{aligned}$$

Soit (w_n) la suite définie par

$$w_n = u_n - 6\,000.$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - 6\,000 \\ &= 0,5u_n + 3\,000 - 6\,000 \\ &= 0,5u_n - 3\,000 \\ &= 0,5(u_n - 6\,000) \\ &= 0,5w_n \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $w_0 = u_0 - 6\,000 = -4\,000$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -4\,000 \times 0,5^n$.

Or $w_n = u_n - 6\,000$, donc $u_n = w_n + 6\,000$.

Donc $u_n = -4\,000 \times 0,5^n + 6\,000$.

Et $v_n = 10\,000 - u_n = 4\,000 + 4\,000 \times 0,5^n$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= 3u_n - 8 - 4 \\ &= 3u_n - 12 \\ &= 3(u_n - 4) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = 1$.

Exercices

calculs et automatismes

p. 29

21. Calculer les termes d'une suite

1. a) $u_0 = 3 \times 0 - 5 = -5$

b) $u_{10} = 3 \times 10 - 5 = 25$

2. a) $v_0 = 3$

$v_1 = 2 \times v_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

$v_2 = 2 \times v_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$

22. Calculer les termes d'une suite géométrique

a) $u_1 = u_0 \times 2 = 3 \times 2 = 6$

b) $u_4 = u_0 \times 2^4 = 3 \times 2^4 = 48$

23. Calculer les termes d'une suite arithmétique

a) $u_2 = u_1 + (-5) = 4 - 5 = -1$

b) $u_{11} = u_1 + (11 - 1) \times (-5) = 4 - 10 \times 5 = -46$

24. Déterminer la raison d'une suite géométrique

$u_6 = u_4 \times q^{6-4}$

Donc $48 = 3 \times q^2$

$q^2 = \frac{48}{3} = 16$

$q > 0$, donc $q = 4$.

25. Déterminer la raison d'une suite arithmétique

$u_7 = u_4 + r \times (7 - 4)$

Donc $18 = 3 + 3r$.

Donc $3r = 15$.

Donc $r = 5$

Exercices

apprendre à démontrer

p. 28

Pour s'entraîner

$x = 3x - 8 \Leftrightarrow -2x = -8$

$\Leftrightarrow x = 4$

La suite auxiliaire est donc la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 4$.

26. Donner des exemples de suites de limite donnée

a) $u_n = n$

b) $u_n = -2 + \frac{1}{n}$

c) $u_n = -n^2$

d) $u_n = (-1)^n$

27. Donner la limite de suites définies de façon explicite

1. Réponse **a**

2. Réponse **c**

3. Réponse **b**

28. Limites de suites géométriques

1. **Faux** ($10 > 1$ et $-1 < 0$, donc elle a pour limite $-\infty$)

2. **Vrai** (car $2 > 1$ et $1 > 0$)

3. **Faux** ($0 < \frac{1}{2} < 1$, donc elle a pour limite 0)

4. **Vrai** ($0 < 0,25 < 1$)

29. Lire graphiquement des termes et la limite d'une suite (1)

a) $u_0 = 3, u_1 = -1, u_2 = 2, u_3 = 3$.

b) On peut dire que la suite (u_n) n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

30. Lire graphiquement des termes et la limite d'une suite (2)

1. Réponse **c**

2. Réponse **b**

31. Lire graphiquement des termes et la limite d'une suite

1. Il faut d'abord déterminer si (u_n) est une suite arithmétique ou une suite géométrique.

Ici (u_n) est une suite géométrique car

$$u_{n+1} = q \times u_n \text{ avec } q = \frac{1}{4}.$$

Il faut donc appliquer la formule du cours pour une suite géométrique : $u_0 \times q^n$ si on nous donne u_0 , ou $u_p \times q^{n-p}$ si on nous donne un autre terme. Ici, on nous donne u_0 , donc pour tout entier naturel n ,

$$u_n = u_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

2. (v_n) est une suite arithmético-géométrique, suivant une relation de la forme $v_{n+1} = av_n + b$, avec a et b deux réels.

Il faut donc résoudre l'équation $x = ax + b$.
On notera ℓ la solution.

Il faut ensuite considérer la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = v_n - \ell$.

Il faut montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison a , puis en déduire l'expression de w_n en fonction de n , puis celle de v_n en fonction de n .

Exercices d'application

p. 30-31

Modéliser avec une suite

32. 1. $400 + 2 \times 10 = 420$.

Elle paiera 420 €

2. a) $u_n = 400 + 2n$

b) $u_n = 434 \Leftrightarrow 400 + 2n = 434$
 $\Leftrightarrow n = 17$.

Sofia a acheté 17 billets de train.

33. 1. $u_0 = 400$

$$u_1 = 400 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 360$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(\frac{1-10}{100}\right) = 0,9u_n$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n = 400 \times 0,9^n$$

34. 1. $100\,000 \times \frac{80}{100} + 30\,000 = 110\,000$.

Donc l'organisation prévoit 110 000 festivaliers en 2021.

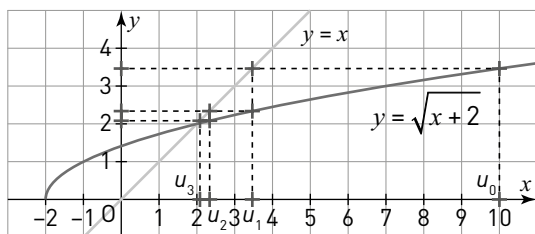
2. a) Soit u_n le nombre de festivaliers en 2020 + n .

$$u_0 = 100\,000 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 30\,000$$

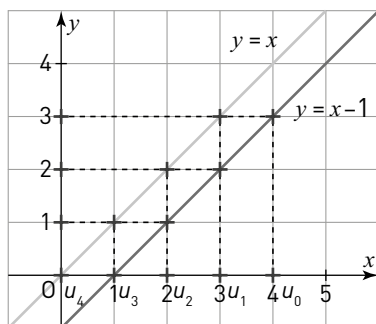
Représenter graphiquement une suite

35. 1. et 2.



3. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 2.

36. 1.



2. On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite $-\infty$.

37. 1. $u_0 = 3, u_1 = -1, u_2 = 3; u_3 = -1$.

2. On conjecture que la suite (u_n) n'est pas monotone, et n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.

Limite d'une suite

38. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

39. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -3$.

40. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^4} - 5\right) = -5$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

41. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^2 \times \left(1 - \frac{2}{n}\right)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^3 \times \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3) = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) = -1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

42. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = n^3 \times \left(\frac{3}{n^2} - 1 + \frac{2}{n^3}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3) = +\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n^2} - 1 + \frac{2}{n^3}\right) = -1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

$$\text{b) Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{n \times \left(1 - \frac{5}{n}\right)}{n \times \left(2 + \frac{4}{n}\right)} = \frac{1 - \frac{5}{n}}{2 + \frac{4}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{4}{n}\right) = 2.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}.$$

43. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{n^2 \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{n \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$v_n = \frac{n \times \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n \times \left(2 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{2}.$$

44. 1. Non, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2) = +\infty.$$

On obtient une forme indéterminée de la forme « $0 \times +\infty$ »

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n - \frac{2}{n}$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Limites et comparaison

45.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n + 1 = n + 2n + 1$.

Donc $3n + 1 > n$.

Donc $\sqrt{3n + 1} > \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $u_n > \sqrt{n}$.

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

46.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

Donc $-n - 1 \leq u_n \leq -n + 1$

Donc $u_n \leq -n + 1$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n + 1 = -\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

47. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{4}{n+1}\right) = 2$.

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

48. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -3$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{n^2 + 1}\right) = -3.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -3.$$

49.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

Donc $-5 - \frac{1}{n^2} \leq v_n \leq -5 + \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-5 - \frac{1}{n^2}\right) = -5.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-5 + \frac{1}{n^2}\right) = -5.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -5.$$

50.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

Donc $4 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq w_n \leq 4 + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 4.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 4.$$

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 4.$$

Suites géométriques

51. a) $4 > 1$ et $2 > 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) $4 > 1$ et $-3 < 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

c) (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Or $0 < \frac{1}{3} < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

52. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1,5a_n$, donc (a_n) est une suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme $a_0 = -1$.

2. $1,5 > 1$ et $-1 < 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

$$\begin{aligned}
 \text{53. 1. a) } S_1 &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\
 &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^n \\
 &= u_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \\
 &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\
 &= 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{27}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } S_1 &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n+1} \\
 &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^{n+1} \\
 &= u_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^{n+1}) \\
 &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} \\
 &= 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{27}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}\right)
 \end{aligned}$$

$$2. 0 < \frac{1}{3} < 1.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_1 = \frac{27}{2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{54. 1. a) } S_{25} &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{24} \\
 &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^{24} \\
 &= u_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^{24}) \\
 &= u_0 \times \frac{1 - q^{25}}{1 - q} \\
 &= -10 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{25}}{1 - \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S_{25} \approx -20$$

$$\begin{aligned}
 \text{2. a) } S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} \\
 &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^{n-1} \\
 &= u_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \\
 &= u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \\
 &= -10 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = -20 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } 0 < \frac{1}{2} < 1.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -20.$$

$$\begin{aligned}
 \text{55. 1. } S_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} \\
 &= v_0 + v_0 \times q + v_0 \times q^2 + \dots + v_0 \times q^{n-1} \\
 &= v_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \\
 &= v_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \\
 &= 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{16}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)
 \end{aligned}$$

$$2. 0 < \frac{1}{4} < 1.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{16}{3}.$$

Suites arithmético-géométriques

$$\begin{aligned}
 \text{56. 1. } u_0 &= 2 \\
 u_1 &= 4 \times u_0 - 9 = -1 \\
 u_2 &= 4 \times u_1 - 9 = -13
 \end{aligned}$$

2. $u_1 - u_0 = -3$ et $u_2 - u_1 = -12$.

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1} = 13$.

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= 4u_n - 9 - 3 \\ &= 4u_n - 12 \\ &= 4(u_n - 3) \\ &= 4v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -1$.

b) Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -1 \times 4^n$.

c) Or $v_n = u_n - 3$, donc $u_n = v_n + 3$.

Donc $u_n = -1 \times 4^n + 3 = 3 - 4^n$.

d) $u_{10} = 3 - 4^{10} = -1\,048\,573$.

57. 1. $x = 5x - 10 \Leftrightarrow -4x = -10$

$\Leftrightarrow x = 2,5$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2,5$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2,5$

$$\begin{aligned} &= 5u_n - 10 - 2,5 \\ &= 5u_n - 12,5 \\ &= 5(u_n - 2,5) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2,5 = -3,5$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3,5 \times 5^n$.

Or $v_n = u_n - 2,5$. Donc $u_n = v_n + 2,5$.

Donc $u_n = -3,5 \times 5^n + 2,5$.

2. $u_6 = -3,5 \times 5^6 + 2,5 = -54\,685$.

58. 1. $x = 3x - 14 \Leftrightarrow -2x = -14$

$\Leftrightarrow x = 7$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 7$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 7$

$$\begin{aligned} &= 3u_n - 14 - 7 \\ &= 3u_n - 21 \\ &= 3(u_n - 7) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 7 = -5$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -5 \times 3^n$.

Or $v_n = u_n - 7$. Donc $u_n = v_n + 7$.

Donc $u_n = -5 \times 3^n + 7$.

2. $u_8 = -5 \times 3^8 + 7 = -32\,798$.

59. 1. $u_0 = 5$

$u_1 = -2 \times u_0 + 12 = 2$

$u_2 = -2 \times u_1 + 12 = 8$

D'où $u_1 - u_0 = -3$ et $u_2 - u_1 = 6$.

$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$.

Donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{5}$ et $\frac{u_2}{u_1} = 4$.

$\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$.

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. $x = -2x + 12 \Leftrightarrow 3x = 12$

$\Leftrightarrow x = 4$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 4$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 4$

$$\begin{aligned} &= -2u_n + 12 - 4 \\ &= -2u_n + 8 \\ &= -2(u_n - 4) \\ &= -2v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = 1$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 \times (-2)^n = (-2)^n$.

Or $v_n = u_n - 4$. Donc $u_n = v_n + 4$.

Donc $u_n = (-2)^n + 4$.

2. $u_{20} = (-2)^{20} + 4 = 1\,048\,580$.

Exercices d'entraînement

p. 32-35

Limite d'une suite

60. a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^3 \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3}\right)$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{n^3}{n^2 \times \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)} = \frac{n}{1 - \frac{4}{n^2}}$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.

d) Pour tout entier $n > 2$, $n^3 - \frac{1}{n^2 - 4} \leq a_n$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - \frac{1}{n^2 - 4} = +\infty$.

Donc d'après le théorème de comparaison,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

61. 1. Faux : contre exemple $u_n = \frac{1}{n}$.

$\{u_n\}$ converge vers 0, mais $\{v_n\}$ diverge vers $+\infty$.

2. Faux : contre exemple $u_n = \{-1\}^n$.

$\{u_n\}$ diverge et $\{v_n\}$ diverge également.

62. 1. Non : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Donc on a une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ».

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

Donc $u_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n+1 > n$

Donc $\sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Donc $v_n > \sqrt{n}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Donc d'après le théorème de comparaison,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

4. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

63. 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2. a) Le plus petit entier n tel que $u_n > 100$ est 5.

b) Le plus petit entier n tel que $u_n > 1\,000$ est 11.

c) Le plus petit entier n tel que $u_n > 10\,000$ est 22.

64. 1. On conjecture que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2. a)

```

n = 0
u = 2
while u <= 1000 :
    u = 3*u
    n = n+1
print (n)
    
```

b) Cet entier est 6.

65. 1. a) $u_0 = 10$, $u_1 = 5,1$, $u_2 \approx 2,746\,1$,

$u_3 \approx 1,737\,2$ et $u_4 \approx 1,444\,2$.

b)

```

u = 10
for i in range (1, 101):
    u = 1/2*(u+2/u)
print (u)
    
```

2. a) $u_0 = 5$ et $u_1 = 2,7$, $u_2 \approx 1,720\,4$,

$u_3 \approx 1,441\,5$ et $u_4 \approx 1,414\,5$.

b)

```

u = 5
for i in range (1, 101):
    u = 1/2*(u+2/u)
print (u)
    
```

66.

```

s = 0
u = 0
for i in range (0, 100):
    u = (-1)**i/(2*i+1)
    s = s+u
print (s)
print (4*s)
    
```

Suites géométriques

et suites arithmético-géométriques

67. 1. $15\,000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 1\,000 = 14\,500$.

Il y aura 14 500 habitants en 2021.

2. On note u_n le nombre d'habitants en 2020+n.

En 2020, il y a 15 000 habitants, donc $u_0 = 15\,000$.

Chaque année, le maire prévoit que 10 % des habitants quitteront la ville, et 1 000 nouveaux habitants s'installeront.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 1000$$

$$= 0,9u_n + 1\,000.$$

$$3. x = 0,9x + 1\,000 \Leftrightarrow 0,1x = 1\,000$$

$$\Leftrightarrow x = 10\,000$$

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_n = u_n - 10\,000.$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} - 10\,000 \\ &= 0,9u_n + 1\,000 - 10\,000 \\ &= 0,9u_n - 9\,000 \\ &= 0,9(u_n - 10\,000) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $v_0 = u_0 - 10\,000 = 5\,000$.

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = 5\,000 \times 0,9^n.$$

$$\text{Or } v_n = u_n - 10\,000, \text{ donc } u_n = v_n + 10\,000.$$

$$\text{Donc } u_n = 5\,000 \times 0,9^n + 10\,000.$$

$$4. 0 < 0,9 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10\,000.$$

Le nombre d'habitants de la ville tend vers 10 000.

$$68. 1. \text{ Si } 0 \leq q < 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

$$\text{Si } q = 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$$

$$\text{Si } q > 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

$$2. a) \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$$

$$b) \bullet \text{ Si } 0 \leq q < 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0, \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \times q^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$\bullet \text{ Si } q = 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1, \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \times q^n = u_0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u_0$$

$$\bullet \text{ Si } q > 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.$$

$$\text{Donc, si } u_0 > 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \times q^n = +\infty, \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\text{Et si } u_0 < 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 \times q^n = -\infty, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

$$69. 1. u_2 = u_1 \times 1,1 - 3 = 52$$

$$2. u_1 + u_2 = 50 + 52 = 102$$

Donc un tunnel de 2 mètres coûte 102 €.

$$3. x = x \times 1,1 - 3 \Leftrightarrow -0,1x = -3 \Leftrightarrow x = 30$$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 30$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} &= u_{n+1} - 30 \\ &= 1,1u_n - 3 - 30 \\ &= 1,1u_n - 33 \\ &= 1,1\left(u_n - \frac{33}{1,1}\right) \\ &= 1,1(u_n - 30) \\ &= 1,1v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,1$ et de premier terme $v_1 = u_1 - 30 = 20$

$$\text{Donc } v_n = v_1 \times q^{n-1} = 20 \times 1,1^{n-1}$$

$$\text{Or } v_n = u_n - 30, \text{ donc } u_n = v_n + 30.$$

$$\text{Donc } u_n = 20 \times 1,1^{n-1} + 30.$$

$$\begin{aligned} 4. S &= u_1 + u_2 + \dots + u_{50} \\ &= (20 \times 1,1^0 + 30) + (20 \times 1,1^1 + 30) + \dots + (20 \times 1,1^{49} + 30) \\ &= 30 \times 50 + 20 \times (1 + 1,1 + \dots + 1,1^{49}) \\ &= 30 \times 50 + 20 \times \frac{1 - 1,1^{50}}{1 - 1,1} \\ &\approx 24\,778,17 \end{aligned}$$

Donc un tunnel de 50 mètres coûtera 24 778,17 €.

$$70. 1. 100 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 5 = 95.$$

Donc en 2021, il y aura 95 tigres dans la réserve.

2. $u_0 = 100$. Et chaque année, 10 % de la population de tigres meurt, et 5 nouveaux tigres sont recueillis dans la réserve. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 5 = 0,9u_n + 5$$

$$3. x = 0,9x + 5 \Leftrightarrow 0,1x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = 50$$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 50$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} - 50 \\ &= 0,9u_n + 5 - 50 \\ &= 0,9u_n - 45 \\ &= 0,9\left(u_n - \frac{45}{0,9}\right) \\ &= 0,9(u_n - 50) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 50 = 50$

$$\text{Donc } v_n = v_0 \times q^n = 50 \times 0,9^n$$

$$\text{Or } v_n = u_n - 50, \text{ donc } u_n = v_n + 50.$$

$$\text{Donc } u_n = 50 \times 0,9^n + 50.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 50 \times 0,9^{n+1} + 50 - (50 \times 0,9^n + 50) \\ &= 50 \times 0,9^{n+1} - 50 \times 0,9^n \\ &= 50 \times 0,9^n \times (0,9 - 1) \\ &= -5 \times 0,9^n \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite est strictement décroissante. Le nombre de tigres diminuera avec les années.

5. $0 < 0,9 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 50$.

Le nombre de tigres tend vers 50.

71. 1. $S_n = \frac{1 - 5^{n+1}}{1 - 5} = -\frac{1}{4} \times (1 - 5^{n+1})$

2. $5 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n+1} = +\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - 5^{n+1}) = -\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

72. 1. $u_0 = -3$, $u_1 = 2u_0 + 4 = -2$,

$u_2 = 2u_1 + 4 = 0$, $u_3 = 2u_2 + 4 = 4$.

2.

```
u = -3
for i in range (1, 21):
    u = 2*u+4
print (u)
```

3. $u_{20} = 1\,048\,572$

73. 1. a) $u_1 = 16\,000 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 13\,600$

$$u_2 = 13\,600 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 11\,560$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 0,85u_n$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,85$.

Donc $u_n = u_0 \times q^n = 16\,000 \times 0,85^n$.

c) $0 < 0,85 < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. a)

```
u = 16000
n = 0
while u > 2000 :
    n = n+1
    u = 0.85*u
```

b) La valeur de n à la fin du programme est 13.

3. a) Le 1^{er} juillet, elle prélève 15 % du capital disponible pour préparer ses vacances. Le 1^{er} décembre, elle rajoute 300 €.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,85v_n + 300$.

b) $x = 0,85x + 300 \Leftrightarrow 0,15x = 300$

$\Leftrightarrow x = 2\,000$

Soit (w_n) la suite définie par

$w_n = v_n - 2\,000$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = v_{n+1} - 2\,000$

$$= 0,85v_n + 300 - 2\,000$$

$$= 0,85v_n - 1\,700$$

$$= 0,85 \left(v_n - \frac{1\,700}{0,85} \right)$$

$$= 0,85(v_n - 2\,000)$$

$$= 0,85w_n$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 2\,000 = 14\,000$

Donc $w_n = w_0 \times q^n = 14\,000 \times 0,85^n$

Or $w_n = v_n - 2\,000$, donc $v_n = w_n + 2\,000$.

Donc $v_n = 14\,000 \times 0,85^n + 2\,000$.

c) $0 < 0,85 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2\,000$.

74. Travail à faire par l'élève

75. 1. a) $u_1 = u_0 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) \approx 530$

$$u_2 = u_1 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) \approx 562$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{6}{100}\right) = 1,06u_n$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,06$.

Donc $u_n = u_0 \times q^n = 500 \times 1,06^n$.

c) $1,06 > 1$, et $500 > 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. a)

```

u = 500
n = 0
while u > 1000 :
    n = n + 1
    u = 1.06 * u
print (n)
    
```

b) La valeur affichée à la fin de l'exécution de ce programme est 12.

Donc le nombre de films aura doublé à partir de 12 mois (ou un an) après l'ouverture.

3. a) Chaque mois, 10 % des personnes se désabonnent, et il y a 2 500 nouveaux abonnés.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right)v_n + 2\,500 = 0,9v_n + 2\,500$$

$$\text{b) } x = 0,9x + 2\,500 \Leftrightarrow 0,1x = 2\,500 \\ \Leftrightarrow x = 25\,000$$

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = v_n - 25\,000$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= v_{n+1} - 25\,000 \\ &= 0,9v_n + 2\,500 - 25\,000 \\ &= 0,9v_n - 22\,500 \\ &= 0,9\left(v_n - \frac{22\,500}{0,9}\right) \\ &= 0,9(v_n - 25\,000) \\ &= 0,9w_n \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 25\,000 = -10\,000$

$$\text{Donc } w_n = w_0 \times q^n = -10\,000 \times 0,9^n$$

$$\text{Or } w_n = v_n - 25\,000, \text{ donc } v_n = w_n + 25\,000.$$

$$\text{Donc } v_n = -10\,000 \times 0,9^n + 25\,000.$$

$$\text{c) } 0 < 0,9 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 25\,000.$$

On peut donc prévoir une stabilisation du nombre d'abonnés, autour de 25 000.

$$76. 1. \mathcal{A}_1 = 3^2 = 9, \mathcal{A}_2 = 1,5^2 = 2,25$$

$$2. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{A}_{n+1} = \frac{\mathcal{A}_n}{4}.$$

Donc $(\mathcal{A}_n)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

4. Notons S_n l'aire formée par l'ensemble des n premiers carrés.

$$\begin{aligned} S_n &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \dots + \mathcal{A}_n \\ &= 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 + 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \dots + 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= 9 \times \left(\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) \\ &= 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = 12 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \end{aligned}$$

$$5. 0 < \frac{1}{4} < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 12.$$

Donc si on continue indéfiniment cette construction, l'aire de la figure formée par l'ensemble des carrés sera 12 cm^2 .

77. A ► Premier modèle

$$1. u_0 = 1 \text{ et } u_1 = u_0 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1,04$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1,04u_n$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,04$. Donc $u_n = u_0 \times q^n = 1,04^n$.

$$3. 1,06 > 1, \text{ et } 1 > 0$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

4. Ce modèle ne semble pas réaliste : la population de singes sera confrontée à des problèmes de place et de ressources.

B ► Second modèle

$$1. v_1 = 0,9v_0 + 0,15 = 1,05$$

En 2021, on peut prévoir 1 050 singes.

$$2. \text{ a) } x = 0,9x + 0,15 \Leftrightarrow 0,1x = 0,15 \\ \Leftrightarrow x = 1,5$$

$$\text{Soit } (w_n) \text{ la suite définie par } w_n = v_n - 1,5$$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= v_{n+1} - 1,5 \\
 &= 0,9v_n + 0,15 - 1,5 \\
 &= 0,9v_n - 1,35 \\
 &= 0,9\left(v_n - \frac{1,35}{0,9}\right) \\
 &= 0,9(v_n - 1,5) \\
 &= 0,9w_n
 \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 1,5 = -0,5$

$$\text{Donc } w_n = w_0 \times q^n = -0,5 \times 0,9^n$$

$$\text{Or } w_n = v_n - 1,5, \text{ donc } v_n = w_n + 1,5.$$

$$\text{Donc } v_n = -0,5 \times 0,9^n + 1,5.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= -0,5 \times 0,9^{n+1} + 1,5 - (-0,5 \times 0,9^n + 1,5) \\
 &= -0,5 \times 0,9^{n+1} + 0,5 \times 0,9^n \\
 &= -0,5 \times 0,9^n \times (0,9 - 1) \\
 &= 0,05 \times 0,9^n
 \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite est strictement croissante. Le nombre de singes augmentera avec les années.

c) $0 < 0,9 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1,5.$$

Le nombre de singes tend vers 1 500.

3. a)

```

n = 0
v = 1
while v <= 1.4 :
    n = n + 1
    v = 0.9 * v + 0.15
print (n)
    
```

b) À l'aide de la calculatrice, on trouve $n = 16$. Donc en 2036, le nombre de singes dépassera 14 000.

Suites croisées

$$78. 1. a_1 = a_0 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) + b_0 \times \frac{5}{100} = 0,326.$$

En 2018, la société A va entretenir 32,6 % des ascenseurs.

2. Chaque année :

- 3 % des ascenseurs entretenus par la société A seront entretenus par la société B.
- 5 % des ascenseurs entretenus par la société B seront entretenus par la société A.
- Les autres ascenseurs ne changeront pas de société.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{3}{100}\right)a_n + \frac{5}{100}b_n.$$

$$a_{n+1} = 0,97a_n + 0,05b_n.$$

$$\text{Or } a_n + b_n = 1.$$

$$\text{Donc } a_{n+1} = 0,97a_n + 0,05(1 - a_n)$$

$$\text{Donc } a_{n+1} = 0,92a_n + 0,05.$$

$$3. x = 0,92x + 0,05 \Leftrightarrow 0,08x = 0,05$$

$$\Leftrightarrow x = 0,625$$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n - 0,625$.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = a_{n+1} - 0,625$$

$$= 0,92a_n + 0,05 - 0,625$$

$$= 0,92a_n - 0,575$$

$$= 0,92 \left(a_n - \frac{0,575}{0,92}\right)$$

$$= 0,92(a_n - 0,625)$$

$$= 0,92v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92 et de premier terme $v_0 = a_0 - 0,625 = -0,325$.

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = -0,325 \times 0,92^n.$$

$$\text{Or } v_n = a_n - 0,625, \text{ donc } a_n = v_n + 0,625.$$

$$\text{Donc } a_n = -0,325 \times 0,92^n + 0,625.$$

$$4. 0 < 0,92 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,92^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,625.$$

La proportion d'ascenseurs entretenus par la société A va tendre vers 62,5 %.

79. 1. En 2010, le magazine n'est proposé que sous forme papier, donc $a_0 = 100 \% = 1$

$$\text{et } b_0 = 0 \% = 0$$

Chaque année :

- 10 % des abonnés à la version papier passent à la version numérique.
- 6 % des abonnés à la version numérique passent à la version papier.
- le nombre global d'abonnés reste constant.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{10}{100}\right)a_n + \frac{6}{100}b_n.$$

$$a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06b_n.$$

$$2. \text{ Or } a_n + b_n = 1.$$

$$\text{Donc } a_{n+1} = 0,9a_n + 0,06(1 - a_n)$$

$$\text{Donc } a_{n+1} = 0,84a_n + 0,06.$$

$$3. x = 0,84x + 0,06 \Leftrightarrow 0,16x = 0,06$$

$$\Leftrightarrow x = 0,375$$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n - 0,375$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= a_{n+1} - 0,375 \\ &= 0,84a_n + 0,06 - 0,375 \\ &= 0,84a_n - 0,315 \\ &= 0,84\left(a_n - \frac{0,315}{0,84}\right) \\ &= 0,84(a_n - 0,375) \\ &= 0,84v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,84 et de premier terme $v_0 = a_0 - 0,375 = 0,625$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0,625 \times 0,84^n$.

Or $v_n = a_n - 0,375$, donc $a_n = v_n + 0,375$.

Donc $a_n = 0,625 \times 0,84^n + 0,375$.

4. On cherche le plus petit entier n tel que

$a_n < b_n$, soit $a_n < 0,5$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $n = 10$.

Donc en 2020, la proportion d'abonnés à la version papier, devient inférieur à la proportion d'abonnés à la version numérique.

Étude d'évolution

80. A ► 1. $u_0 = 9\,000$

Chaque année, $a\%$ de poissons meurent, et $b\%$ de poissons naissent.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{a}{100}u_n + \frac{b}{100}u_n = u_n \times \left(1 + \frac{b-a}{100}\right)$$

2. (u_n) est une suite géométrique de raison

$$q = 1 + \frac{b-a}{100}.$$

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n = 9\,000 \times \left(1 + \frac{b-a}{100}\right)^n$$

3. Si $b > a$, alors $b - a > 0$, donc $q > 1$.

Comme $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante, et le nombre de poissons augmentera.

Si $b < a$ alors $b - a < 0$ donc $0 < q < 1$.

Comme $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante, et le nombre de poissons diminuera.

4. Si $b > a$, alors $q > 1$.

Comme $u_0 > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Donc le nombre de poissons tend vers l'infini. Si $b < a$, alors $0 < q < 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Donc le nombre de poissons tend vers 0. Les poissons sont donc en voie d'extinction dans l'étang.

B ► 1. Lorsque les chercheurs commencent leur 2^e étude, ils comptent 3 000 poissons dans l'étang. Donc $v_0 = 3\,000$.

Chaque année, le nombre de poissons diminue de 20 % par rapport à l'année précédente, et les chercheurs rajoutent 2 150 poissons.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = v_n \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) + 2\,150 = 0,8v_n + 2\,150.$$

2. a) Question à faire sur tableur.

b) Il faut rentrer la valeur 3 000 dans la cellule B2.

c) Il faut rentrer la formule =0.8*B2+2150 dans la cellule B3.

d) Question à faire sur tableur.

e) 10 années après le début de l'étude, on peut prévoir environ 9 918 poissons.

f) On conjecture que la limite de la suite (v_n) est 10 750.

$$3. x = 0,8x + 2\,150 \Leftrightarrow 0,2x = 2\,150$$

$$\Leftrightarrow x = 10\,750$$

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = v_n - 10\,750$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= v_{n+1} - 10\,750 \\ &= 0,8v_n + 2\,150 - 10\,750 \\ &= 0,8v_n - 8\,600 \\ &= 0,8\left(v_n - \frac{8\,600}{0,8}\right) \\ &= 0,8(v_n - 10\,750) \\ &= 0,8w_n \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme

$$w_0 = v_0 - 10\,750 = -7\,750$$

$$\text{Donc } w_n = w_0 \times q^n = -7\,750 \times 0,8^n$$

$$\text{Or } w_n = v_n - 10\,750, \text{ donc } v_n = w_n + 10\,750.$$

$$\text{Donc } v_n = -7\,750 \times 0,8^n + 10\,750$$

c) $0 < 0,8 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$.

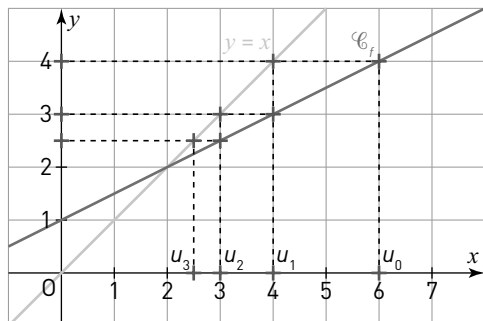
$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 10\,750$$

Exercices bilan

p. 36

81. Représentation graphique et étude d'une suite arithmético-géométrique

1. a) et b)



c) On conjecture que la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 2.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}u_n + 1 - 2$$

$$= \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 4$

b) Donc $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or $v_n = u_n - 2$ donc $u_n = v_n + 2$.

$$\text{Donc } u_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 - \left(4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right) \\ &= 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ &= -2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite est strictement décroissante.

$$0 < \frac{1}{2} < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

82. Limite d'une suite

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n^3 \left(1 - \frac{5}{n^2}\right)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

Donc $n^2 - 1 \leq n^2 + (-1)^n \leq n^2 + 1$

Donc $n^2 - 1 \leq w_n.$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty.$

D'après le théorème de comparaison,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty.$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

Donc $25 - \frac{1}{n} \leq a_n \leq 25 + \frac{1}{n}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 25 - \frac{1}{n} = 25$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 25 + \frac{1}{n} = 25.$

D'après le théorème des gendarmes

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 25.$

e) $5 > 1$ et $b_0 < 0.$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty.$

f) (c_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $c_0 = -10.$

Or $0 < \frac{1}{2} < 1.$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0.$

83. Gagnante au loto

1.a) $\frac{3}{4} \times 1\,000\,000 = 750\,000.$

Donc le 1^{er} janvier 2021, il lui reste 750 000 € sur le compte.

b) $u_0 = 1\,000\,000$ et $u_1 = 750\,000.$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n.$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}.$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n = 1\,000\,000 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ a) } S_n &= \frac{1}{4} \times u_0 + \frac{1}{4} \times u_1 + \dots + u_{n-1} \\
 &= \frac{1}{4} \times 1\,000\,000 \times \left(1 + \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \times 1\,000\,000 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \\
 &= 1\,000\,000 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)
 \end{aligned}$$

$$b) 0 < \frac{3}{4} < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1\,000\,000.$$

84. Étude du nombre d'arbres dans une forêt

$$1. u_0 = 2\,500$$

$$u_1 = 2\,500 \times \left(1 - \frac{10}{100} \right) + 100 = 2\,350$$

2. Chaque année, 10 % des arbres sont coupés, et 100 arbres sont replantés. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{10}{100} \right) + 100 = 0,9u_n + 100$$

$$3. \text{ a) } 2\,050 = 2\,020 + 30.$$

On cherche donc à calculer u_{30} .

```

u = 2500
for i in range (1, 31):
    u = 0.9*u+100
print (u)
    
```

b) En 2050, il y aura environ 1 064 arbres dans la forêt.

$$\begin{aligned}
 4. \text{ a) Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= u_{n+1} - 1\,000 \\
 &= 0,9u_n + 100 - 1\,000 \\
 &= 0,9u_n - 900 \\
 &= 0,9(u_n - 1\,000) \\
 &= 0,9v_n
 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1\,000 = 1\,500$

$$b) \text{ Donc } v_n = v_0 \times q^n = 1\,500 \times 0,9^n$$

$$\text{Or } v_n = u_n - 1\,000 \text{ donc } u_n = v_n + 1\,000.$$

$$\text{Donc } u_n = 1\,500 \times 0,9^n + 1\,000$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= 1\,500 \times 0,9^{n+1} + 1\,000 \\
 &\quad - (1\,500 \times 0,9^n + 1\,000) \\
 &= 1\,500 \times 0,9^n \times (0,9 - 1) \\
 &= -150 \times 0,9^n
 \end{aligned}$$

$u_{n+1} - u_n < 0$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

$$0 < 0,9 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1\,000.$$

Le nombre d'arbres dans la forêt diminue et tend vers 1 000.

85. Suites croisées

$$1. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, a_n + b_n = 1$$

2. Chaque année, *Electric* perd 5 % de ses clients, mais récupère 15 % des clients de *Energ*.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{5}{100} \right) a_n + \frac{15}{100} b_n.$$

$$a_{n+1} = 0,95a_n + 0,15b_n.$$

$$3. \text{ Donc } a_{n+1} = 0,95a_n + 0,15(1 - a_n)$$

$$\text{Donc } a_{n+1} = 0,8a_n + 0,15.$$

$$\begin{aligned}
 4. x &= 0,8x + 0,15 \Leftrightarrow 0,2x = 0,15 \\
 &\Leftrightarrow x = 0,75
 \end{aligned}$$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n - 0,75$.

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} &= a_{n+1} - 0,75 \\
 &= 0,8a_n + 0,15 - 0,75 \\
 &= 0,8a_n - 0,6 \\
 &= 0,8 \left(a_n - \frac{0,6}{0,8} \right) \\
 &= 0,8(a_n - 0,75) \\
 &= 0,8v_n
 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme

$$v_0 = a_0 - 0,75 = 0,55 - 0,75 = -0,2.$$

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = -0,2 \times 0,8^n.$$

$$\text{Or } v_n = a_n - 0,75, \text{ donc } a_n = v_n + 0,75.$$

$$\text{Donc } a_n = -0,2 \times 0,8^n + 0,75.$$

$$4. 0 < 0,8 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,75.$$

Le pourcentage des parts de marchés de *Electric* tend vers 75 %

Exercices Préparer le BAC
Je me teste

p.38

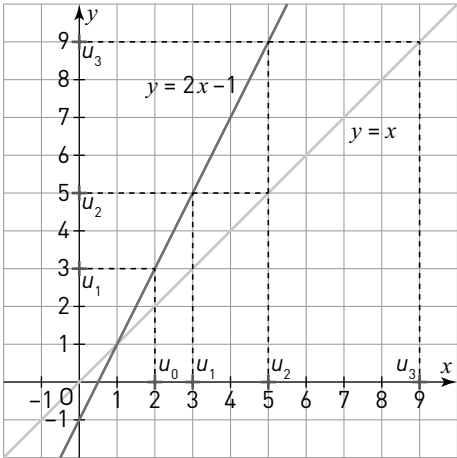
86. **B**
87. **D**
88. **A**
89. **C**
90. **B**
91. **D**
92. **B**
93. **A**

Exercices Préparer le BAC
Je m'exerce

p. 39

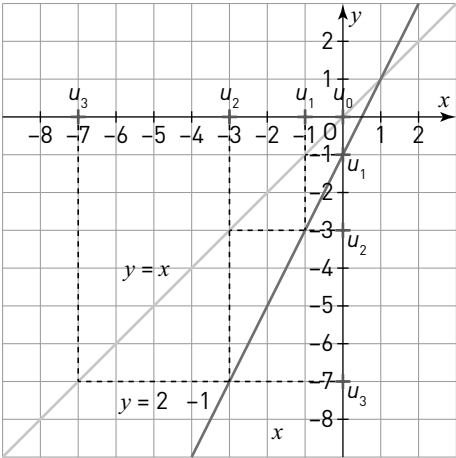
94. Représentation graphique

1. et 2.



3. La suite $\{u_n\}$ semble croissante et avoir pour limite $+\infty$.

4.



La suite $\{u_n\}$ semble décroissante et avoir pour limite $-\infty$.

95. Limites d'une suite

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{2}$.
c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$. d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 3$.
e) $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. f) $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\infty$.

96. Bouts de ficelles

1. a) $u_1 = \frac{1}{4} \times 20 = 5$ et $u_2 = \frac{1}{4} \times 5 = 1,25$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$.

Donc $\{u_n\}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

c) $0 < \frac{1}{4} < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. a) $L_1 = u_1 = 5$

$L_2 = u_1 + u_2 = 6,25$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$L_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= u_1 + u_1 \times \frac{1}{4} + \dots + u_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$= u_1 \times \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$$

$$= u_1 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= 5 \times \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

c) Or $0 < \frac{1}{4} < 1$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \frac{20}{3}.$$

97. Évolution d'un salaire

$$1. 1500 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right) = 1560.$$

Donc le salaire de Thomas en 2020 est 1 560 €.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{4}{100}\right) u_n = 1,04 u_n.$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,04.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1\,500 \times 1,04^n$.

$$3. S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$$

$$= u_0 + u_0 \times 1,04 + \dots + u_0 \times 1,04^9$$

$$= u_0 \times (1 + 1,04 + \dots + 1,04^9)$$

$$= u_0 \times \frac{1 - 1,04^{10}}{1 - 1,04}$$

$$= 1500 \times \frac{1 - 1,04^{10}}{-0,04}$$

$$= -37\,500 \times (1 - 1,04^{10})$$

$$\approx 18\,009,16$$

Thomas aura gagné environ 18 009,16 €.

98. Compte en banque

$$1. u_1 = 5\,750 \text{ et } u_2 = 6\,312,5$$

Chaque mois, Maud dépense le quart de ce qu'elle a sur son compte. De plus elle dépose 2 000 € le dernier jour de chaque mois.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) + 2\,000$$

$$= 0,75 u_n + 2\,000$$

2. a)

```
u = 5000
for in range (1, 13)
    u = 0.75*u + 2000
print (u)
```

b) Maud a 7 904,97 € sur son compte le 1^{er} janvier 2021.

$$3. x = 0,75x + 2\,000 \Leftrightarrow x = 8\,000$$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8\,000$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 8\,000$

$$= 0,75 u_n + 2\,000 - 8\,000$$

$$= 0,75(u_n - 8\,000)$$

$$= 0,75 v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75, de premier terme

$$v_0 = u_0 - 8\,000 = -3\,000$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -3\,000 \times 0,75^n$.

$$v_n = u_n - 8\,000, \text{ donc } u_n = v_n + 8\,000.$$

$$\text{Donc } u_n = 8\,000 - 3\,000 \times 0,75^n.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = 8\,000 - 3\,000 \times 0,75^{n+1}$$

$$- (8\,000 - 3\,000 \times 0,75^n)$$

$$= 3\,000 \times 0,75^n (-0,75 + 1)$$

$$= 750 \times 0,75^n$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

$$0 < 0,75 < 1, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,75^n = 0$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 8\,000$. La somme sur le compte augmentera et tendra vers 8 000 €.

99. Bénévoles dans une association

$$1. u_0 = 20 \text{ et } v_0 = 2\,980.$$

2. Le nombre d'habitants dans le village est constant. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 3\,000$.

3. Chaque année,

- 25 % des bénévoles quittent l'association.
- 5 % habitants qui n'étaient pas bénévoles l'année précédente deviennent bénévoles.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{25}{100}\right)u_n + \frac{5}{100}v_n.$$

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 0,05v_n$$

4. On a $u_{n+1} = 0,75u_n + 0,05(3\,000 - u_n)$

Donc $u_{n+1} = 0,7u_n + 150$

5. $x = 0,7x + 150 \Leftrightarrow 0,3x = 150$

$$\Leftrightarrow x = 500$$

Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 500$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - 500 \\ &= 0,7u_n + 150 - 500 \\ &= 0,7u_n - 350 \\ &= 0,7\left(u_n - \frac{350}{0,7}\right) \\ &= 0,7(u_n - 500) \\ &= 0,7w_n \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison 0,7 et de premier terme $w_0 = u_0 - 500 = -480$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -480 \times 0,7^n$.

Or $w_n = u_n - 500$, donc $u_n = w_n + 500$.

Donc $u_n = -480 \times 0,7^n + 500$.

6. $0 < 0,7 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 500$.

Le nombre de bénévoles de l'association dans le village tendra vers 500.

CHAPITRE 2 Limites et continuité

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

L'objet de ce chapitre est d'aborder la notion de limite d'une fonction, notion fondamentale en analyse puis d'introduire l'idée de continuité à travers son application dans la résolution d'équation.

Nous étudierons, en particulier, comment déterminer les limites d'une fonction et comment montrer l'existence d'une solution d'une équation à travers le théorème des valeurs intermédiaires.

Pour cela, dans un premier temps, on définira, de façon intuitive, les différents cas de limites d'une fonction puis les méthodes usuelles pour les déterminer : opérations sur les limites, théorème de comparaison, théorème des gendarmes...

Dans un second temps, on abordera la continuité d'une fonction à travers sa représentation graphique, de sa définition sans développement excessif et de son application aux équations.

On montrera que l'on peut déduire la continuité de la dérivabilité et que la monotonie associée à la continuité permet de conclure sur l'existence et l'unicité de la solution d'une équation.

Objectifs

- Conjecturer les limites d'une fonction à partir de sa représentation.
- Déterminer les limites d'une fonction en utilisant les opérations sur les limites ou en levant une forme indéterminée.
- Déduire une asymptote horizontale ou verticale à partir des limites d'une fonction.
- Déterminer les limites d'une fonction en utilisant le théorème de comparaison ou le théorème des gendarmes.
- Conjecturer la continuité et la dérivabilité d'une fonction à l'aide de sa représentation.
- Montrer l'existence et l'unicité d'une solution à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires.

II. Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 41

1. Conjecturer une limite

a) Si x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers 0 car la courbe se rapproche de l'axe des abscisses pour les grandes valeurs de x .

Si x tend vers $-\infty$, $f(x)$ tend vers 0 car la courbe se rapproche de l'axe des abscisses pour les petites valeurs de x .

b) Si x tend vers 2^+ , $f(x)$ tend vers $-\infty$ et si x tend vers 2^- , $f(x)$ tend vers $+\infty$.

c) Si x tend vers -2^+ , $f(x)$ tend vers $+\infty$ et si x tend vers -2^- , $f(x)$ tend vers $-\infty$.

2. Interpréter une courbe

a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$.

La fonction f n'est pas dérivable en 2 car la courbe admet un point anguleux pour $x = 2$.

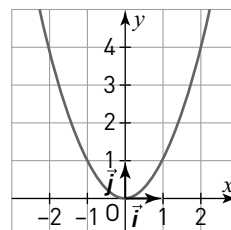
b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 2$.

Les limites étant différentes, la fonction g n'admet pas de limite en 2.

3. Tracer la courbe d'une fonction de référence

a) La courbe de la fonction carrée est tracée ci-contre.

Les limites de la fonction carrée en $-\infty$ et en $+\infty$ sont égales à $+\infty$.

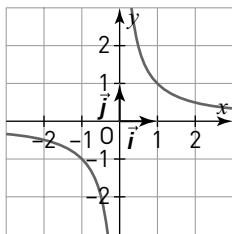


b) La courbe de la fonction inverse est tracée ci-contre.

Les limites de la fonction inverse en $-\infty$ et en $+\infty$ sont égales à 0.

La limite à droite de 0 vaut $+\infty$ et à gauche $-\infty$.

Les axes de coordonnées représentent les asymptotes de la courbe de la fonction inverse.



4. Utiliser un tableau de variations

a) Sur l'intervalle $[-5 ; 2]$, le maximum de la fonction f est -1 , donc $f(x)$ ne peut s'annuler. Sur l'intervalle $[2 ; 5]$, la fonction f est monotone et change de signe donc elle s'annule une fois.

b) L'équation $f(x) = -2$ a deux solutions : une sur $[-5 ; -1]$ et une autre pour $x = 2$.

5. Comprendre une fonction en langage Python

$f(1) = 3$, $f(0,9) = 1,9$ et $f(1,1) = 4,19$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$

Activités

p. 42-43

1. Se rapprocher des limites, notion d'asymptote

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Percevoir la notion de limite à travers la représentation graphique d'une fonction.

1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

b) Si $x > 10$ alors $x^3 > 10^3$ et si $x > 10^3$ alors $x^3 > 10^9$. On peut toujours trouver une valeur de x pour que $f(x)$ soit aussi grand que l'on veut.

c) Si $x < -10$ alors $x^3 < -10^3$ et si $x < -10^3$ alors $x^3 < -10^9$.

On peut toujours trouver une valeur de x pour que $f(x)$ soit aussi grand négatif que l'on veut.

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

b) Attention : il faut lire $\frac{1}{x^2} < 10^{-12}$ dans l'énoncé.

Si $x > 10^3$ alors $\frac{1}{x^2} < 10^{-6}$ et si $x > 10^6$ alors $\frac{1}{x^2} < 10^{-12}$

On peut toujours trouver une valeur de x pour que $f(x)$ soit aussi petit que l'on veut.

c) La courbe de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses lorsque x tend vers $+\infty$.

3. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

b) Attention : il faut lire $\frac{1}{x^2} > 10^{12}$ dans l'énoncé.

Si $x < 10^{-3}$ alors $\frac{1}{x^2} > 10^6$

et si $x < 10^{-6}$ alors $\frac{1}{x^2} > 10^{12}$

On peut toujours trouver une valeur de x pour que $f(x)$ soit aussi grand que l'on veut.

c) La courbe de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées lorsque x tend vers 0.

4. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

b) Attention : il faut lire $\sqrt{x} > 10^2$ dans l'énoncé.

Si $x > 10^4$ alors $\sqrt{x} > 10^2$

et si $x > 10^6$ alors $\sqrt{x} > 10^3$

On peut toujours trouver une valeur de x pour que $f(x)$ soit aussi grand que l'on veut.

2. Appréhender la continuité

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Comprendre la notion de continuité et de discontinuité à l'aide de la représentation graphique d'une fonction.

1. a) $f(1) = 1$

b) $f(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 1^- .

$f(x)$ tend vers 2 lorsque x tend vers 1^+ .

c) La limite en 1 n'existe pas car les valeurs limites ne sont pas égales.

2. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 = f(2)$ car si x se rapproche

de 2 à gauche ou à droite, $f(x)$ se rapproche de $f(2)$.

La fonction est continue sur $[0 ; 1[\cup]1 ; 3]$.

3. Faire des opérations sur les limites

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Utilisation de la somme, du produit et du quotient des limites.

A ► Un polynôme

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) = +\infty$

« grand + grand – grand » donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 3 = -\infty$

On ne peut déduire la limite de f en $-\infty$ car on ne sait quel infini l'emporte sur l'autre.

3. En factorisant par x , on obtient l'expression donnée.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

« 1 multiplié par grand positif = grand positif »

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

B ► Une fonction rationnelle

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = +\infty$

On ne peut déduire la limite de g en $+\infty$ car on ne sait quel infini l'emporte sur l'autre.

2. On factorise numérateur et dénominateur par x pour obtenir l'expression donnée.

On peut déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3$.

3. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 2) = 8$ et $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$

Si $x > 2$ alors $x - 2 > 0$

« 8 sur petit positif donne grand positif »

$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$

Si $x < 2$ alors $x - 2 < 0$

« 8 divisé par petit négatif donne grand négatif »

$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty$

4. Résoudre une équation – (Thème 1)

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Déterminer le nombre de solutions d'une équation à l'aide d'un tableau de variations et d'une représentation graphique. Établir les conditions pour l'unicité d'une solution.

1. a) Pour $k = 0$, (E_1) a deux solutions car $f(x)$ change deux fois de signe et (E_2) a une solution car $g(x)$ ne change qu'une fois de signe.

b) Si $k < -1$, (E_1) a une solution.

Si $-1 \leq k < 5$, (E_1) a deux solutions.

Si $k = 5$, (E_1) a une solution.

Si $k > 5$, (E_1) n'a pas de solution.

c) Si $k < -2$, (E_2) n'a pas de solution.

Si $-2 \leq k \leq \frac{3}{2}$, (E_2) a une solution.

Si $k > \frac{3}{2}$, (E_2) n'a pas de solution.

2. a) La fonction g n'est pas continue en 2 car la courbe possède un "saut" en 2.

L'image de l'intervalle $[1 ; 4]$ par g est $[1 ; 2] \cup]3 ; 4]$

b) • Si $k < 2$, (E_1) a trois solutions.

• Si $k = 2$, (E_1) a deux solutions.

• Si $k > 2$, (E_1) a une solution.

• Si $k \leq 2$, (E_2) a une solution.

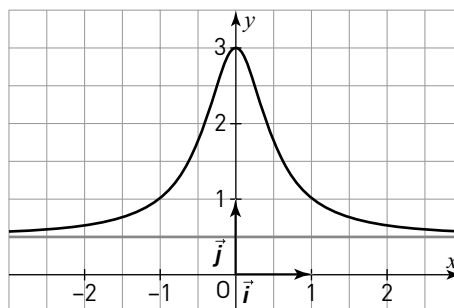
• Si $2 < k \leq 3$, (E_2) n'a pas de solution.

• Si $k > 3$, (E_2) a une solution.

À vous de jouer !

p. 45-55

1. 1.



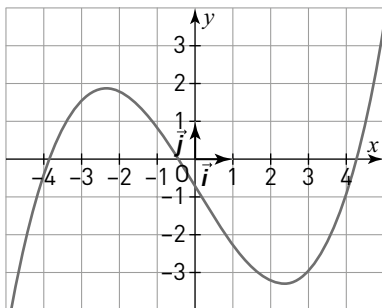
On peut conjecturer :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,5$

2. On peut proposer un programme en Python  calculant l'entier à partir duquel la distance entre la courbe et la droite d'équation $y = 0,5$ est plus petite, par exemple, de $a = 10^{-3}$.

```
from math import*
def f(x):
    return (2*x**2+3)/(4*x**2+1)
def dist(a):
    x=1
    while abs(f(x)-0.5)>=a:
        x+=1
    return x
```

2. 1.

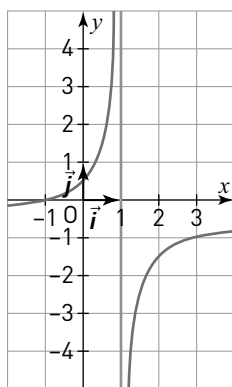


On peut conjecturer :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. On peut le vérifier en rentrant la fonction f dans la calculatrice et calculer par exemple : $f(100)$ et $f(-100)$.

3. 1.

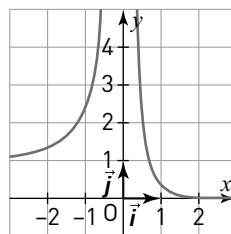


La fonction f est dérivable en 0 car la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en 0 d'équation $y = 0$.

2. La fonction n'admet pas de limite en 1 mais admet une limite à droite et une limite à gauche.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

4. 1.

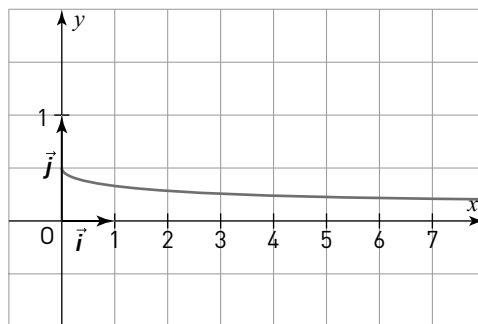


2. La fonction a une limite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

La courbe de f possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

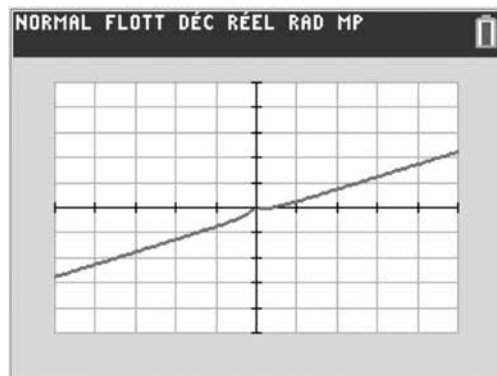
5. 1.



2. **Attention :** on demande si la fonction admet une limite en 4.

La fonction n'est pas définie en 4 mais admet une limite : $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0,25$.

6. 1.



2. La fonction f n'est pas définie en 0 mais f admet une limite en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

7. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. On n'a pas de limite en 0 mais une limite à gauche et à droite.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

8. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^2 + 6 = +\infty$

La forme est indéterminée.

2. **Attention** : on ne cherche pas à déterminer la limite de la fonction en $-\infty$.

$$f(x) = x^3 \left(-1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^3} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{4}{x} + \frac{6}{x^3} \right) = -1$$

Par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

9. Pour $x > 1$, $-\frac{1}{x+1} \leq f(x) < \frac{1}{x+1}$

Par le théorème des gendarmes, on déduit que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

10. 1. $f(x) = x^2 \left(1 + \frac{\sin x}{x} \right)$

2. D'après la méthode résolue, et d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Par somme et produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

11. 1. $-1 \leq -\cos x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - \cos x \leq 3$

en prenant

l'inverse $\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$

2. **Attention** : il faut calculer la limite en $+\infty$.

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1 \Rightarrow \frac{x+1}{3} \leq f(x) \leq x+1$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{3} = +\infty$ par comparaison $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

12. 1. $f'(x) = 3(x^2 - 6x + 8)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 4$

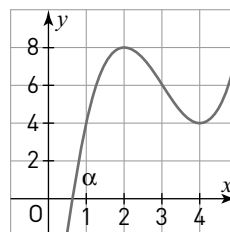
x	0	2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	-12	8	4	$+\infty$	

2. a) D'après le tableau de variations, si $x > 2$, $f(x) > 2$ donc $f(x)$ ne peut pas s'annuler.

Si $x \in [0 ; 2]$, la fonction f est continue, strictement croissante et $f(0) < f(2) < 0$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

b) La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe une seule fois l'axe des abscisses.



13. 1. $f'(x) = e^x(1 + x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	-2	$-\frac{1}{e^2} - 2$	$+\infty$

2. a) **Attention** : il faut lire $\alpha \in [1 ; 2]$ dans le manuel.

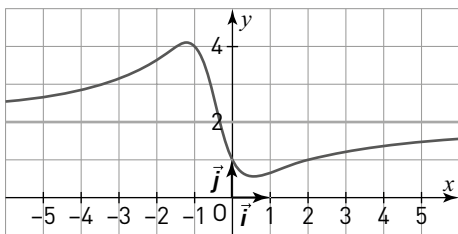
Sur $]-\infty ; 1[$, $f(x) < 2$ pas de solution.

Sur $[-1 ; +\infty[$, f est continue, strictement croissante et $f(-1) < 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 2$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α .

b) $\alpha \approx 1,20$

14. 1.

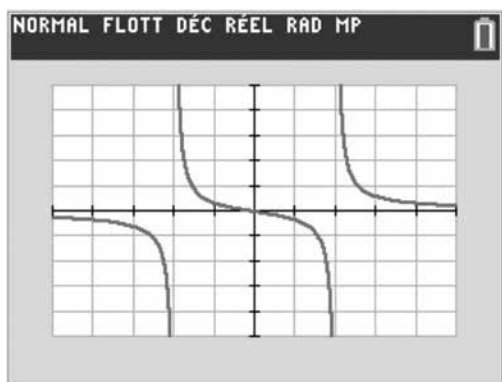


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

2. a) Pour $x \neq 0$, $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

b) Par passage à la limite, on trouve 2 comme limite en $+\infty$ et $-\infty$.

15. 1.



On peut conjecturer que :

- les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ sont nulles,
- les limites en -2^+ et 2^+ valent $+\infty$,
- les limites en -2^- et 2^- valent $-\infty$.

2. a) $f(x) = \frac{1}{x - \frac{4}{x}}$ pour $x \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{4}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Même chose en $-\infty$.

b) On peut remplir un tableau de signes :

x	0	-2	2	$+\infty$		
$x^2 - 4$		+	0	-	0	+

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 4) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array}$$

Même méthode en -2 .

16. 1. $f(x) = 12g(x)$

avec $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$

2. a) $g'(x) = 3x^2 + x + 2 > 0$ car $\Delta = -23$

La fonction g est continue, strictement croissante et change de signe sur $\mathbb{R}$ car

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

b) $\alpha \approx -0,57$ à 10^{-2}

c) Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

3.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$12g(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

17. 1. $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ avec $g(x) = x^2 e^x - 1$

2. a) $g'(x) = x(x+2)e^x \geq 0$ sur I

La fonction g est croissante sur I .

$$g(0) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

La fonction g est continue, strictement croissante et change de signe sur I .

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

b) $\alpha \approx 0,70$ à 10^{-2} près.

c) Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

3. On obtient le tableau de variations suivant.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

Exercices apprendre à démontrer p. 56

Pour s'entraîner

On pose $X = -0,2x$

ainsi si $x \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow -\infty$ d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 20e^{-0,2x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} 20e^X = 0$$

De même si $x \rightarrow -\infty$ alors $X \rightarrow +\infty$ ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 20e^{-0,2x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} 20e^X = +\infty$$

Exercices calculs et automatismes p. 57

18. Limites et asymptotes

- Réponse **c**
- Réponse **b**
- Réponses **a** et **d**

19. Continuité en un point

Une courbe représente une fonction continue si à une abscisse donnée on peut associer un unique point sur la courbe et si la courbe n'admet pas de saut.

Les courbes ① et ② représentent des fonctions continues.

20. Opérations sur les limites (1)

Réponses **b** et **c**.

Les autres propositions sont des formes indéterminées.

21. Opérations sur les limites (2)

Réponses **a**, **c** et **d**

La proposition **b** est une forme indéterminée.

22. Continuité

a) Vrai

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} (x - 5) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2 - x) = 0^- \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 5}{2 - x} = +\infty$$

b) Faux

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x) = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 1}{1 - x} = +\infty$$

c) Faux

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} (2x + 1) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1)^2 = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x + 1}{(x + 1)^2} = -\infty$$

23. Théorème des valeurs intermédiaires

1. La courbe représente une fonction et n'a pas de saut, donc la courbe représente une fonction continue.

2. a) Sur $[1 ; 5]$, la courbe est continue, strictement décroissante et coupe l'axe des abscisses.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \approx 4$.

b) Pour tout réel de $[-1 ; 1]$, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.

c) Dans I , la courbe coupe 4 fois l'axe des abscisses donc l'équation $f(x) = 0$ admet 4 solutions.

24. Tableau de variations et équation

Pour montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution dans $\mathbb{R}$ à l'aide d'un tableau de variation, on décompose ici $\mathbb{R}$ en deux intervalles :

- sur $]-\infty ; 0]$, la fonction est continue, car dérivable, strictement décroissante et 2 est compris entre $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = -1$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution.

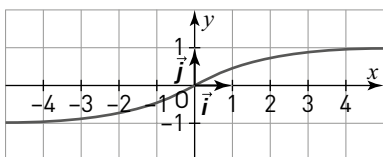
- sur $]0 ; +\infty[$, le maximum de la fonction f est 1 donc, l'équation $f(x) = 2$ ne peut avoir de solution.

Exercices d'application

p. 58-59

Conjecturer une limite

25. 1.



2. On peut conjecturer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +1$

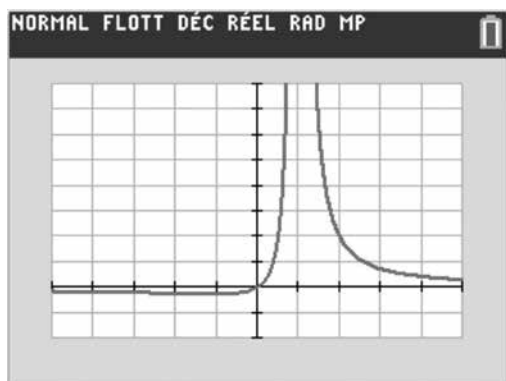
3. On peut proposer un algorithme calculant l'entier à partir duquel la distance entre la courbe et les droites d'équations $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$ est plus petite, par exemple, de $a = 10^{-3}$.

26. 1. On peut conjecturer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

2. Si la convexité de la courbe ne change pas, on ne peut avoir $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -6$

En revanche, si la concavité change, cela est possible.

27. 1. On obtient la courbe suivante.



2. a) On peut conjecturer que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

b) La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

28. **Attention :** la fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. On peut conjecturer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

La courbe admet deux asymptotes horizontales $y = 0$ et $y = 1$.

2. a) **Attention :** on cherche à conjecturer les limites de la fonction en 0.

On peut conjecturer que

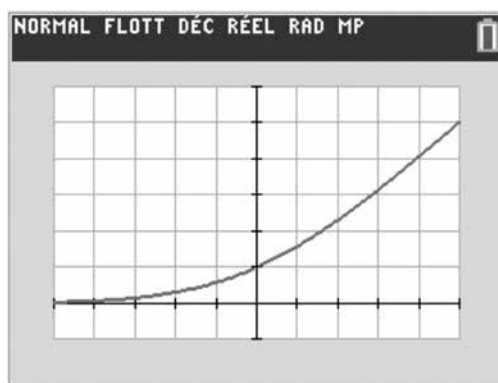
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

b) La courbe admet une asymptote verticale $x = 0$.

c) **Attention :** on demande si la fonction admet une limite en 0.

La fonction f n'admet pas de limite en 0 car les limites en 0^- et 0^+ ne sont pas égales.

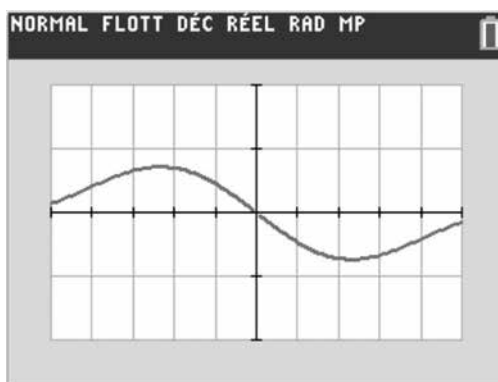
29. 1. On obtient la courbe suivante.



2. a) On peut conjecturer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

b) La fonction n'est pas définie en 0 car $e^0 - 1 = 0$.

30. 1. On obtient la courbe suivante.



2. a) On peut conjecturer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

b) La fonction n'est pas définie en 0.

Déterminer une limite en un point

31. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

32.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} (1-2)x = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)^2 = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty \end{array}$$

33.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - 1) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array}$$

34.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} (3x^3 + 1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array}$$

35. Attention : il faut lire $f(x) = \frac{x-2}{1-e^x}$ dans le manuel.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (x-2) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-e^x) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-e^x) = 0^- \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array}$$

36. Attention : il faut lire $f(x) = \frac{2x^2-1}{-x-1}$ dans le manuel.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 - 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} (-x-1) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x-1) = 0^- \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par quotient} \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array}$$

Déterminer une limite en l'infini

37. 1. On a, en factorisant par x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2. En faisant la somme de deux fonctions :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

3. En faisant le quotient de deux fonctions :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

4. D'après les limites de la fonction exponentielle :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

38. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par quotient.

$$2. f(x) = \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

$$3. f(x) = \frac{x - \frac{4}{x}}{2 + \frac{1}{x}} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

39. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par produit.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par quotient.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par somme.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par produit.

$$40. 1. f(x) = \frac{x^2+1}{1-\frac{1}{x}} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Même limite en $-\infty$.

$$2. f(x) = \frac{3 + \frac{5}{x}}{x+1} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

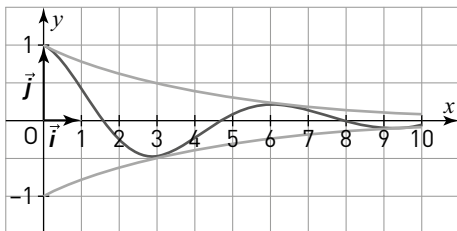
Même limite en $-\infty$.

$$3. f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{2}{3}$$

Même limite en $-\infty$.

Utiliser un théorème d'encadrement

41. 1. a)



b) On peut bien conjecturer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$2. a) -e^{-\frac{x}{4}} \leq f(x) \leq e^{-\frac{x}{4}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-\frac{x}{4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{4}} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

42. Pour $x > 0$, $f(x) > 2x - 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty \text{ par comparaison } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Pour $x < 0$, $f(x) < 2x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) = -\infty \text{ par comparaison } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Résoudre une équation à l'aide d'une fonction

43. 1. D'après le tableau de variations :

- si $x < 1$, $f(x) > -3$ donc ne peut s'annuler,
- si $x \geq 1$, f est continue, strictement décroissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq -3 \leq f(1)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -3$ admet une unique solution.

2. L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions.

44. 1. La fonction f est un polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x) = 2$ a trois solutions.

3. a) L'équation $f(x) = 4$ ne peut avoir de solution que dans $[-1 ; +\infty[$.

Sur $[-1 ; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et 4 est compris entre $f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α .

b) $\alpha \approx 0$ à l'unité près.

45. 1. La fonction f est continue sur $[1 ; 13]$ par convention du tableau de variations.

2. $f(x) = 5$ a deux solutions.

3. L'équation $f(x) = \frac{5}{2}$ ne peut avoir de solution que sur $[1 ; 4]$.

Sur $[1 ; 4]$, la fonction f est continue, strictement croissante et $\frac{5}{2}$ est compris entre $f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α .

46. 1. La fonction f est continue sur $[-5 ; 5]$ par convention du tableau de variation.

2. L'équation $f(x) = k$ possède :

- si $k < -2$, aucune solution.
- si $k = -2$, 1 solution.
- si $-2 < k < -1$, 2 solutions.
- si $k = -1$, 3 solutions.
- si $-1 < k \leq 2$, 4 solutions.
- si $2 < k < 3$, 3 solutions.
- si $k = 3$, 2 solutions.
- si $k > 2$, 1 solution.

Exercices d'entraînement

p. 60-62

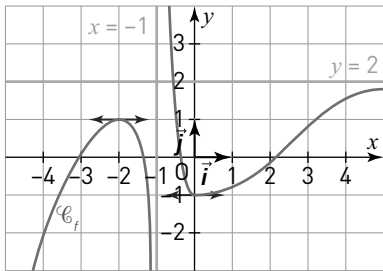
Fonction définie par un tableau de variations

$$47. 1. a) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

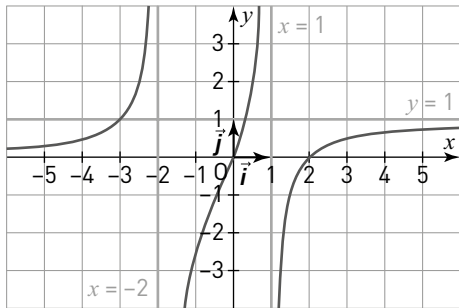
$$b) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

- 2. La fonction f n'admet pas de limite en -1 car les limites à gauche et à droite ne sont pas égales.
- 3. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet 2 asymptotes d'équations $x = -1$ et $y = 2$.
- 4. Courbe possible :



- 48. 1. La courbe $\mathcal{C}_f$ a :
 - deux asymptotes horizontales $y = 0$ et $y = 1$
 - deux asymptotes verticales $x = -2$ et $x = 1$.
- 2. L'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions, une sur $]-2 ; 1[$ et une autre sur $]1 ; +\infty[$.
- 3. On peut proposer :



- 49. 1. On a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- 2. a) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale $y = 1$.
- b) L'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution sur $]-\infty ; 3[\cup]10 ; \infty[$.
Sur $[3 ; 10]$, la fonction f est continue, strictement croissante et 2 est compris entre $f(3)$ et $f(10)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$, admet une unique solution.

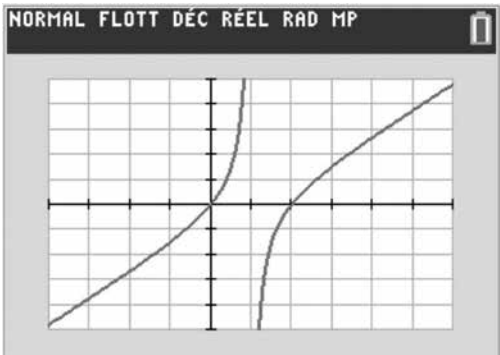
Limite d'une fonction rationnelle

50. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
 $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

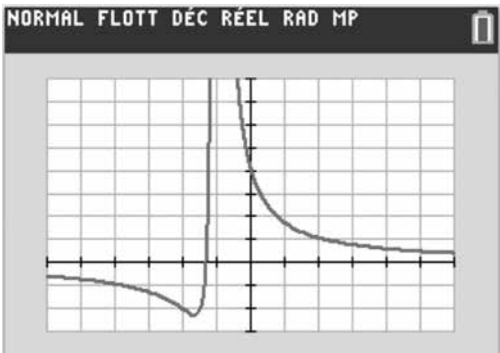
- 2. On obtient deux asymptotes d'équations $x = -2$ et $y = 2$.

51. 1. On a les limites suivantes :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

- 2. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale $x = 1$.
- 3. On obtient la courbe suivante.



- 52. 1. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) On a les limites suivantes pour $f(x) = \frac{3x + 4}{(x + 1)^2}$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$
- c) La fonction admet une limite en -1 : c'est $+\infty$.
- 2. On obtient la courbe suivante.



53. L'ensemble de définition de la courbe est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$.

Seules f_2 et f_3 le vérifient.

Le signe de $f(x)$ sur la courbe permet de choisir la fonction f_3 .

54. Sur la courbe, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Seules f_1 et f_2 vérifient cette limite.

Sur la courbe, $f(x)$ change de signe en 0.

Seule la fonction f_1 le vérifie.

Étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire

55. A ► 1. $g'(x) = 3x^2 - 3$ s'annule en -1 et 1 .

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	-2	-6	14	$+\infty$

2. Sur $[1; 3]$, la fonction g est continue, strictement croissante et change de signe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

3. Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

B ► 1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

2. f' est du signe de g sur $]1; +\infty[$.

x	1	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

56. A ► 1. Les limites se déterminent par somme.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2. $g'(x) = 2(e^x + 1) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction g est croissante.

3. a) Sur $\mathbb{R}$, la fonction g est continue, croissante et change de signe donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

b) $g(0) \times g(1) < 0$ donc $\alpha \in [0; 1]$.

NORMAL FLOTT DEC REEL RAD MP				
APP SUR + POUR Δ Tbl				
X	Y1			
0.931	-0.064			
0.932	-0.057			
0.933	-0.05			
0.934	-0.043			
0.935	-0.036			
0.936	-0.028			
0.937	-0.021			
0.938	-0.014			
0.939	-0.007			
0.94	-4E-5			
0.941	0.0071			

X=0.94

$\alpha \approx 0,940$

4. Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

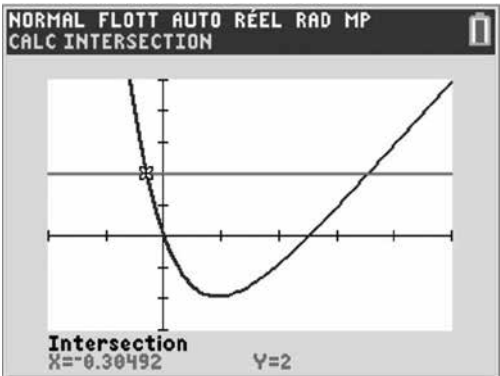
B ► 1. Les limites se déterminent par produit :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. Le signe de f' est celui du tableau suivant.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. On obtient la courbe suivante.



4. On trace la droite $y = 2$ puis on détermine sur la calculatrice les points d'intersection entre les deux courbes.

$f(x) > 2 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -0,30[\cup]3,53; +\infty[$

57. A ► 1. $E(4,5; 7,75)$

2. a) L'abscisse du point E est définie par $f(x) = g(x)$ soit $h(x) = 0$.

b) Sur $[0 ; 8]$, la fonction h est continue par différence de fonction continue, croissante et change de signe car $h(0) = -17$ et $h(8) \approx 21,8$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α .

c) $\alpha \approx 4,52$

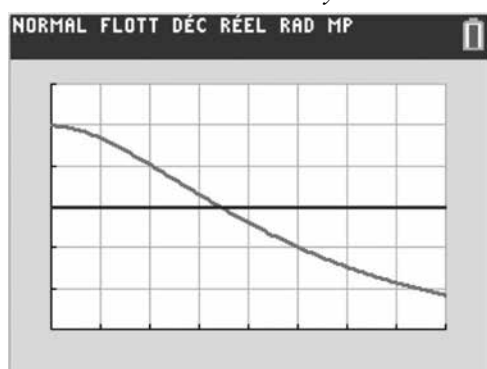
B ► 1. Le prix unitaire est de 452 €.

2. Le nombre d'articles est donc de 7 800.

58. Le problème consiste à résoudre

$f(x) > 3\,000$.

On peut proposer une résolution graphique, en traçant la fonction f et la droite $y = 3\,000$.



L'unité sur x est 2 et sur y 1 000.

On trouve alors $x \leq 7$ donc en dessous de 7 €.

On peut proposer une vérification analytique.

On étudie la fonction h définie par $h(x) = f(x) - 3\,000$ et l'on cherche à résoudre $h(x) = 0$.

$h'(x) = -200xe^{-0,2x} < 0$ pour $x < 0$

La fonction h est décroissante.

$h(0) = 2\,000$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -3\,000$

Pour $x \geq 0$, la fonction h est continue, décroissante et change de signe, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α .

Par balayage avec la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 6,88$ donc en dessous de 6,88 €.

59. 1. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	-2		-6	$+\infty$

2. Sur $]-\infty ; 1[$, la fonction f ne peut s'annuler.

Sur $[1 ; +\infty[$, la fonction f est continue, croissante et change de signe.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

On calcule $f(3) = 14$ donc $\alpha \in [1 ; 3]$

3. a) $f(2) = -2$ donc $f(x)$ change de signe dans $[2 ; 3] = I_2$.

b) $f\left(\frac{5}{2}\right) = 4,125$ donc $f(x)$ change de signe dans I_3 .

4. a) On a le programme Python suivant.

```

1 def f(x):
2     return x**3-3*x-4
3 def dichotomie(a,b):
4     n=0
5     while b-a>=10**(-3):
6         c=(a+b)/2
7         if f(a)*f(c)<0:
8             b=c
9         else:
10            a=c
11            n=n+1
12    return a,b,n

```

b) La variable n représente le nombre d'itérations.

c) $\text{dichotomie}(1,3) \rightarrow 2.195, 2.196, 11$

On trouve $2,195 < \alpha < 2,196$

en 11 itérations.

60. 1. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est croissante.

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue, croissante et change de signe car $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

On calcule $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ donc $\alpha \in [0 ; 1]$.

a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = -0,375$ donc $f(x)$ change de signe dans I_2 .

b) $f\left(\frac{3}{2}\right) = +0,17$ donc $f(x)$ change de signe dans I_3 .

4. a) a et b représentent les bornes dans lesquelles se trouve α .

b) On rentre $a=0$ et $b=1$.

c) n représente le nombre d'itérations.

d) La ligne 7 teste si la fonction change de signe entre **a** et **b**.

Ligne 8 : si vrai alors on remplace **b** par **c**.

Ligne 10 : si faux alors on remplace **a** par **c**.

e) dicho(0, 1) → 0.682, 0.683, 10

On trouve :

$0,682 < \alpha < 0,683$ en 10 itérations.

f) On change la ligne 5 en :

while b-a>=10(-6).**

On trouve :

$0,682\,327 < \alpha < 0,683\,328$ en 20 itérations.

Exercices bilan

p. 63-64

61. Production

1. Les abscisses représentent la durée écoulée en mois.

Les ordonnées représentent une quantité en tonnes fabriquée par jour.

La durée en mois nécessaire pour que B dépasse A est de 6 mois.

2. a) La fonction h représente la différence de production entre le produit A et le produit B.

$$\mathbf{b)} \quad h(x) = 2\,000e^{-0,2x} - 15x^2 - 50x$$

$$h'(x) = (2\,000)(-0,2)e^{-0,2x} - 30x - 50$$

$$\text{Donc } h'(x) = -400e^{-0,2x} - 30x - 50.$$

c) $h'(x) < 0$ pour $x \geq 0$, donc la fonction h est décroissante sur I.

d) Sur $[0 ; 14]$ la fonction h est continue, décroissante et change de signe car $h(0) = 2\,000$ et $h(14) \approx -3\,518$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution.

Ailleurs sur I la fonction h ne change pas de signe donc ne peut s'annuler.

Par balayage, on trouve $5,3 < \alpha < 5,4$

$$\mathbf{e)} \quad f(x) > g(x) \Leftrightarrow x > \alpha.$$

On retrouve le résultat de 6 mois.

62. Taux d'alcoolémie

$$\mathbf{A} \blacktriangleright \mathbf{1.} \quad f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$$

$$\mathbf{2.} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et}$$

$$\text{signe } f'(x) = \text{signe } (1-x)$$

x	0	1	12
$f'(x)$		+	-
f	0	$2e^{-1}$	≈ 0

On a : $f(1) \approx 0,735$. D'après le tableau de variations, l'équation $f(x) = 0,5$ admet deux solutions, α sur $[0 ; 1]$ et β sur $[1 ; 12]$. On a $\alpha \approx 0,36$ et $\beta \approx 2,15$.

B ▶ 1. a) Le taux d'alcoolémie progresse durant la première heure puis diminue les heures suivantes.

b) Le taux d'alcoolémie est maximum au bout d'une heure. Il est alors de $0,74 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$.

2. Le taux d'alcoolémie reprend une valeur conforme à la législation au bout d'un peu plus de 2 h.

63. Chute libre

$$\mathbf{1.} \quad v(0) = 0$$

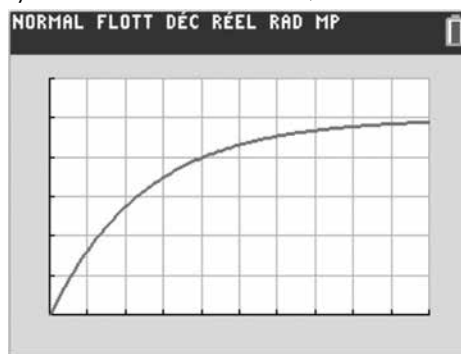
$$\mathbf{2.} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 50$$

$$\mathbf{3.} \quad v'(t) = 10e^{-0,2t} > 0 \text{ pour } t \geq 0.$$

t	0	$+\infty$
$v'(t)$		+
v	0	50

4. La vitesse du parachutisme progresse jusqu'à une valeur limite de $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

5. Traçons la fonction v sur $[0 ; 20]$:



On observe une augmentation rapide puis une diminution de l'augmentation jusqu'à la valeur limite : $50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

64. Bénéfice

1. a) Les abscisses représentent des centaines de litres.

b) Les ordonnées représentent des dizaines d'euros.

2. L'entreprise réalise des bénéfices lorsque le coût est inférieur à la recette, soit à partir d'un peu plus de 300 litres.

3. a) $f(0) = -150e \approx -407,74$

$f(8) = 200 - 150e^{-3} \approx 192,53$

b) $f'(x) = 25 - 75e^{-0,5x+1}$

c) Pour $x \in [0 ; 8]$, $f'(x) > 0$, la fonction f est croissante.

d) Sur $[0 ; 8]$, la fonction f est continue, croissante et change de signe, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution. On trouve $\alpha \approx 3,24$.

e) Par un balayage plus fin, on trouve $\alpha \approx 3,235$.

f) À partir de 324 litres produits et vendus, l'entreprise réalisera un bénéfice.

65. Plant de maïs

1. $\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = a$, donc, comme la hauteur limite est 2 m, on en déduit que $a = 2$.

$$h(0) = 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{1+b} = 0,1 \Leftrightarrow b = 19$$

2. a) Pour $t \geq 0$, la fonction h est continue, croissante et 1,5 est compris entre $h(0)$ et sa valeur limite, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(t) = 1,5$ admet une unique solution t_0 .

b) On peut proposer le programme en Python  suivant.

```
def h(t):
    return 2/(1+19*exp(-0.04*t))
n = 0
while h(n) <= 1.5:
    n = n+1
print (n)
```

On trouve alors 102 jours.

66. Population de grenouilles

1. On dérive la fonction P

$$P'(t) = \frac{1800e^{-0,5t}}{(0,4 + 3,6e^{-0,5t})^2} > 0$$

La fonction P est croissante.

2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 2\,500$

3. On calcule $P(0) = 250$

Pour $t \geq 0$, la fonction P est continue, croissante et 2 000 est compris entre $P(0)$ et la valeur limite, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(t) = 2\,000$ admet une unique solution t_0 .

4. On trouve $t_0 \approx 7,16$.

Au bout de 8 ans la population de grenouilles aura dépassé 2 000.

Exercices Préparer le BAC Je me teste

p. 66

67. **C**

68. **A** et **B**

69. **D**

70. **D**

71. **C**

72. **C**

73. **B**

74. **C**

75. **C**

Exercices Préparer le BAC Je révise

p. 67

76. Asymptote

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

77. Limites

1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$

2. $\mathbb{C}_f$ admet trois asymptotes en -1 , en 2 et en $-\infty$ d'équations respectives $x = -1$, $x = 2$ et $y = 2$.

78. Ensemble de définition et limites

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

79. Calcul de limites (1)

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x-3}{2x-5} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+4}{x^2-4} = +\infty$

80. Calcul de limites (2)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x + 5 = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 5x - 2} = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+5}{x^2+x} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 2} = -\frac{1}{2}$

81. Calcul de limites (3)

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x e^x = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{e^x} = 0$

82. Solution d'une équation

1. $f'(x) = e^x - 1$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	-2	$+\infty$

2. a) Sur $[0 ; +\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et $f(0) = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α .

b) $f(2) \approx 2,39$ et $f(3) \approx 14,09$ donc $\alpha \in [2 ; 3]$

On trouve $\alpha \approx 2,2$ à 10^{-1} près.

83. Étudier une fonction

1. a) $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$

x	0		1		5			
$g'(x)$	0		-		0		+	
g	-1				-2		174	

b) Sur $[0 ; 1[$, $g(x) \leq -1$ donc ne s'annule pas.

Sur $[1 ; 5]$, la fonction g est continue strictement croissante et change de signe donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

c) $g(1) = -1$ et $g(2) = 3$ donc $\alpha \in [1 ; 2]$

On trouve $1,6 \leq \alpha \leq 1,7$.

d) Si $x < \alpha$ alors $g(x) < 0$ et si $x > \alpha$ alors $g(x) > 0$

2. a) $f'(x) = \frac{-1(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{g(x)}{(1+x^3)^2}$

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	0	α	5
$f'(x)$	-	0	+
f	1	$f(\alpha)$	$-\frac{2}{63}$

$f(\alpha) \approx -0,118$

CHAPITRE 3 Convexité

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre permet d'introduire la notion de convexité d'une fonction.

Ainsi, nous avons fait le choix d'activités d'introduction de diverses natures, progressives et qui suivent la trame du cours.

Ceci est accompagné d'exercices au niveau croissant de difficulté et de TP de recherche et d'algorithmique permettant une appropriation progressive des différents contenus par l'élève.

Objectifs

- Calculer la dérivée d'une fonction donnée par une formule simple mettant en jeu opérations algébriques et composition
- Calculer la fonction dérivée, déterminer les limites et étudier les variations d'une fonction construite simplement à partir des fonctions de référence
- Démontrer des inégalités en utilisant la convexité d'une fonction
- Esquisser l'allure de la courbe représentative d'une fonction f à partir de la donnée de tableaux de variations de f , de f' ou de f''
- Lire sur une représentation graphique de f , de f' ou de f'' les intervalles où f est convexe, concave, et les points d'inflexion.

Dans le cadre de la résolution de problème, étudier et utiliser la convexité d'une fonction

II. Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 69

1. Déterminer un nombre dérivé

1. a) Graphiquement, on trouve $f'(0) = -2$, $f(0) = 0$, $f'(1) = 3$ et $f(1) = 0$.

b) Graphiquement, la tangente est horizontale pour $x = -1, 2$ et $x = 0, 6$.

2. $g'(x) = 3x^2$ et $g''(x) = 6x$.

a) $g'(3) = 3 \times 3^2 = 27$

$g'(-3) = 3 \times (-3)^2 = 27$.

On remarque que $g'(-3) = -g'(3)$.

C'est normal car la fonction $x \mapsto 3x^2$ est paire.

b) $g'(a) = 12$ si et seulement si $3a^2 = 12$ si et seulement si $a^2 = 4$ si et seulement si $a = 2$ (abscisse positive).

2. Déterminer une équation de tangente

1. a) $f'(x) = 2x + 3$ donc $f'(2) = 2 \times 2 + 3 = 7$

et $f(2) = 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 11$.

b) $T_2 : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.

$T_2 : y = 7(x - 2) + 11 = 7x - 3$.

2. $g(x) = e^x$ donc $g'(x) = e^x$.

$T_0 : y = g'(0)(x - 0) + g(0)$.

$T_0 : y = 1 \times x + 1$.

$T_0 : y = x + 1$.

3. Calculer des dérivées

a) $f'(x) = \frac{2}{3}(3x^2) + 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

b) $g'(x) = 4 - 7\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4 + \frac{7}{x^2}$

c) $h'(x) = e^x + xe^x = e^x(x + 1)$

d)
$$i'(x) = \frac{(2xe^x + x^2e^x)(x+5) - (x^2e^x + 3) \times (1)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{(2x^2e^x + 10xe^x + x^3e^x + 5x^2e^x) - (x^2e^x + 3)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{2x^2e^x + 10xe^x + x^3e^x + 5x^2e^x - x^2e^x - 3}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{6x^2e^x + 10xe^x + x^3e^x - 3}{(x+5)^2}$$

4. Étudier des tableaux de signes

1. Voici le tableau de signes de $f \times g$.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
Signe de $f(x)$	-	-	0	+
Signe de $g(x)$	-	0	+	+
Signe de $f(x) \times g(x)$	+	0	-	+

2. $h(x) = (x - 3)(x + 3)(3x + 4)$

D'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$	-3	$-\frac{4}{3}$	3	$+\infty$
Signe de $(x - 3)$	-	-	-	0	+
Signe de $(x + 3)$	-	0	+	+	+
Signe de $(3x + 4)$	-	-	0	+	+
Signe de $h(x)$	-	0	+	0	+

5. Calculer la dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$

1. $f'(x) = 3e^{3x+1}$

2. **Attention** : dans l'énoncé il faut lire

$g(x) = \sqrt{-2x + 1}$

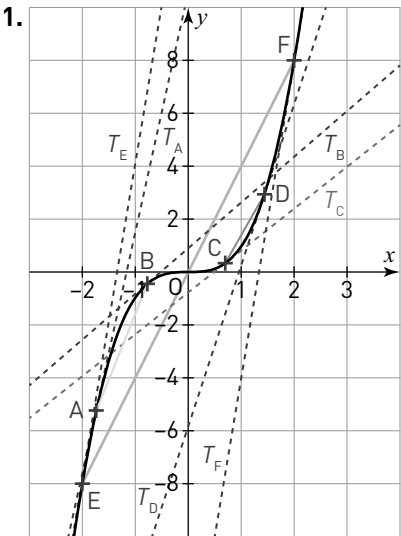
$$g'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{-2x + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{-2x + 1}}$$

Activités

p. 70-71

1. Différencier courbes, sécantes et tangentes

- **Durée estimée** : 15 min
- **Objectif** : Conjecturer des positions relatives de courbes, de sécantes et de tangentes.



2. Voir la représentation graphique ci-dessus. Le segment [AB] est situé en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$.
3. Voir la représentation graphique ci-dessus. Le segment [CD] est situé au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$. Le segment [EF] traverse la courbe $\mathcal{C}_f$.
4. Les tangentes T_A , T_B et T_C sont au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$. Les tangentes T_D , T_E et T_F sont en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$.
5. Il existe un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$ ici, il s'agit de l'origine du repère.
- 6.

Sur $]-\infty ; 0]$	Sur $[0 ; +\infty[$
• Les sécantes sont en-dessous de $\mathcal{C}_f$. • Les tangentes sont au-dessus de $\mathcal{C}_f$.	• Les tangentes sont en-dessous de $\mathcal{C}_f$. • Les sécantes sont au-dessus de $\mathcal{C}_f$.

Avec un point d'inflexion d'abscisse 0.

2. Étudier une fonction de production – (Thème 1)

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Étudier différentes fonctions et leurs particularités.

1. a) $\frac{f(0) + f(20)}{2} = \frac{0 + 20\sqrt{20}}{2} = 10\sqrt{20} \approx 44,72 < 50.$

La stratégie ne semble pas efficace.

b) $\frac{f(10) + f(10)}{2} = \frac{20\sqrt{10} + 20\sqrt{10}}{2} = 20\sqrt{10} \approx 63,25 > 50.$

La stratégie semble efficace.

c) Si on trace la courbe représentative de la fonction f et les points $A(4 ; f(4))$ et $B(16 ; f(16))$ alors le point M de coordonnées :

$M(t \times 4 + (1 - t) \times 16 ; f(t \times 4 + (1 - t) \times 16))$ est situé au-dessus du point N de coordonnées :

$N(t \times 4 + (1 - t) \times 16 ; tf(4) + (1 - t) \times f(16)).$

Donc $f(t \times 4 + (1 - t) \times 16) \geq tf(4) + (1 - t)f(16).$

Autre méthode :

$tf(4) = 40t$ et $(1 - t)f(16) = (1 - t)80 = 80 - 80t$

Donc $tf(4) + (1 - t)f(16) = 80 - 40t$

De plus :

$f(4t + 16(1 - t)) = f(16 - 12t) = 20\sqrt{16 - 12t}$

Soit g la fonction définie par :

$g(t) = 20\sqrt{16 - 12t} - (80 - 40t).$

Alors $g'(t) = 40 + \frac{20(-12)}{2\sqrt{16 - 12t}} = 40 - \frac{120}{\sqrt{16 - 12t}}.$

$40 - \frac{120}{\sqrt{16 - 12t}} \geq 0$

si et seulement si $\frac{40}{120} \geq \frac{1}{\sqrt{16 - 12t}}$

si et seulement si $\sqrt{16 - 12t} \geq \frac{120}{40}$

si et seulement si $\sqrt{16 - 12t} \geq 3$

si et seulement si $16 - 12t \geq 9$

si et seulement si $7 \geq 12t$

si et seulement si $t \leq \frac{7}{12}.$

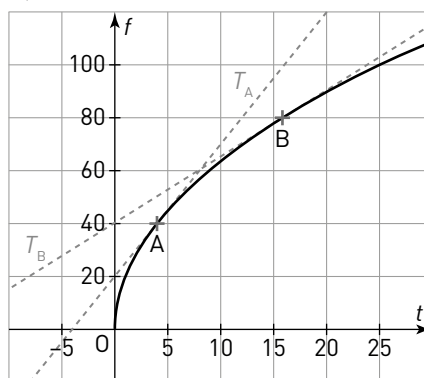
D'où le tableau de variations suivant.

t	0	$\frac{7}{12}$	1
Signe de $g'(t)$	+	0	-
Variation de g			

Donc $g(t) \geq 0$ sur $[0 ; 1]$

D'où $f(t \times 4 + (1 - t) \times 16) \geq tf(4) + (1 - t)f(16).$

d)



Les tangentes sont situées au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. a) $\frac{f(0) + f(20)}{2} = \frac{0 + \frac{4}{25} \times 20^2}{2} = 32 < 50.$

La stratégie ne semble pas efficace.

b) $\frac{f(10) + f(10)}{2} = \frac{\frac{4}{25} \times 10^2 + \frac{4}{25} \times 10^2}{2} = 16 < 50.$

La stratégie ne semble pas efficace.

c) Si on trace la courbe représentative de la fonction f et les points $A(4 ; f(4))$ et $B(16 ; f(16))$ alors le point M de coordonnées :

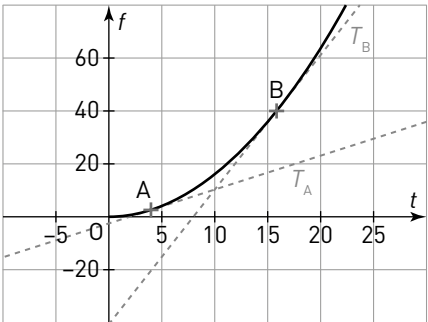
$M(t \times 4 + (1 - t) \times 16 ; f(t \times 4 + (1 - t) \times 16))$

est situé en-dessous du point N de coordonnées :

$N(t \times 4 + (1 - t) \times 16 ; tf(4) + (1 - t) \times f(16))$

Donc $f(t \times 4 + (1 - t) \times 16) \leq tf(4) + (1 - t)f(16).$

d)



Les tangentes sont situées en-dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$.

3. Cela dépend de la modélisation.

Dans la première modélisation, la deuxième stratégie semblait efficace.

Dans la deuxième modélisation, la deuxième stratégie était moins efficace que la première, elle donnait même des résultats moindres. Les fonctions des questions 1. et 2. ne présentent pas la même orientation de courbe. La première courbe est orientée vers le bas, la seconde courbe est orientée vers le haut, ce qui donne des valeurs pour $f(10)$ très différentes !

Par la suite, nous verrons que la première fonction est concave et la deuxième fonction est convexe.

3. Manipuler dérivées première et seconde

• **Durée estimée :** 10 min

• **Objectif :** Faire le lien entre convexité et les fonctions dérivée première et dérivée seconde.

1. a) $f'(x) = 3x^2$.

b) Tableaux de signes et de variations de la fonction f' .

$3 \geq 0$ et $x^2 \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$ d'où :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de f'	+	

La fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.

La multiplication par 3 (positif) ne change pas ces variations, d'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f'	$+\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$		

2. $f''(x) = 6x$.

f'' est positive sur $[0 ; +\infty[$ et négative sur $]-\infty ; 0]$.

3.

x appartient à l'intervalle	$]-\infty ; 0]$	$[0 ; +\infty[$
Sécantes	En dessous de $\mathcal{C}_f$	Au-dessus de $\mathcal{C}_f$
Tangentes	Au-dessus de $\mathcal{C}_f$	En dessous de $\mathcal{C}_f$
Variations de $f'(x)$	Décroissante	Croissante
Signe de $f''(x)$	Négatif	Positif
Fonction $f...$	Concave	Convexe

4. Il existe un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$ ici, il s'agit de l'origine du repère.

4. Reconnaître une courbe de Lorenz – (Thème 5)

• **Durée estimée :** 25 min

• **Objectif :** Étudier des fonctions ayant des propriétés particulières.

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) } f'(x) &= \frac{3}{2} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{3(x^2 + 2x + 1) - 2}{2(x+1)^2} \\ &= \frac{3x^2 + 6x + 1}{2(x+1)^2} = \frac{\left(x + \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right)(3x + 3 - \sqrt{6})}{2(x+1)^2} \end{aligned}$$

b) $f'(x) \geq 0$ sur $[0 ; 1]$ donc f est croissante sur $[0 ; 1]$.

x	0	1
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f	$0 \rightarrow 1$	

$$f(0) = \frac{3}{2} \times 0 + \frac{1}{0+1} - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f(1) = \frac{3}{2} \times 1 + \frac{1}{1+1} - 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x - f(x) &= x - \frac{3}{2}x - \frac{1}{x+1} + 1 \\ &= \frac{2x(x+1) - 3x(x+1) + 2(x+1)}{2(x+1)} \\ &= \frac{-x^2 + x}{2(x+1)} = \frac{-x(x-1)}{2(x+1)} \end{aligned}$$

Sur $[0 ; 1]$, $-x$ et $x - 1$ sont négatifs, 2 et $x + 1$ sont positifs donc $x - f(x) \geq 0$ c'est-à-dire $x \geq f(x)$ sur $[0 ; 1]$.

2. a) $g'(x) = e^x - (e - 2) = e^x - e + 2$. Or pour $x \geq 0$, $e^x \geq 1$ donc $e^x - e + 2 \geq 1 - e + 2 = 3 - e$. Or $3 - e \geq 0$ donc $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante sur $[0 ; 1]$.

b) $g(0) = e^0 - (e - 2) \times 0 - 1 = 0$

$g(1) = e^1 - (e - 2) \times 1 - 1 = e - e + 2 - 1 = 1$

c)

x	0	$\ln(e - 1)$	1
Signe de $h'(x)$	+	0	-
Variations de h			

$$h(\ln(e - 1)) = \ln(e - 1) - e^{\ln(e - 1)} + (e - 2)\ln(e - 1) + 1 \\ = (e - 1)\ln(e - 1) - (e - 1) + 1 \approx 0,2$$

Donc $h(x) \geq 0$ donc $x - g(x) \geq 0$ c'est-à-dire, pour tout réel $x \in [0 ; 1]$, $g(x) \leq x$.

3. Chaque fonction (f ou g) vérifie les trois conditions énoncées plus haut dans l'activité. Ce sont donc bien toutes deux des courbes de Lorenz.

À vous de jouer !

p. 73-79

1. D'après le graphique, la courbe de f est en-dessous de ses sécantes sur $[-1 ; 0,5]$ et est au-dessus de ses sécantes sur $[0,5 ; 1,5]$.
Donc f est convexe sur $[-1 ; 0,5]$ et concave sur $[0,5 ; 1,5]$.

2. f est concave sur $[-1 ; 0,25]$ et convexe sur $[0,25 ; 1,5]$.

3. f est convexe sur $[-20 ; -7,5]$ et concave sur $[-7,5 ; 2,5]$.

4. f est concave sur $[-20 ; -10]$ et convexe sur $[-10 ; 2,5]$.

5. f' est décroissante sur $]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$ donc f est concave sur cet intervalle.

f' est croissante sur $[0 ; 1]$ donc f est convexe sur cet intervalle.

6. f' est décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{4}\right]$ donc f est concave sur cet intervalle.

f' est croissante sur $\left[\frac{1}{4} ; +\infty\right[$ donc f est convexe sur cet intervalle.

7. $f(x) = xe^{-x}$ donc $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$
et $f''(x) = -e^{-x} + (1 - x)(-e^{-x}) = (x - 2)e^{-x}$

Or $e^{-x} > 0$, pour tout réel x , et $x - 2 \geq 0$ si et seulement si $x \geq 2$.

Donc $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 2$ et $f''(x) \leq 0$ si et seulement si $x \leq 2$.

Donc f est convexe sur $[2 ; +\infty[$ et f est concave sur $]-\infty ; 2]$.

$$\mathbf{8.} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3e^{x+2} \text{ et } f''(x) = \frac{-\sqrt{x}}{4x^2} - 3e^{x+2} \leq 0$$

donc f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

9. Graphiquement, la courbe présente un point d'inflexion au point d'abscisse $x = 0,7$.
Le point d'inflexion est $A(0,7 ; 0,7)$.

10. Graphiquement, la courbe présente un point d'inflexion au point de coordonnées $(-2 ; 1)$.

11. $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ donc
 $f'(x) = e^{-x} + (x + 1)(-e^{-x}) = (1 - x - 1)e^{-x} = -xe^{-x}$
et $f''(x) = -1e^{-x} + (x)e^{-x} = e^x(x - 1)$

Or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x , donc f'' change de signe pour $x = 1$.

Donc le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées $(1 ; f(1))$ c'est-à-dire $(1 ; 2e^{-1})$.

$$\mathbf{12.} \quad f(x) = \frac{e^x}{x} \text{ donc } f'(x) = \frac{(x - 1)e^x}{x^2} \\ \text{et } f''(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x}{x^3}$$

Or $e^{-x}(x^2 - 2x + 2) > 0$ pour tout réel x , donc f'' a le même signe que x .

Elle changerait de signe pour $x = 0$ mais n'est pas définie en 0.

Donc il n'y a pas de point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.

13. a) et b) Graphiquement, h est concave sur $[0 ; +\infty[$ et convexe sur $]-\infty ; 0]$.

c) Le point d'inflexion a pour coordonnées $(0 ; h(0))$.

14. a) et b) g est tout le temps concave.

c) Il n'y a pas de point d'inflexion.

$$15. f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} ; f'(x) = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\text{et } f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}. f'' \text{ change de signe pour } x = 1$$

donc la croissance commence à ralentir au bout du 1^{er} mois, c'est-à-dire à partir du 1^{er} février 2020.

$$16. f'(x) = e^x - \frac{1}{x^2} \text{ et } f''(x) = e^x + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ sur }]0 ; +\infty[.$$

Donc f' est strictement croissante.

La vitesse de production ne diminue jamais.

Exercices apprendre à démontrer p. 80

Pour s'entraîner

Soit f une fonction deux fois dérivable, f' sa dérivée première et f'' sa dérivée seconde.

On admet que f'' est négative sur un intervalle I .

Soit ϕ la fonction définie sur I par :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)) \\ &= f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 - f(x_0). \end{aligned}$$

ϕ est dérivable comme somme de fonctions dérivables et, en notant ϕ' sa dérivée, on obtient :

$$\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0) + 0 - 0 = f'(x) - f'(x_0)$$

Or f'' est négative sur I donc f' est décroissante sur I . D'où :

• Si $x \geq x_0$ alors $f'(x) \leq f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leq 0$ donc ϕ est décroissante sur $[x_0 ; +\infty[$.

• Si $x \leq x_0$ alors $f'(x) \geq f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geq 0$ donc ϕ est croissante sur $]-\infty ; x_0]$.

Donc ϕ admet un maximum pour $x = x_0$ et ce maximum est égal à :

$$\phi(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)x_0 + f'(x_0)x_0 - f(x_0) = 0.$$

Donc, pour tout réel x de I , $\phi(x) \leq 0$ donc $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$: la courbe représentative de f est en dessous de ses tangentes.

Donc si f'' est négative, alors la courbe représentative de f est bien en dessous de ses tangentes.

Exercices

calculs et automatismes

p. 81

17. Dérivée seconde

$$1. f'(x) = -3e^{-3x+2}$$

$$\text{et } f''(x) = (-3)^2 e^{-3x+2} = 9e^{-3x+2}$$

$$2. g'(x) = \frac{3}{3x+1} \text{ et } g''(x) = \frac{-9}{(3x+1)^2}$$

18. Dérivée seconde d'une racine

$$1. f'(x) = -\frac{\frac{7}{2\sqrt{7x-1}}}{\sqrt{7x-1}^2} = -\frac{7}{2(\sqrt{7x-1})^3}$$

$$\text{et } f''(x) = -\frac{7}{2} \times \frac{(-3) \times \frac{7}{2\sqrt{7x-1}}}{(\sqrt{7x-1})^4} = \frac{147}{4} \times \frac{1}{(\sqrt{7x-1})^5}$$

$$2. g'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\sqrt{x+2}^2} = -\frac{1}{2(\sqrt{x+2})^3}$$

$$\text{et } g''(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{(-3) \times \frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{(\sqrt{x+2})^4} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{(\sqrt{x+2})^5}$$

19. Convexité (1)

D'après le graphique, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont représentatives de fonctions convexes.

20. Somme de deux fonctions convexes

Vrai. Soit $h = f + g$ avec f et g deux fonctions convexes. Alors, pour tout réel x vérifiant les conditions de définition des trois fonctions :

$$h''(x) = f''(x) + g''(x) \geq 0 \text{ donc } h \text{ est aussi convexe.}$$

21. Convexité (2)

Vrai. Si f est convexe alors $f''(x) \geq 0$ donc $-f''(x) \leq 0$ donc $-f$ est concave.

22. Fonctions

Vrai. Les fonctions affines ont leur dérivée seconde nulle, donc à la fois positive et négative et donc elles sont à la fois convexes et concaves.

23. Exemples de fonctions convexes et concaves

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, la fonction racine est concave sur $\mathbb{R}_+$.

24. Exemple de point d'inflexion

La fonction cube est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$, elle présente un point d'inflexion à l'origine du repère.

25. Cube

Réponses **a** et **d**

La fonction a pour dérivée $x \mapsto 3x^2$ et pour dérivée seconde $x \mapsto 6x$.

Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$, puisque la dérivée y est positive.

Elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$, puisque la dérivée seconde y est positive et concave sur $\mathbb{R}_-$, puisque la dérivée seconde y est négative.

26. Racine carrée

Réponses **a** et **d**

La fonction a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et pour dérivée

seconde $x \mapsto \frac{-\sqrt{x}}{4x^2}$. Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$,

puisque la dérivée y est positive, et concave sur $\mathbb{R}_+$, puisque la dérivée seconde y est négative.

27. Puissance

Réponses **b** et **d**

La fonction a pour dérivée $x \mapsto -10x^4$ et pour dérivée seconde $x \mapsto -40x^3$.

Elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, puisque la dérivée y est négative, et concave sur $\mathbb{R}_+$ puisque la dérivée seconde y est négative.

28. Point d'inflexion

Réponse **a**

La fonction a pour dérivée $x \mapsto 3(x-2)^2$ et pour dérivée seconde $x \mapsto 6(x-2)$. La dérivée seconde change de signe pour $x=2$ donc la fonction admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

29. Graphiquement

On peut déterminer graphiquement la convexité d'une fonction en utilisant la méthode des sécantes ou la méthode des tangentes.

Les points d'inflexion sont les points où la courbe change de convexité/concavité.

30. Algébriquement

On peut déterminer algébriquement la convexité d'une fonction en dérivant deux fois la fonction et en étudiant le signe de la dérivée seconde.

Si ce signe est positif sur un intervalle I alors la fonction y est convexe.

Et, respectivement, si ce signe est négatif sur un intervalle I alors la fonction y est concave.

Exercices d'application

p. 82-83

Lire les intervalles

où f est convexe ou concave

31. f est concave sur $[-2 ; -1]$ et convexe sur $[-1 ; +\infty[$.

32. f est convexe sur $[-3 ; 0]$ et concave sur $[0 ; 2]$. g est concave sur $[-6 ; -3]$ et convexe sur $[-3 ; 0]$.

33. f est convexe sur $[-5 ; -1]$ et concave sur $[-1 ; 4]$. g est concave sur $[-4 ; 1]$ et convexe sur $[1 ; 4]$.

34. f est concave sur $[-4 ; 2]$ et convexe sur $[2 ; 7]$. g est convexe sur $[0 ; 5]$ et concave sur $[5 ; 10]$.

Étudier la convexité de f à partir des variations de f'

35. f' est croissante sur $]-\infty ; 6]$ et f' est décroissante sur $[6 ; +\infty[$ donc f est convexe sur $]-\infty ; 6]$ et f est concave sur $[6 ; +\infty[$.

36. 1. f' est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et f' est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

2. f est concave sur $]-\infty ; 0]$ et f est convexe sur $[0 ; +\infty[$.

37. Attention : dans l'énoncé il faut lire que l'on donne le tableau de variations de f et dans le tableau lire « Variations de f » et non « Variations de f ».

f est concave sur $] -\infty ; 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [2 + \frac{1}{\sqrt{3}} ; +\infty [$ et

f est convexe sur $\left[2 - \frac{1}{\sqrt{3}} ; 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$.

$$\begin{aligned} 38. 1. f'(x) &= -24x^2 + 480x - 2\,400 \\ &= -24(x^2 - 20x + 100) \\ &= -24(x - 10)^2 \end{aligned}$$

2. $x \mapsto (x - 10)^2$ est décroissante sur $] -\infty ; 10]$ et croissante sur $[10 ; +\infty[$. Donc f' est croissante sur $] -\infty ; 10]$ et décroissante sur $[10 ; +\infty[$.

3. f est convexe sur $] -\infty ; 10]$ et concave sur $[10 ; +\infty[$.

$$39. a) f'(x) = 2 \times 3 \times (3x - 7)^{2-1} = 6(3x - 7)$$

$$b) f'(x) = -\frac{2}{2\sqrt{-2x+7}} = -\frac{1}{\sqrt{-2x+7}}$$

$$c) f'(x) = 7e^{7x-2}$$

$$d) f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}$$

$$\begin{aligned} 40. a) f'(x) &= 2 \times (10x - 4) \times (5x^2 - 4x + 2)^{2-1} \\ &= 4(5x - 2)(5x^2 - 4x + 2) \end{aligned}$$

$$b) f'(x) = 2 \times \left(-\frac{3}{(3x-2)^2} \right) \times \left(\frac{1}{3x-2} \right) = -\frac{6}{(3x-2)^3}$$

$$c) f'(x) = 2 \times (-2x)(4 - x^2) = 4x(x^2 - 4)$$

$$d) f'(x) = (10x - 4)e^{5x^2-4x+2}$$

$$e) f'(x) = -\frac{3}{(3x-2)^2} e^{\frac{1}{3x-2}}$$

$$f) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$41. a) f'(x) = 4 - 2e^{-2x+3}$$

$$\begin{aligned} b) f'(x) &= \frac{2(3x^2)(x^3+1)(x-1) - (x^3+1)^2 \times 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x^3+1)(6x^3 - 6x^2 - x^3 - 1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x^3+1)(5x^3 - 6x^2 - 1)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$c) f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$d) f'(x) = \frac{3e^{3x} + 3e^{-3x}}{2} = \frac{3}{2}(e^{3x} + e^{-3x})$$

Étudier la convexité de f à partir du signe de f''

$$42. f'(x) = 3x^2 + 12x \text{ et } f''(x) = 6x + 12$$

$$f''(x) \geq 0 \text{ si et seulement si } 6x + 12 \geq 0$$

$$\text{si et seulement si } x \geq -\frac{12}{6}$$

$$\text{si et seulement si } x \geq -2.$$

Donc f est convexe sur $[-2 ; +\infty[$.

$$43. f'(x) = \frac{-(x+1) - (3-x)}{(x+1)^2} = \frac{-4}{(x+1)^2}$$

$$\text{et } f''(x) = \frac{(-4)(-2)}{(x+1)^3} = \frac{8}{(x+1)^3}$$

$$\text{Donc } f''(x) \geq 0 \text{ si et seulement si } x > -1.$$

Donc f est convexe sur $]-1 ; +\infty[$.

$$44. 1. f'(x) = 5 - \frac{1}{x^2} \text{ et } f''(x) = 0 - \frac{-2}{x^3} = \frac{2}{x^3}.$$

$$\text{Donc } f''(x) \geq 0 \text{ si et seulement si } x > 0.$$

2. Donc f est convexe sur $]0 ; +\infty[$.

$$45. 1. f''(x) \leq 0 \text{ si et seulement si } x \in [-4 ; 4] \text{ et } f''(x) \geq 0 \text{ si et seulement si } x \in]-\infty ; -4] \cup [4 ; +\infty[.$$

$$2. \text{ Donc } f \text{ est convexe sur }]-\infty ; -4] \cup [4 ; +\infty[$$

et concave sur $[-4 ; 4]$.

$$46. 1. f'(x) = \frac{-9\sqrt{x} + 6}{2} \text{ et } f''(x) = \frac{-9}{4\sqrt{x}} \leq 0$$

$$2. a) f''(x) \leq 0 \text{ donc } f \text{ est concave sur } \mathbb{R}_+^*.$$

b) f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sa courbe représentative est située au-dessus de ses sécantes et en dessous de ses tangentes.

Lire les points d'inflexion sur une représentation graphique

47. $\mathcal{C}_f$ a pour points d'inflexion les points d'abscisses -2 et 2.

48. $\mathcal{C}_f$ a pour points d'inflexion les points d'abscisses -1 et 1.

49. $\mathcal{C}_g$ a pour points d'inflexion les points d'abscisses -0,7 et 1.

Déterminer algébriquement les coordonnées des points d'inflexion

50. 1. Tableau de signes de $f''(x)$:

x	$-\infty$	4	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	+	0	-

2. Le point d'inflexion de la courbe représentative de f a pour abscisse 4 et pour ordonnée

$$6 + (6 - 4)e^{4-5} = 6 + 2e^{-1}.$$

51. 1. $f'(x) = 7(-x + 1)e^{-x}$

$f'(x) \geq 0$ si et seulement si $-x + 1 \geq 0$ si et seulement si $1 \geq x$.

Donc f est croissante sur $]-\infty ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

2. $f''(x) = 7(x - 2)e^{-x}$

3. $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x - 2 \geq 0$ si et seulement si $x \geq 2$.

Donc f est concave sur $]-\infty ; 2]$ et convexe sur $[2 ; +\infty[$. De plus $f(2) = \frac{14}{e^2}$.

Le point d'inflexion a pour coordonnées $\left(2; \frac{14}{e^2}\right)$.

52. 1. $f'(x) = (x + 1)^2 e^x$. $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f''(x) = (x + 1)(x + 3)e^x$

3. $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty ; -3] \cup [-1 ; +\infty[$ et $f''(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in [-3 ; -1]$.

$$\text{De plus } f(-3) = \frac{10}{e^3} \text{ et } f(-1) = \frac{2}{e}.$$

Les points d'inflexion de la courbe ont pour coordonnées $\left(-3; \frac{10}{e^3}\right)$ et $\left(-1; \frac{2}{e}\right)$.

$$53. 1. f'(x) = -\left(x + \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\right)\left(x + \frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right)e^{-x}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ si et seulement si } x \in \left[-\frac{5 - \sqrt{21}}{2}; -\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right]$$

donc f est croissante sur $\left[-\frac{5 - \sqrt{21}}{2}; -\frac{5 + \sqrt{21}}{2}\right]$ et décroissante sinon.

$$g'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 2}}$$

$g'(x) \geq 0$ pour tout réel x de $[-2^{\frac{1}{3}}; +\infty[$.

Donc g est croissante sur $[-2^{\frac{1}{3}}; +\infty[$.

2. a) $f''(x) = (x - 1)(x + 4)e^{-x}$

$$g'(x) = \frac{3x(x^3 + 8)\sqrt{x^3 + 2}}{4(x^3 + 2)^2}$$

b) $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty ; -4] \cup [1 ; +\infty[$ et $f''(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in [-4 ; 1]$.

$$\text{De plus } f(-4) = -4e^4 \text{ et } f(1) = \frac{16}{e}.$$

Les points d'inflexion de la courbe ont pour coordonnées $(-4; -4e^4)$ et $\left(1; \frac{16}{e}\right)$.

$g''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [0 ; +\infty[$ et $g''(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in [-2^{\frac{1}{3}}; 0]$.

$$\text{De plus, } g(0) = \sqrt{2}.$$

Le point d'inflexion de la courbe a pour coordonnées $(0; \sqrt{2})$.

54. 1. $f''(x) = 20x^3 + 100x^2 + 40x - 160$.

2. En développant l'expression

$20(x - 1)(x + 2)(x + 4)$, on retrouve le résultat précédent.

3. $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [-4 ; -2] \cup [1 ; +\infty[$ et $f''(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty ; -4] \cup [-2 ; 1]$.

$$\text{De plus } f(-4) = -\frac{1885}{3}, f(-2) = -287 \text{ et } f(1) = -55.$$

Donc les points d'inflexion ont pour coordonnées $\left(-4; -\frac{1885}{3}\right)$, $(-2; -287)$ et $(1; -55)$.

Exercices d'entraînement

p. 84-85

Reconnaître une fonction convexe, concave, un point d'inflexion sur une représentation graphique

55. f est convexe sur $\left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ et concave sur $[0; \pi]$.

g est convexe sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ et concave sinon.

56. 1. f est convexe sur $[4; 10]$ et concave sur $[-1,8; 4]$.

2. Le point d'inflexion a pour abscisse 4.

Étudier la convexité de f à partir de f' ou de f''

$$57. 1. f'(x) = 1 \times e^{0,4x} + (x - 2,5) \times 0,4e^{0,4x} \\ = 0,4 \left(\frac{1}{0,4} + x - 2,5 \right) e^{0,4x} = 0,4xe^{0,4x}$$

$$2. f''(x) = 0,4e^{0,4x} + 0,4x \times 0,4e^{0,4x} \\ = (0,4 + 0,16x)e^{0,4x} = \frac{2}{25}(2x + 5)e^{0,4x}$$

3. $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $2x + 5 \geq 0$ si et seulement si $x \geq -\frac{5}{2}$. Donc f est convexe sur $\left[-\frac{5}{2}; 7\right]$ et concave sur $\left[-5; -\frac{5}{2}\right]$.

$$58. 1. g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \text{ et } g''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

2. $g''(x) \leq 0$ si et seulement si $x + 1 \geq 0$ si et seulement si $x \geq -1$. Donc g est concave sur $[0; +\infty[$.

$$59. 1. f'(x) = \frac{(e^x - 6)(2e^x - 3)}{(e^x - 3)^2} \text{ et } f''(x) = \frac{3e^x(e^x + 3)}{(e^x - 3)^3}$$

Or, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln(3)\}$, $3e^x(e^x + 3) > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est celui de $(e^x - 3)^3$

c'est-à-dire celui de $(e^x - 3)$.

Donc $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $e^x - 3 \geq 0$ si et seulement si $e^x \geq 3$ si et seulement si $x \geq \ln(3)$.

2. $f''(x)$ changerait de signe pour $x = \ln(3)$.

Or $\ln(3)$ ne fait pas partie du domaine de définition de f ni de celui de f'' .

Il n'y a donc pas de point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.

$$60. 1. f'(x) = (-5x + 5)e^{-x} \text{ et}$$

$$f''(x) = (5x - 10)e^{-x} = 5(x - 2)e^{-x}$$

2. $f''(x) \leq 0$ si et seulement si $x - 2 \leq 0$ si et seulement si $x \leq 2$.

Donc f est concave sur $]-\infty; 2]$.

$$61. 1. f'(x) = 1 + (16x + 52)e^{-0,5x} + (8x^2 + 52x + 88)(-0,5)e^{-0,5x} \\ = e^{-0,5x}(-4x^2 - 10x + 8) + 1$$

$$\text{et } f''(x) = e^{-0,5x}(-0,5)(-4x^2 - 10x + 8) + e^{-0,5x}(-8x - 10) \\ = e^{-0,5x}(2x^2 - 3x - 14) \\ = (x + 2)(2x - 7)e^{-0,5x}$$

2. $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [-4; -2] \cup [3,5; 10]$.

Donc f est convexe sur $[-4; -2] \cup [3,5; 10]$ et concave sur $[-2; 3,5]$.

$$62. 1. f'(x) = 2(x + 1)e^{-x}$$

$$\text{et } f''(x) = 2(1)e^{-x} + 2(x + 1)(-1)e^{-x} \\ = -2xe^{-x}$$

2. $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \leq 0$.

De plus $f(0) = -4$. Donc le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ a pour coordonnées $(0; -4)$.

$$63. 1. g'(x) = (x + 1)e^x$$

$$\text{et } g''(x) = (1)e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$$

2. $g''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq -2$.

$$\text{De plus } g(-2) = -\frac{2}{e^2}.$$

Donc le point d'inflexion de $\mathcal{C}_g$ a pour coordonnées

$$\left(-2; -\frac{2}{e^2}\right).$$

$$64. 1. h'(x) = (x + 1)e^x$$

$$\text{et } h''(x) = (1)e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$$

2. $h''(x) < 0$ car $-1 < 0$, $x^2 - 1 > 0$ et $\sqrt{x^2 - 1} > 0$.

Donc il n'y a pas de point d'inflexion pour $\mathcal{C}_h$.

65. $f''(x) = x(x-7)(x+2)e^x$.

Or $f(0) = -26$, $f(7) = -54e^7$ et $f(-2) = -\frac{126}{e^2}$.

Donc les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ ont pour

coordonnées $(0 ; -26)$, $(7 ; -54e^7)$ et $(-2 ; -\frac{126}{e^2})$.

66. 1. $g'(x) = \frac{2\sqrt{x} + 3x}{x}$ et $g''(x) = \frac{-\sqrt{x}}{x^2} < 0$

2. Comme $g''(x)$ ne change jamais de signe, $\mathcal{C}_g$ n'admet pas de point d'inflexion.

67. f' est croissante sur $]-3 ; -2] \cup [0 ; 1]$ donc f est convexe sur cet intervalle.

f' est décroissante sur $]-2 ; 0]$ donc f est concave sur cet intervalle.

68. $f''(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty ; -7] \cup [3 ; +\infty[$ et $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [-7 ; 3]$.

Donc f est concave sur $]-\infty ; -7] \cup [3 ; +\infty[$ et convexe sur $[-7 ; 3]$.

69. $f''(x) = m^2 e^{mx} \geq 0$ donc f est convexe quelque soit la valeur de m .

70. **Attention :** dans l'énoncé et dans la question 1 l'intervalle est $\mathbb{R}$.

1. $f''(x) = e^{-x+1} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. La courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes et en dessous de ses sécantes.

71. **Attention :** dans l'énoncé et dans la question 1 l'intervalle est $\mathbb{R}^+$.

1. $g''(x) = \frac{-8\sqrt{x} - x^2}{4x^3\sqrt{x}} \leq 0$ sur $\mathbb{R}^+$

Donc g est concave sur $\mathbb{R}^+$.

2. La courbe représentative de g est au-dessus de ses sécantes et en dessous de ses tangentes.

72. 1. $f''(x) = \frac{1200\sqrt{3}(2x-27)}{(4x^2-108x+1029)^2}$

2. $f''(x)$ change de signe pour $x = \frac{27}{2} = 13,5$.

Donc le point d'inflexion a pour coordonnées $(13,5 ; f(13,5))$.

3. En ce point, $f'(13,5) = -\sqrt{3}$. Il s'agit du coefficient directeur de la tangente en ce point. Si $\tan \alpha = -\sqrt{3}$

alors $\alpha \approx -\frac{\pi}{3}$ c'est-à-dire à un angle de 60° .

4. La vitesse est maximale pour $x = 13,5$.

Exercices bilan

p. 86

73. Composition de fonctions et de limites

A ► 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $f'(2) = 0$.

2. a) $f'(x) = -x(x-2)e^{-x+1}$

b) $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [0 ; 2]$. Donc f est croissante sur $[0 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; +\infty[$.

c)

x	0	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	0	$\frac{4}{e}$	0

d) $T_4 : y = f'(4)(x-4) + f(4)$

$T_4 : y = -8e^{-3}(x-4) + 16e^{-3}$

$T_4 : y = -8e^{-3}x + 48e^{-3}$

3. a) $f''(x) = (x - \sqrt{2} - 2)(x + \sqrt{2} - 2)e^{-x+1}$.

b) $f''(x) \geq 0$ si $x \in [0 ; -\sqrt{2} + 2] \cup [\sqrt{2} + 2 ; +\infty[$.

Donc f est convexe sur $[0 ; -\sqrt{2} + 2] \cup [\sqrt{2} + 2 ; +\infty[$

et concave sur $[-\sqrt{2} + 2 ; \sqrt{2} + 2]$.

c) $f''(x)$ change de signe pour $x \in \{-\sqrt{2} + 2 ; \sqrt{2} + 2\}$.

Donc les points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sont ceux d'abscisses $-\sqrt{2} + 2$ et $\sqrt{2} + 2$.

B ► 1. $g'(x) = -f'(x)e^{-f(x)} = x(x-2)e^{-x+1}e^{x^2e^{-x+1}}$

2. $g'(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in [0 ; 2]$. Donc g est décroissante sur $[0 ; 2]$ et croissante sur $[2 ; +\infty[$.

x	0	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Variations de g	1	$\frac{1}{e^e}$	1

3. Attention : cette question a été modifiée en
« Exprimer $g''(x)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x)$ et $f''(x)$ ».

$$g''(x) = -f''(x)e^{-f(x)} + (-f'(x))^2 e^{-f(x)} \\ = e^{-f(x)} \{-f''(x) + f'(x)^2\}.$$

4. Attention : on demande de discuter de la convexité ou de la concavité de la fonction g .
Si f est concave alors g est convexe (car g'' est positive). Donc on peut seulement affirmer que g est convexe sur $[-\sqrt{2} + 2; \sqrt{2} + 2]$.

C ▶ 1. $h(x) = \sqrt{f(x)} = xe^{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$ et $h'(x) = \frac{1}{2}(-x + 2)e^{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$.

2. $h'(x) \geq 0$ si et seulement si $-x + 2 \geq 0$
si et seulement si $2 \geq x$.

D'où le tableau de variations suivant.

x	0	2	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	0	-
Variations de h			

3. $h''(x) = \frac{1}{4}(x - 4)e^{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$

4. $h''(x)$ change de signe pour $x = 4$. Or $h(4) = 4e^{-\frac{3}{2}}$.
Donc le point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h a pour coordonnées $\left(4; 4e^{-\frac{3}{2}}\right)$.

74. Exponentielle de fonctions

1. a) $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ et $f'(3) = 0$.

b) f semble concave sur $]-1; 2]$ et convexe sur $[2; +\infty[$.

c) f semble avoir pour point d'inflexion le point de coordonnées $(2; 0,6)$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0$

b) La fonction exponentielle étant une fonction croissante, les variations de g sont celles de f .

x	-1	1	3	$+\infty$
Variations de g				

c) $g'(1) = f'(1)e^{f(1)} = 0$ et $g'(0) = f'(0)e^{f(0)} = 3e^1 = 3e$.

75. Convexité d'une fonction

1. a) $f'(x) = 1e^{x^2-1} + x(2x)e^{x^2-1} = (1 + 2x^2)e^{x^2-1}$

b) $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a) $f'(x) = 4xe^{x^2-1} + (1 + 2x^2)(2x)e^{x^2-1}$
 $= (6x + 4x^3)e^{x^2-1} = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$

b) $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$.

3. a) $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$T_a : y = (2a^2 + 1)e^{a^2-1}(x - a) + ae^{a^2-1}$

$T_a : y = (2a^2 + 1)e^{a^2-1}x + (-2a^3 - a + a)e^{a^2-1}$

$T_a : y = (2a^2 + 1)e^{a^2-1}x - 2a^3e^{a^2-1}$

b) **Attention** : on demande de montrer que T_0 traverse la courbe en 0 et de conclure.

De ce qui précède, on obtient : $T_0 : y = \frac{1}{e}x$.

Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - \frac{1}{e}x$

$$g'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1} - \frac{1}{e} = \frac{(2x^2 + 1)e^{x^2} - 1}{e}$$

$$g''(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1} - \frac{1}{e} = \frac{f''(x)}{e}$$

Or $f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 0$. Donc :

- si $x \geq 0$ alors $g''(x) \geq 0$ et g' est strictement croissante.

Or $g'(0) = 0$ donc $g'(x) \geq 0$ donc g est croissante.

Or $g(0) = 0$ donc g est positive.

Donc $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de T_0 pour $x \geq 0$.

- si $x \leq 0$ alors $g''(x) \leq 0$ et g' est strictement décroissante.

Or $g'(0) = 0$ donc $g'(x) \leq 0$ donc g est décroissante.

Or $g(0) = 0$ donc g est négative.

Donc $\mathcal{C}_f$ se trouve en-dessous de T_0 pour $x \leq 0$.

On conclut de ce qui précède qu'en 0, la tangente T_0 traverse la courbe $\mathcal{C}_f$, ce qui signifie que l'origine du repère est bien un point d'inflexion pour la courbe $\mathcal{C}_f$.

4. a) $h(x) = x - f(x) = x - xe^{x^2-1} = x(1 - e^{x^2-1})$

b) Sur $[-1; 1]$, $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ donc le signe de $h(x)$ est celui de x .

Donc $h(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 0$. Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de D si et seulement si $x \geq f(x)$ si et seulement si $x \geq 0$.

Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est en dessous de D sur $[0; 1]$ et au-dessus de D sur $[-1; 0]$.

c) Attention : dans l'énoncé il faut conclure que $\mathcal{C}_f$ est une courbe de Lorenz.

f est une fonction définie et croissante sur $[0 ; 1]$;
 $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Pour tout réel $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \leq x$.

Donc $\mathcal{C}_f$ est une courbe de Lorentz.

Exercices Préparer le BAC Je me teste

p. 88

76. **B** et **C**

77. **D**

78. **D**

79. **B**

80. **A**

81. **A**

82. **D**

83. **D**

84. **A** et **D**

85. **D**

Exercices Préparer le BAC Je révise

p. 89

86. Concavité

1. On étudie une fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ dont la dérivée est également définie sur $\mathbb{R}_+^*$: $g'(x) = \frac{1}{x} + 3$.

2. $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $g''(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

3. Comme $g''(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ alors g est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

87. Convexité

1. $-x + 1 \neq 0$ si et seulement si $x \neq 1$ et la fonction $x \mapsto xe^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$2. f'(x) = -\frac{x}{x-1}e^{\frac{1}{-x+1}} \text{ et } f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^3}e^{\frac{1}{-x+1}}.$$

Or $-e^{\frac{1}{-x+1}} < 0$ pour tout réel $x \in D_f$.

De plus $\frac{1}{(x-1)^3} > 0$ si et seulement si $x > 1$.

Donc $f''(x) < 0$ si et seulement si $x > 1$.

3. Donc f est convexe sur $] -\infty ; 1[$ et concave sur $]1 ; +\infty[$.

88. Étudier une fonction

$$\begin{aligned} 1. f'(x) &= 0 + 14e^{\frac{x}{5}} + (14x + 42)\left(-\frac{1}{5}\right)e^{\frac{x}{5}} \\ &= \left(14 - 14x - \frac{42}{5}\right)e^{\frac{x}{5}} \\ &= \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{\frac{x}{5}} \end{aligned}$$

2. $\frac{1}{5}e^{\frac{x}{5}} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend seulement de celui de $-14x + 28$.

$-14x + 28 \geq 0$ si et seulement si $28 \geq 14x$

si et seulement si $\frac{28}{14} \geq x$

si et seulement si $2 \geq x$.

D'où le tableau de variations suivant.

x	0	2	$+\infty$
Variations de f	112	$70 + 70e^{-0,4}$	$70 + 882e^{-12}$

3. a) $f''(7) = 0$.

Le point A est un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.

b) $\frac{14}{25}e^{\frac{x}{5}} > 0$ pour tout réel x donc $f''(x) \geq 0$

si et seulement si $x - 7 \geq 0$

si et seulement si $x \geq 7$.

Donc f est convexe sur $[7 ; 60]$ et concave sur $[0 ; 7]$.

c) L'abscisse pour laquelle la dérivée admet un extremum est 7 et correspond au point d'inflexion précédemment cité.

89. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion

1. $f(x) = (-5x^2 + 5)e^x$

donc $f'(x) = (-10x)e^x + (-5x^2 + 5)e^x$
 $= (-5x^2 - 10x + 5)e^x$

Par suite,

$f''(x) = (-10x - 10)e^x + (-5x^2 - 10x + 5)e^x$
 $= -(5x^2 + 20x + 5)e^x$.

2. $\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times 5 \times 5 = 400 - 100$
 $= 300 > 0$

D'où $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = -2 + \sqrt{3}$.

Donc $5x^2 + 20x + 5 \geq 0$ si et seulement si

$x \in]-\infty; -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}; +\infty[$.

Or $-e^x < 0$ pour tout réel x .

Donc $f''(x) \leq 0$ si et seulement si

$x \in]-\infty; -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}; +\infty[$

et $f''(x) \geq 0$ si et seulement si

$x \in [-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}]$.

3. Les abscisses des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ sont donc $-2 - \sqrt{3}$ et $-2 + \sqrt{3}$.

4. f est concave sur $]-\infty; -2 - \sqrt{3}] \cup [-2 + \sqrt{3}; +\infty[$ et convexe sur $[-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}]$.

90. Étudier la convexité de deux fonctions

A ▶ 1. Graphiquement, g est convexe sur $[-5; 1]$ et concave sur $[1; 3]$.

2. Graphiquement, le point d'inflexion a pour coordonnées $(1; 6,5)$.

B ▶ 1. $g(x) = (3 - x)e^x + 1$

donc $g'(x) = (-1)e^x + (3 - x)e^x + 0$
 $= (3 - x - 1)e^x = (2 - x)e^x$

et $g''(x) = (-1)e^x + (2 - x)e^x = (2 - x - 1)e^x = (1 - x)e^x$

2. a) $e^x > 0$ pour tout réel x

et $1 - x \geq 0$ si et seulement si $1 \geq x$

Donc $g''(x) \geq 0$ si et seulement si $1 \geq x$

Donc g est convexe sur $]-\infty; 1]$ et concave sur $[1; +\infty[$.

b) $g''(x)$ change de signe pour $x = 1$.

De plus $g(1) = (3 - 1)e^1 + 1 = 2e + 1$

donc son point d'inflexion a pour coordonnées $(1; 2e + 1)$.

3. $T_1 : y = g'(1)(x - 1) + g(1)$

$T_1 : y = (2 - 1)e^1(x - 1) + (2e + 1)$

$T_1 : y = ex - e + 2e + 1$

$T_1 : y = ex + e + 1$

4. a) $h(x) = (ex + e + 1) - g(x)$ donc

$h'(x) = e - g'(x) = e - (2 - x)e^x = (x - 2)e^x + e$

$h''(x) = 1e^x + (x - 2)e^x + 0 = (x - 1)e^x$
 $= -(1 - x)e^x = -g''(x)$

b) $g''(x) \geq 0$ si et seulement si $1 \geq x$ donc

$h''(x) \leq 0$ si et seulement si $1 \geq x$ donc h' est décroissante sur $]-\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

c) $h'(1) = (1 - 2)e^1 + e = -e + e = 0$

Donc le minimum de h' est 0 sur $\mathbb{R}$.

Donc pour tout réel x , $h'(x) \geq 0$.

d) Comme $h'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ alors h est croissante sur $\mathbb{R}$.

e) $h(1) = (e \times 1 + e + 1) - g(1)$
 $= 2e + 1 - (2e + 1) = 0$

f) h est négative sur $]-\infty; 1]$ et positive sur $[1; +\infty[$.
 Donc la tangente au point d'abscisse 1 est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ pour $x \leq 1$ et au-dessus de $\mathcal{C}_g$ pour $x \geq 1$ donc elle traverse la courbe au point de coordonnées $(1; 2e + 1)$.

Le point de coordonnées $(1; 2e + 1)$ est bien un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_g$.

CHAPITRE 4 Fonction logarithme népérien

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Dans ce chapitre, nous étudierons une nouvelle fonction introduite pour la première fois pour les élèves au programme de Terminale, la fonction logarithme népérien.

Dans un premier temps, il s'agira de faire une approche en se reposant sur les acquis des élèves de Première, à savoir l'utilisation de la fonction exponentielle et le fait que cette nouvelle fonction soit la fonction inverse de celle qu'ils ont découverte en classe de Première de sorte à ce que les élèves s'appuient sur les images mentales des courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme. Puis, dans un deuxième temps, il s'agira d'exploiter les propriétés algébriques de cette nouvelle fonction. Enfin, dans un dernier temps, d'étudier cette fonction et des composés de cette fonction, tant d'un point de vue variations que limites.

Objectifs

→ Savoir construire la représentation graphique de la fonction logarithme népérien et la visualiser comme fonction réciproque de la fonction exponentielle.

→ Connaître et savoir appliquer les propriétés algébriques du logarithme népérien

(les démonstrations des relations $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ pourront être travaillées avec les élèves).

→ Connaître la fonction dérivée de la fonction $\ln$ ainsi que ses variations (la démonstration liée au calcul de la fonction dérivée de $\ln$ pourra être travaillée avec les élèves, en admettant la dérivabilité de $\ln$. Il en est de même pour la dérivée de $\ln u$).

→ Connaître les limites de $\ln$ en 0 et en $+\infty$.

→ Savoir utiliser l'équation fonctionnelle de l'exponentielle ou du logarithme pour transformer une écriture, résoudre une équation, une inéquation.

→ Utiliser la relation $\ln a^n = n \ln a$.

→ Savoir utiliser dans le cadre d'une résolution de problème, les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme.

II. Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 91

1. Utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

a) e^{-2x}

b) e^{3x}

c) e^{5x-1}

d) $\frac{e^{-x}}{e^{-x}} - \frac{e^x}{e^{-x}} = 1 - e^{2x}$

2. Résoudre des équations du type $e^x = k$

1. Une seule solution pour $\in \mathbb{R}_+^*$ et aucune solution pour $k \in \mathbb{R}_-$.

2. a) $S = \emptyset$

b) $S = \{0\}$

c) $S = \{1\}$

d) $S = \{-1\}$

3. Résoudre des équations et des inéquations simples avec la fonction exponentielle

1. a) $e^{4x+1} = e^0$ donc $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$

b) $e^4 = e$ donc $S = \{\emptyset\}$

c) $S = \{\emptyset\}$

2. a) $e^{-x} \leq e^1$ donc $S = [-1 ; +\infty[$

b) $x + 1 > 3 - 2x \Leftrightarrow 3x > 2$

donc $S = \left] \frac{2}{3} ; +\infty \right[$

c) $e^{-2x} < e^{x-3} \Leftrightarrow -2x < x - 3 \Leftrightarrow x > 1$

soit $S =]1 ; +\infty[$

4. Calculer des fonctions dérivées

a) $f'(x) = -5e^{-5x+3}$

b) $f'(x) = 3e^x + 3xe^x = 3(1+x)e^x$

c) $f'(x) = 5 \times \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$

5. Savoir déterminer une équation de tangente

a) $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

avec $f'(x) = e^x + (x - 1)e^x = xe^x$

d'où $y = e(x - 1) - 3$ soit $y = ex - e - 3$

b) $y = f'(0)x + f(0)$ avec $f'(x) = 5e^x + 2$ d'où $y = 7x$

6. Déterminer des réels vérifiant des conditions

a) $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in I = \left] \frac{1}{2} ; +\infty \right[$

et $-3x + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in J = \left] -\infty ; \frac{5}{3} \right[$

Il faut que $x \in I \cap J = \left] \frac{1}{2} ; \frac{5}{3} \right[$.

b) $1 - x > 0 \Leftrightarrow x \in I =]-\infty ; 1[$

et $x^2 + 3x - 4 < 0$

$\Leftrightarrow x \in J =]-\infty ; -4[\cup]1 ; +\infty[$

(calcul de $\Delta = 25$; $x_1 = -4$ et $x_2 = 1$)

Il faut que $x \in I \cap J =]-\infty ; -4[$.

A ► Transformation du plan

1. A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ .

2. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} y-x \\ x-y \end{pmatrix}$ soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de Δ .

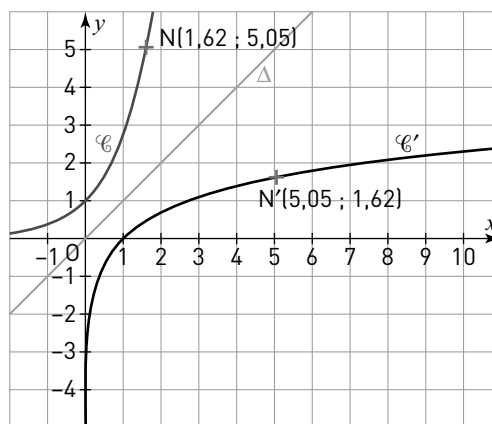
On a $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$: les droites (AB) et Δ sont donc perpendiculaires. Soit I le milieu de [AB]. On a

$I \left(\frac{x+y}{2} ; \frac{y+x}{2} \right)$. On remarque que I appartient à Δ .

Par conséquent, Δ est la médiatrice de [AB] ce qui signifie que A et B sont effectivement symétriques par rapport à Δ .

B ► Construction de la courbe de la fonction logarithme népérien

1. 2. et 3.



C ► Conséquences et conjectures

1. $e^{\ln(1)} = 1$ or $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.

$e^{\ln(e)} = e$ or $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$.

2. Puisque $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ sont des fonctions réciproques, on en déduit que $e^{\ln(x)} = x$ et $\ln(e^x) = x$.

3. $]0 ; +\infty[$ est l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien qui correspond à l'intervalle image de la fonction exponentielle.

4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

b) La fonction $\ln$ semble strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) La fonction $\ln$ semble strictement négative sur $]0 ; 1[$, strictement positive sur $]1 ; +\infty[$ et s'annule en 1.

Activités

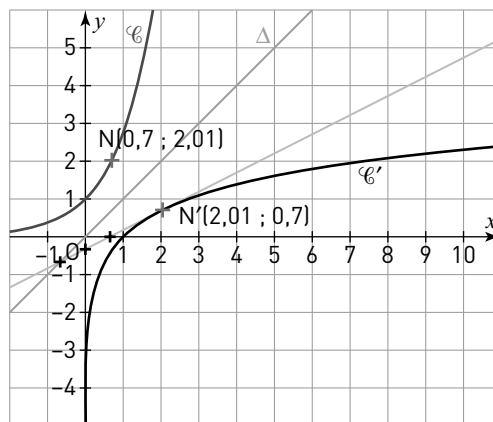
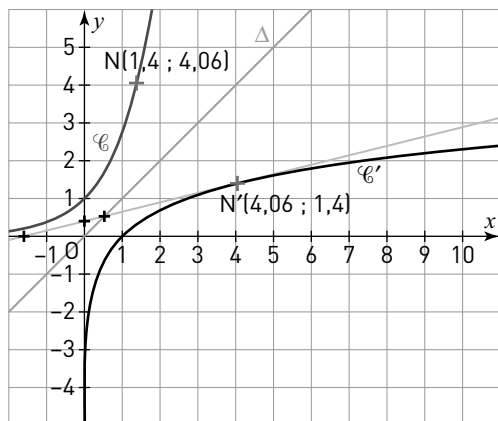
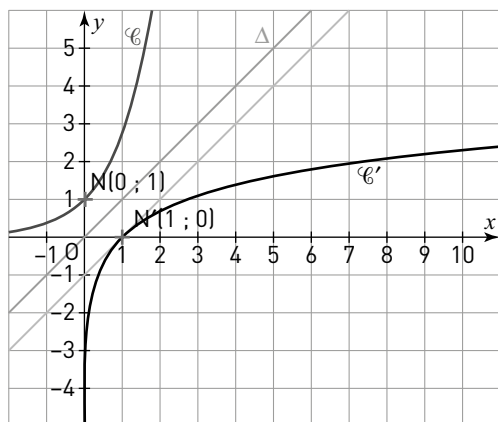
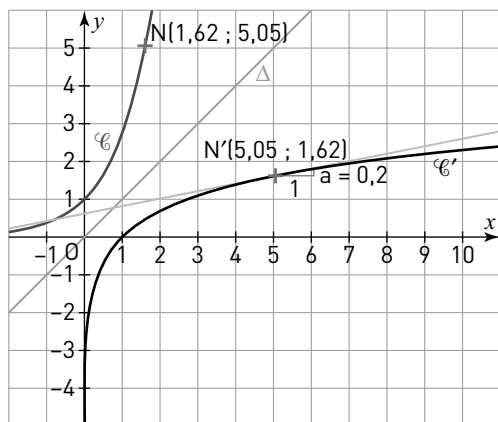
p. 92-93

1. Approcher graphiquement une nouvelle fonction

• **Durée estimée** : 35 min

• **Objectif** : Permettre l'obtention, pas à pas, de la courbe représentative de la fonction $\ln$.

5. a)



b) Soit a l'abscisse du point N' , et m le coefficient directeur de la tangente à la courbe en N' , le lien

qui semble exister entre a et m semble être : $n = \frac{1}{a}$.

6. On peut conjecturer que $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

2. Répondre à des besoins pratiques de calculs au XVI^e siècle : les logarithmes – (Thème 3)

• **Durée estimée :** 35 min

• **Objectif :** Introduire la fonction $\ln$ d'un point de vue historique, permettant de répondre à un problème de l'époque : faciliter les calculs dans les domaines tels que l'astronomie, la navigation...

1. a) $m \times n = 6$ et

$x + y = 0,693\ 1 + 1,098\ 6 = 1,791\ 7 \approx 1,792$ arrondi au millièmè près. Le principe est vérifié.

b) $2 \times 4 = 8$ et $x + y = 0,693\ 1 + 1,386\ 3 = 2,079\ 4$

c) $1 \times 1 = 1$ et $x + x = 2x$ or on doit avoir $2x = x$ donc $x = 0$. Le nombre à écrire en face de 1 doit être 0.

d) Il faut ajouter les nombres en face de 27 et 91 soit $3,295\ 8 + 4,510\ 9 = 7,806\ 7$ et le nombre en face de 7,806 7 est 2 457 donc $27 \times 91 = 2\ 457$.

2. a) En faisant $x - y = 2,302\ 6 - 1,609\ 4$

$= 0,693\ 2$ au millièmè près.

On voit qu'il s'agit du nombre écrit en face de 2. Il semblerait donc qu'à $m \div n$ il faille associer $x - y$.

Test avec $9 \div 3 = 3$ et

$x - y = 2,197\ 2 - 1,098\ 6 = 1,098\ 6$.

La conjecture se confirme.

Test avec $6 \div 3 = 2$ et

$x - y = 1,791\ 8 - 1,098\ 6 = 0,693\ 2$ qui au millièmè près correspond au nombre écrit en face de 2. La conjecture se confirme de nouveau.

b) $2 \div 10 = 0,2$ et $x - y = 0,693\ 1 - 2,302\ 6 = -1,609\ 5$
 Au millième près le nombre à écrire devant 0,2 serait -1,609.

$3 \div 2 = 1,5$ et $x - y = 1,098\ 6 - 0,693\ 1 = 0,405\ 5$.

Donc le nombre à écrire en face de 1,5 serait 0,405 5.

3. a) $2,197\ 2 - 1,098\ 6 = 1,098\ 6$

$3,295\ 8 - 2,197\ 2 = 1,098\ 6$

$4,394\ 4 - 3,295\ 8 = 1,098\ 6$

La suite de la colonne de droite pour les nombres respectivement associés semble être arithmétique de raison 1,098 6.

b) $3^{-1} \times 3 = 1$ donc on obtient le nombre à écrire en face de 3^{-1} en effectuant le calcul $0 - 1,098\ 6 = -1,098\ 6$.

$81 = 3^4$ or $3^{10} = 3^4 \times 3^6$

Par conséquent, on obtient le nombre à écrire en face de 3^{10} et effectuant le calcul :

$4,394\ 4 + 6 \times 1,098\ 6 = 10,986$.

4. a) $m \times n = a \times a = a^2$ et $x + x = 2x$

On peut donc énoncer $\ln(a^2) = 2\ln(a)$.

$\ln(3^2) = \ln(9) = 2,197\ 2$ et on vérifie

$2 \ln(3) = 2 \times 1,098\ 6 = 2,197\ 2$.

b) $m \times n = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ et

$\ln((\sqrt{a})^2) = 2\ln(\sqrt{a})$ soit $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

$\ln(\sqrt{16}) = \ln(4) = 1,386\ 3$ et

$\frac{1}{2}\ln(16) = \frac{1}{2} \times 2,772\ 6 = 1,386\ 3$

À vous de jouer !

p. 95-101

1. a) $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

b) $e^{2x} = -1$ donc $S = \{\emptyset\}$

c) Conditions d'existence :

$4 - 2x > 0$ soit $x \in]-\infty; 2[$ $\ln(4 - 2x) > 1 \Leftrightarrow 4 - 2x > e^1$

et $x \in I \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; 2 - \frac{e}{2} \right[$

d) $e^{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow x + 1 \geq \ln 2$

$\Leftrightarrow x \in [\ln 2 - 1; +\infty[$

2. a) Conditions d'existence :

$5x - 1 > 0$ soit $x \in I = \left] \frac{1}{5}; +\infty \right[$

$\ln(5x - 1) = 2 \Leftrightarrow \ln(5x - 1) = \ln(e^2)$

$\Leftrightarrow 5x - 1 = e^2$ et $x \in I$

$S = \left\{ \frac{e^2 + 1}{5} \right\}$

b) $e^{-x} = 5 \Leftrightarrow -x = \ln 5$ d'où $S = \{-\ln 5\}$

c) Conditions d'existence :

$3x - 1 > 0$ soit $x \in I = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$

$\ln(3x - 1) < \ln 1 \Leftrightarrow 3x - 1 < 1$ avec $x \in I$

d'où $S = \left] \frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right[$.

d) $e^{5-x} \leq 2 \Leftrightarrow e^{5-x} \leq e^{\ln 2} \Leftrightarrow 5 - x \leq \ln 2$

Soit $S = [5 - \ln 2; +\infty[$

3. a) Conditions d'existence :

$x \in]1; +\infty[$ et $x \in]-\infty; 0[$

d'où $x \in I =]-1; 0[$

$\ln(x + 1) = \ln(-x) \Leftrightarrow x + 1 = -x$

et $x \in I \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

b) Conditions d'existence :

$x^2 - 1 > 0$ soit $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

$\ln(x^2 - 1) \leq \ln 5 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 5$ et $x \in I$

Donc $S = [-\sqrt{6}; -1[\cup]1; \sqrt{6}]$.

4. a) Conditions d'existence :

$x^2 - x + 1 > 0$ or $\Delta < 0$ donc le polynôme est toujours du signe de a ici 1.

Donc le polynôme est toujours strictement positif, donc $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(x^2 - x + 1) = \ln 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 5$ donc $S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$

b) Conditions d'existence :

$$2x > 0 \text{ soit } x > 0 \text{ et } x^2 - 2x + 1 > 0.$$

Or $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ s'annule en 1 et est strictement positif sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc

$$x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[.$$

Il s'agit alors de résoudre :

$$2x > x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 < 0$$

$$\Delta = 12 \text{ donc } x_1 = 2 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$x \in]2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}[\cup] \text{ soit}$$

$$x \in]2 - \sqrt{3}; 1[\cup]1; 2 + \sqrt{3}[$$

$$\mathbf{5. a)} 2\ln 5 + \frac{1}{2}\ln(125) = 2\ln 5 + \frac{3}{2}\ln 5 = \frac{7}{2}\ln 5$$

$$\mathbf{b)} -\ln 5$$

$$\mathbf{c)} 4 - 2\ln 5$$

$$\mathbf{d)} -\frac{4}{5} - \ln 5$$

$$\begin{aligned} \mathbf{6. a)} 4\ln 12 - 4\ln 36 &= 4\ln(2^2 \times 3) - 4\ln(2^2 \times 3^2) \\ &= 8\ln 2 + 4\ln 3 - 8\ln 2 - 8\ln 3 \\ &= -4\ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \ln\left(\frac{1}{9}\right) + \ln 81 &= -\ln 3^2 + \ln 3^4 \\ &= -2\ln 3 + 4\ln 3 = 2\ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \ln \frac{\sqrt{3}}{3} - \ln 27 &= \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3 - 3\ln 3 \\ &= -\frac{7}{2}\ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d)} e^{-2\ln 2} + \ln(9e^2) &= e^{\ln(2^{-2})} + \ln 9 + \ln(e^2) \\ &= 2^{-2} + 2\ln 3 + 2 \\ &= \frac{9}{4} + 2\ln 3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{7. a)} n\ln\left(\frac{5}{9}\right) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)}$$

Soit $n \geq 8$

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} 2^{n-1}(2-7) > -3 &\Leftrightarrow 2^{n-1} < \frac{3}{5} \\ &\Leftrightarrow n < \frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{\ln(2)} + 1 \end{aligned}$$

Soit $n = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{8. a)} 3^{2n} > 10^8 &\Leftrightarrow \ln(3^{2n}) > \ln(10^8) \\ &\Leftrightarrow 2n\ln 3 > \ln(10^8) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^8)}{2\ln 3} \end{aligned}$$

Soit $n \geq 9$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} 5^n \times 9^{-n-1} \leq 10^{-4} &\Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n \times \frac{1}{9} \leq 10^{-4} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{5}{9}\right)^n \leq 9 \times 10^{-4} \\ &\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{5}{9}\right) \leq \ln(9 \times 10^{-4}) \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(9 \times 10^{-4})}{\ln\left(\frac{5}{9}\right)} \end{aligned}$$

Soit $n \geq 12$.

9. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc par somme des limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc par somme des limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\mathbf{2.} f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}$$

Or pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a $x^2 > 0$ et pour tout $x \in]0; 1[$ on a $1-x > 0$.

Donc $f'(x) > 0$ et donc f est croissante sur $]0; 1[$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$ on a $1-x < 0$.

Donc $f'(x) < 0$ et donc f est décroissante sur $]1; +\infty[$.

$$10. 1. x \left(x - 1 - \frac{\ln x}{x} \right) = x^2 - x - \ln x = f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{x} = +\infty$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc par produit des limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 - x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -\ln x = +\infty$ donc par somme

des limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$2. f'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$$

Pour tout $x \in]0 ; +\infty[$, on a $x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $2x^2 - x - 1$.

$$\Delta = 9 \text{ donc } x_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } x_2 = 1$$

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Sens de variation de f			

Le minimum de f est nul, donc la fonction f est toujours positive ou nulle.

$$11. f'(x) = \frac{1 \times x^2 - (1+x) \times 2x}{\frac{x^4}{1+x}} = \frac{-(x+2)}{x(1+x)}$$

$$12. f'(x) = 2x \ln \left(\frac{1}{2x} \right) + (x^2 - 4) \frac{-\frac{2}{4x^2}}{\frac{1}{2x}} \\ = 2x \ln \left(\frac{1}{2x} \right) - \frac{x^2 - 4}{x} \\ = 2x \ln \left(\frac{1}{2x} \right) - x + \frac{4}{x}$$

$$13. 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 2 = +\infty$$

donc par produit des limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$2. a) f'(x) = \frac{1}{x^2} (\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x} \right) \times \frac{1}{x} \\ = \frac{\ln(x) - 2}{x^2} + \frac{x - 1}{x^2} = \frac{\ln(x) - 2 + x - 1}{x^2} \\ = \frac{\ln(x) + x - 3}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}$$

$$b) u'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x} \text{ pour } x \in [e ; +\infty[, u'(x) > 0$$

Par conséquent, u est croissante sur $[e ; +\infty[$.

Or $u(e) = e - 2 > 0$ donc u est positive sur $[e ; +\infty[$.

c) f' est donc positive sur $[e ; +\infty[$ donc f est croissante sur $[e ; +\infty[$.

$$14. 1. f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} \\ = \frac{g(x)}{x^2}$$

Puisque $x^2 > 0$ sur D_f , le signe de $f'(x)$ est le même que celui de g .

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \text{ sur } [1 ; +\infty[$$

x	1	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	
Sens de variation de g		
Signe de $g'(x) = \text{signe de } f'(x)$	+	
Sens de variation de f		

$$2. f(x) - x = x - \frac{\ln x}{x} - x = -\frac{\ln x}{x}$$

Or sur $]1 ; +\infty[$; $x > 0$ et $\ln x > 0$ donc $f(x) - x < 0$. Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours en dessous de la droite D .

15. 1. et 2. $f'(x) = \frac{-4x}{-2x^2 + 13,5}$

x	-2,5	0	2,5
$-4x$	+	0	-
$-2x^2 + 13,5$	+		+
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

3. Puisque f admet un minimum positif sur $[e; +\infty[$, on en déduit que f est positive sur $[-2,5; 2,5]$.

16. 1. $\lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow -1} 2x - 1 = -3$

Donc par quotient des limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 1}{x + 1} = +\infty.$$

De plus $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$.

$$\begin{aligned} 2. f'(x) &= \frac{2(x+1) - (2x-1) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{2x-1} \\ &= \frac{3}{(x+1)(2x-1)} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1
$(x+1)(2x-1)$		+
Variations de f		

$$\frac{2x-1}{x+1} = \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \text{ or } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1 \text{ donc par quotient des limites, on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 2.$$

Pour tout $x \in]-\infty; -1[$, $f(x) > \ln 2 > 0$.

Par conséquent, la fonction f est toujours strictement positive sur $]-\infty; -1[$.

$$\begin{aligned} 17. 1. g'(x) &= \frac{e-1}{1+(e-1)x} - 1 \\ &= \frac{e-1-1-(e-1)x}{1+(e-1)x} \\ &= \frac{(e-2)-(e-1)x}{1+(e-1)x} \end{aligned}$$

2. Sur $[0; 1]$; $1 + (e-1)x > 0$.

Le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $(e-2) - (e-1)x$.

$$\text{Or } (e-2) - (e-1)x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{e-2}{e-1}$$

x	0	$\frac{e-2}{e-1}$	1
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Variations de g			

g admet donc un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$ dont une valeur arrondie est 0,12.

3. Sur l'intervalle $\left[0; \frac{e-2}{e-1}\right]$, la fonction g est strictement croissante et continue, de plus $g(0) < 0,05$ et $g\left(\frac{e-2}{e-1}\right) > 0,05$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0,05$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[0; \frac{e-2}{e-1}\right]$.

De même, on démontre que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $\left[\frac{e-2}{e-1}; 1\right]$.

Par conséquent, l'équation admet bien deux solutions sur $[0; 1]$.

Exercices apprendre à démontrer

p. 102

Pour s'entraîner

$$1. \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \\ = \ln a - \ln b$$

$$2. \text{Posons } v(x) = \ln(x)$$

$$\text{or } (v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x) \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{D'où } (\ln(x))' = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exercices calculs et automatismes

p. 103

18. Propriétés algébriques

1. Réponse **d**
2. Réponse **c**
3. Réponse **c**
4. Réponse **b**

19. Dérivées

$$1. f'(x) = \frac{3}{x} - 2x$$

$$2. g'(x) = -\frac{2}{4-2x} = \frac{1}{x-2}$$

20. Python

1. La valeur envoyée par la fonction **Python**  représente l'image de x obtenue par la fonction f définie par $f(x) = \ln(4-2x)$ pour tout $x > 2$.

2.

```
def solution_inequa(x) :
    if x <= 0 :
        return "Ce nombre n'est pas solution de l'inéquation."
    else :
        if log(x)+x-5 < 0 :
            return "Ce nombre est solution de l'inéquation."
        else :
            return "Ce nombre n'est pas solution de l'inéquation."
```

21. Fonction ln

- a) Faux.** Un contre-exemple est $x = 0,5$ pour lequel $\ln(0,5^2) = \ln(0,25) < 0$.
- b) Faux,** c'est $\ln(10 \times 2) = \ln(10) + \ln(2)$.

$$\text{c) Vrai, car } f'(x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Puisque $x \in]-\infty ; 0[; \frac{1}{x} < 0$ d'où $f'(x) < 0$

donc f est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

d) Faux, $u_0 = 0$, $u_1 = \ln(3)$ et $u_2 = 2\ln(3)$ puisque le premier terme est nul. Il s'agit en fait d'une suite arithmétique de raison $\ln(3)$.

$$u_{n+1} - u_n = \ln(3^{n+1}) - \ln(3^n) \\ = (n+1)\ln(3) - n\ln(3) \\ = \ln(3)$$

$$\text{e) Vrai, car } \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) - e^{-\ln x} = \frac{1}{x} - e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \\ = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

(pour $x > 0$ sinon non défini.)

$$\text{f) Vrai, } f'(x) = -2x + 2 + \frac{4}{x}$$

$$f''(x) = -2 - \frac{4}{x^2}. \text{ Puisque } f'(x) < 0,$$

la fonction f est concave sur $]0 ; +\infty[$.

Donc la courbe est toujours en-dessous de ses tangentes, soit en-dessous de T_1 .

22. Lectures graphiques

- a) Faux,** c'est $f(4) \approx 3$.
- b) Faux,** car une seule tangente horizontale en -5 environ.
- c) Vrai,** la fonction est croissante pour $x > -\frac{1}{2}$.
- d) Vrai,** la fonction semble concave donc $f'(x) < 0$.

23. Équations, inéquations

1. Il faut d'abord rechercher les conditions d'existence, à savoir pour quelles valeurs de x , $2x+1 > 0$ et $4-x > 0$ et $2x > 0$.
2. Il faut poser $X = (\ln x)^2$, résoudre l'équation de degré 2 en X puis revenir sur les solutions pour x (si $X = a$, il s'agira ensuite de résoudre $\ln(x) = a$).
3. Il faudra étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

24. Tangente

$$1. f'(x) = 2\ln x + 2x \times \frac{1}{x} = 2\ln x + 2$$

$$T_1 : y = f(1)(x-1) + f(1) \text{ soit } y = 2(x-1) - 3 \text{ donc } y = 2x - 5.$$

$$2. a) x^2 - x + 1 > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ car } \Delta < 0 \text{ et le coefficient de } x^2 \text{ est } 1 > 0.$$

$$b) T_0 : y = g'(0)(x-0) + g(0).$$

$$\text{Or } g'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1} \text{ d'où } y = -x.$$

Exercices d'application

p. 104-105

Équations et inéquations avec ln ou exp

25. 1. a) Conditions d'existence :

$$x \in I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \in I$$

b) Conditions d'existence :

$$x \in I =]e; +\infty[$$

$$x - e = e \Leftrightarrow x = 2e \in I$$

$$c) \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$$

$$d) 5 - 2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

2. a) Conditions d'existence :

$$x \in I =]-\infty; 1[$$

$$1 - x > 1 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x < 0 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \in]-\infty; 0[$$

b) Conditions d'existence :

$$x \in I = \left] -\infty; \frac{3}{2} \right[$$

$$3 - 2x \leq e \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-e}{2}; +\infty \right[\text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-e}{2}; \frac{3}{2} \right[$$

$$c) e^x < 3 \Leftrightarrow x < \ln 3 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \ln 3[$$

$$d) e^x(e^x - 3) \geq 0 \text{ or } e^x > 0 \text{ pour tout } x,$$

cela revient donc à résoudre :

$$e^x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 3 \text{ donc } x \in [\ln 3; +\infty[$$

$$26. a) 5 - \ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 3 \text{ d'où } S = \{e^3\}$$

$$b) e^{4x+1} = 5 \Leftrightarrow 4x + 1 = \ln 5 \text{ d'où } S = \left\{ \frac{\ln 5 - 1}{4} \right\}$$

c) Conditions d'existence :

$$2x + e > 0 \Leftrightarrow x \in I = \left] -\frac{e}{2}; +\infty \right[$$

$$\ln(2x + e) = \ln e \Leftrightarrow 2x + e = e \text{ et } x \in I \text{ donc } S = \{0\}$$

d) Conditions d'existence :

$$x^2 + x - 6 > 0$$

$$\Delta = 25 \text{ donc } x_1 = -3 \text{ et } x_2 = 2.$$

$$\text{Il faut donc } x \in I =]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$$

$$\ln(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2 + x - 6)$$

$$= \ln(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 1 \text{ et } x \in I$$

$$\Delta = 29 \text{ donc } x_1 = \frac{-1 - \sqrt{29}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{29}}{2} \right\}$$

27. a) Conditions d'existence:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	2	$+\infty$
$5x + 1$	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	0	+
$\frac{5x + 1}{x - 2}$	+	0	-	+

$$x \in I = \left] -\infty; -\frac{1}{5} \right[\cup]2; +\infty[$$

$$\ln\left(\frac{5x+1}{x-2}\right) \leq \ln(1) \Leftrightarrow \frac{5x+1}{x-2} \leq 1 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+1 - (x-2)}{x-2} \leq 0 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow \frac{4x+3}{x-2} \leq 0 \text{ et } x \in I$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
$4x + 3$	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	0	+
$\frac{4x + 3}{x - 2}$	+	0	-	+

$$S = \left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{5} \right]$$

b) Conditions d'existence :

$$x^2 + 2x > 0 \text{ soit } x \in I =]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$$

$$\ln(x^2 + 2x) - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 2x) > \ln(e)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - e > 0 \text{ et } x \in I$$

$$\text{Donc } S =]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$$

$$\text{avec } x_1 = \frac{-2 - \sqrt{2+2e}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{2+2e}}{2}$$

$$\text{c) } 6e^x - 1 \geq 3 - 4e^x \Leftrightarrow S = \left[\ln\left(\frac{2}{5}\right); +\infty[$$

$$\text{d) } 3e^{2x} - 9e^x < 0 \Leftrightarrow 3e^x(e^x - 3) < 0 \text{ or } 3e^x > 0.$$

Il suffit donc d'étudier le signe de $e^x - 3$.

$$S =]-\infty; \ln 3[$$

$$\text{28. 1. } (\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$$

$$\text{Avec } X = \ln x, \text{ on a } X^2 - 4X - 5 = 0$$

$$\text{2. } \Delta = 36 \text{ donc } X_1 = -1 \text{ et } X_2 = 5$$

$$\text{3. Soit } \ln x = -1 \text{ et } \ln x = 5 \text{ donc } S = \{e^{-1}; e^5\}$$

29. 1. Attention : il faut lire $X^2 - 2X - 8 = 0$ (E').

Soit $X = e^x$. Il s'agit alors de résoudre l'équation $X^2 - 2X - 8 = 0$.

$$\text{2. } \Delta = 36 \text{ donc } X_1 = -2 \text{ et } X_2 = 4$$

$$\text{3. } e^x = -2 : \text{impossible}$$

$$e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4 \text{ donc } S = \{\ln 4\}$$

Équations et inéquations avec $\ln u$

30. 1. a) Conditions d'existence :

$$x > 2 \text{ et } x < 4 \text{ donc } x \in I =]2; 4[$$

$$3x - 6 = 4 - x \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

b) Conditions d'existence :

$$x \in I =]0; 8[$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \text{ et } x \in I \Leftrightarrow S = \{2, 6\}$$

c) Conditions d'existence :

$$x \in I =]5; +\infty[$$

$$\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln(x-5) \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{x+1} = x-5 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 5 = 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{14}.$$

$$\text{2. a) } x > \frac{1}{2} \text{ et } x \in I \Leftrightarrow x \in \left] \frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{e}{40} \right[$$

b) Conditions d'existence :

$$x \in I =]1; 5[$$

$$5 - x \geq x - 1 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x \leq 3 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in]1; 3].$$

c) Conditions d'existence :

$$x \in I =]2; +\infty[$$

$$x^2 - 5 \geq 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in]\sqrt{5}; +\infty[.$$

31. a) Conditions d'existence :

$$2x - 1 > 0 \text{ et } x > 0$$

$$\text{donc } x \in I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\ln(2x - 1) = \ln(x^2)$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = x^2 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 \text{ et } x \in I$$

$$\text{donc } S = \{1\}.$$

b) Conditions d'existence :

$$x + 1 > 0 \text{ et donc } x \in I =]1; 2[$$

$$\ln[(x+1)(x-1)] = \ln(4-2x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 4 - 2x \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Delta = 24 \text{ donc } x_1 = -1 - \sqrt{6} \text{ et } x_2 = -1 + \sqrt{6}$$

$$\text{donc } S = \{-1 + \sqrt{6}\}$$

32. a) Conditions d'existence :

$$x^2 - 4x + 4 > 0 \text{ et } x - 2 > 0 \text{ et } 8 - x > 0 \text{ soit}$$

$$x \in I =]2; 8[$$

$$\ln\left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}\right) < \ln(8 - x) \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow \ln(x - 2) < \ln(8 - x) \text{ et } x \in I$$

$$\text{car } x^2 - 4x + 2 = (x - 2)^2$$

ce qui revient à résoudre $x - 2 < 8 - x$ et $x \in I$.

$$\text{D'où } S =]2; 5[$$

b) Attention : il faut résoudre l'inéquation

$$\ln(2x + 4) + \ln(1 - x) - \ln 2 > \ln(-x).$$

Conditions d'existence :

$$2x + 4 > 0 \text{ et } 1 - x > 0 \text{ et } -x > 0$$

$$\text{soit } x \in I =]-2; 0[.$$

$$\ln\left(\frac{(2x+4)(1-x)}{2}\right) \geq \ln(-x)$$

$$\text{et } x \in I \Leftrightarrow (x+2)(1-x) \leq -x$$

$$\text{et } x \in I \Leftrightarrow 2 - x^2 \leq 0$$

$$\text{et } x \in I \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$$

$$\text{et } x \in I \text{ d'où } S =]-2; \sqrt{2}]$$

33. 1. Afin de savoir si les courbes s'intersectent, il s'agit de résoudre

$$f(x) = g(x) \text{ soit } \ln(3x - 6) = 2\ln(4 - x)$$

$$\Leftrightarrow \ln(3x - 6) = \ln((4 - x)^2) \text{ et } x \in I =]2; 4[$$

$$\Leftrightarrow 3x - 6 = (4 - x)^2 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 11x + 22 = 0 \text{ et } x \in I$$

$$\Delta = 33 \text{ donc } x_1 = \frac{11 - \sqrt{33}}{2} \in I \text{ et } x_2 = \frac{11 + \sqrt{33}}{2} \notin I$$

Par conséquent, les courbes s'intersectent en un seul point de coordonnées : $(x_1; f(x_1)) = g(x_1)$.

2. Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, il faut étudier le signe de $f(x) - g(x)$, ce qui revient à étudier le signe de $3x - 6 - (16 - 8x + x^2)$ soit le signe de $-x^2 + 11x - 22$ sur I .

x	2	x_1	4
Signe de $f(x) - g(x)$	-	0	+

La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc strictement en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]2; x_1[$ et strictement au-dessus sur $]x_1; 4[$.

Propriétés algébriques de $\ln$

$$\mathbf{34.1. a)} \ln 25 - \ln 15 = \ln\left(\frac{25}{15}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\mathbf{b)} \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln 16 - \ln 5 = \ln\left(\frac{16}{15}\right)$$

$$\mathbf{2. a)} 4 \ln 5 + 2 \ln 5 + 3 \ln 5 = 9 \ln 5$$

$$\mathbf{b)} 3 \ln 5 - \ln 5 - 2 \ln 5 - 2 \ln 5 = -2 \ln 5$$

$$\mathbf{35. 1.} 3 \ln 2 - \ln 9 + \ln 5 = \ln 2^3 - \ln 9 + \ln 5$$

$$= \ln\left(\frac{8}{9} \times 5\right) = \ln\left(\frac{40}{9}\right)$$

$$\mathbf{2.} \ln 8 - 3 \ln 4 + \ln \sqrt{2} = \ln 2^3 - \ln(2^2)^3 + \ln\left(2^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2^3}{2^6} \times 2^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(2^{-\frac{5}{2}}\right)$$

$$= -\frac{5}{2} \ln 2$$

$$\mathbf{36. a)} e^{2\ln 3 + \ln 4} = e^{\ln(3^2 \times 4)} = 36$$

$$\mathbf{b)} e^{3\ln 2 - \ln 4} = e^{\ln\left(\frac{2^3}{4}\right)} = 2$$

$$\mathbf{c)} \frac{e^{\ln 6 + 1}}{e^{\ln 9 + 2}} = e^{\ln 6 + 1 - \ln 9 - 2} = e^{\ln\left(\frac{6}{9}\right) - 1}$$

$$= \frac{6}{9} \times \frac{1}{e} = \frac{2}{3e}$$

$$\mathbf{d)} \frac{e^{2\ln 5 + \ln 3}}{e^{2\ln 3}} = \frac{e^{\ln(5^2 \times 3)}}{e^{\ln 3^2}} = \frac{5^2 \times 3}{3^2} = \frac{25}{3}$$

$$\mathbf{37. a)} e^3 \ln 3 + e^2 \ln 7 = e^{\ln 27} + e^{\ln 49} = 27 + 49 = 76$$

$$\mathbf{b)} e^{5\ln 3} \times e^{4\ln 9} = e^{\ln 3^5} \times e^{\ln 9^4} = 3^5 \times (3^2)^4 = 3^5 \times 3^8 = 3^{13}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \ln(1 + e^5) + \ln\left(\frac{1}{1 + e^{-5}}\right) &= \ln(1 + e^5) - \ln(1 + e^{-5}) \\ &= \ln(1 + e^5) - \ln\left(e^{-5}\left(\frac{1}{e^{-5}} + 1\right)\right) \\ &= \ln(1 + e^5) - \ln e^{-5} - \ln(e^5 + 1) \\ &= -[-\ln e^5] = \ln e^5 = 5 \end{aligned}$$

Inéquations du type $q^n < a$

$$\mathbf{38. a)} n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln(10^{-4}) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-4})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \text{ soit } n \geq 23.$$

$$\mathbf{b)} n \ln\left(\frac{9}{7}\right) \geq \ln(10^6) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10^6)}{\ln\left(\frac{9}{7}\right)}$$

Soit $n \geq 55$.

$$\text{c) } \left(\frac{3}{5}\right)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{5}\right) \leq \ln(0,001)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}$$

Soit $n \geq 14$.

$$\text{d) } \ln(0,004) > 2n \ln\left(\frac{8}{9}\right) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,004)}{2 \ln\left(\frac{8}{9}\right)}$$

Soit $n \geq 24$.

$$\text{39. a) } \left(\frac{1}{5}\right)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{5}\right) \leq \ln(0,001)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}$$

Soit $n \geq 5$.

$$\begin{aligned} \text{b) } 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n > 0,999\,999 &\Leftrightarrow 10^{-6} > \left(\frac{2}{5}\right)^n \\ &\Leftrightarrow \ln(10^{-6}) > n \ln\left(\frac{2}{5}\right) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^{-6})}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \end{aligned}$$

Soit $n \geq 16$.

$$\begin{aligned} \text{c) } 1,2^{2n} > 10^5 &\Leftrightarrow 2n \ln(1,2) > \ln(10^5) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(10^5)}{2 \ln(1,2)} \end{aligned}$$

Soit $n > 32$.

$$\begin{aligned} \text{d) } 0,02 > \left(\frac{10}{11}\right)^n &\Leftrightarrow \ln(0,02) > n \ln\left(\frac{10}{11}\right) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,02)}{\ln\left(\frac{10}{11}\right)} \end{aligned}$$

Soit $n \geq 42$.

$$\text{40. } u_n = u_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

On veut déterminer n , tel que :

$$\begin{aligned} 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n > 10^6 &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{3}{2}\right) > \ln\left(\frac{10^6}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{10^6}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} \end{aligned}$$

Soit à partir de $n = 33$.

41. Soit A l'événement : « Obtenir au moins une boule blanche », on a alors $\bar{A}$ l'événement : « N'obtenir aucune boule blanche ».

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

On veut :

$$\begin{aligned} p(A) \geq 0,999 &\Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,999 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,001 \\ &\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,001)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \end{aligned}$$

Soit $n \geq 38$. Cela signifie qu'il faut effectuer au moins 38 tirages afin que la probabilité d'obtenir au moins 1 boule blanche soit supérieure à 0,999.

42. Soit C_n le capital obtenu au bout de la n -ième année, on a $C_0 = 2\,500$ et $C_n = C_0 \times 1,017\,5^n$.

La suite (C_n) est géométrique de raison

$$q = 1 + \frac{1,75}{100} = 1,017\,5 \text{ car pour passer du capital}$$

d'une année à l'autre on augmente ce dernier de 1,75 %.

On veut déterminer n tel que :

$$\begin{aligned} C_n &\geq 5\,000 \Leftrightarrow 2\,500 \times 1,017\,5^n \geq 5\,000 \\ &\Leftrightarrow 1,017\,5^n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 2}{\ln 1,017\,5} \end{aligned}$$

Soit $n \geq 40$. Il faudra donc attendre 40 ans pour doubler le capital.

Étude de fonction avec ln

43. a) $f'(x) = \frac{1}{x}(x-2) + (\ln x + 3) \times 1$

$$= 1 - \frac{2}{x} + \ln x + 3$$

$$= -\frac{2}{x} + \ln x + 4$$

b) $f'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)(3\ln x + 1) - (x - \ln x)\left(\frac{3}{x}\right)}{(3\ln x + 1)^2}$

$$= \frac{3\ln x - 2 - \frac{1}{x}}{(3\ln x + 1)^2} = \frac{3x\ln x - 2x - 1}{x(3\ln x + 1)^2}$$

c) Attention : il faut calculer la dérivée de $f(x) = (\ln x - 2x + 1)^2$.

$$f'(x) = 3(\ln x - 2x + 1)^2 \times \left(\frac{1}{x} - 2\right)$$

$$= \frac{3(1 - 2x)(\ln x - 2x + 1)^2}{x}$$

d) Attention : il faut calculer la dérivée de $f(x) = (3x - x \ln x)^2$.

$$f'(x) = 2(3x - x \ln x) \left(3 - 1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}\right)$$

$$= 2(3x - x \ln x)(2 - \ln x)$$

44. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = \frac{2}{x}$.

Or pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $\frac{2}{x} > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

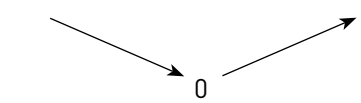
3. a) $T_1 : y = f(1)(x-1) + f(1)$
donc $y = 2(x-1) + 1$ soit $y = 2x - 1$.

b) $f(x) = 2 \ln x + 1 - 2x + 1$
 $= 2 \ln x + 2 - 2x$
 $= 2(\ln x + 1 - x) = 2u(x)$

avec $u(x) = \ln x - x + 1$

c) Pour étudier la position de $\mathcal{C}_f$ et T_1 il s'agit d'étudier le signe de $u(x)$:

$$u'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

x	0	1	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	+	0	-
Variations de u			

Puisque la fonction u admet un minimum nul, cela signifie que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$u(x) \geq 0 \text{ soit } f(x) - (2x - 1) \geq 0.$$

Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de T_1 .

45. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} -3\ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x - 4 = -4$

donc par somme des limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

$$x \left(-\frac{3\ln x}{x} + 2 \right) - 4 = -3\ln x + 2x - 4 = g(x)$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

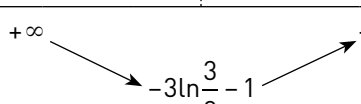
d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3\ln x}{x} + 2 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ donc par

produit et par somme de limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2. $g'(x) = -\frac{3}{x} + 2 = \frac{-3 + 2x}{x}$

Or pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $x > 0$.

Donc le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $-3 + 2x$.

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	-	0	+
Variations de g			

$$3. T_e : y = g'(e)(x - e) + g(e)$$

$$\text{soit } y = \frac{-3 + 2e}{e}(x - e) + 2e - 7$$

$$y = \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x - 4$$

Il faut étudier le signe de :

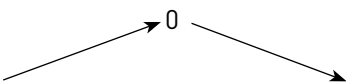
$$\begin{aligned} g(x) - \left(\left(-\frac{3}{e} + 2\right)x - 4\right) \\ = -3\ln x + 2x - 4 - \left(-\frac{3}{e} + 2\right)x + 4 \\ = 3\left(\frac{x}{e} - \ln x\right) \end{aligned}$$

$$\text{On pose } u(x) = \frac{x}{e} - \ln x$$

$$u'(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{x} = \frac{x - e}{ex} \text{ pour tout } x \in]0; +\infty[, \text{ on a :}$$

$$ex > 0$$

Le signe de $u'(x)$ est donc celui de $x - e$.

x	0	e	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	-	0	+
Variations de u			

La fonction u admet un maximum nul, donc pour tout $x \in]0; +\infty[, \text{ on a } u(x) \leq 0$.

Donc la courbe $\mathcal{C}_g$ est toujours en-dessous de la tangente T_e .

$$46. 1. \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x > 0 \\ x \rightarrow 0}} \frac{4}{x} = -\infty$$

D'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ par somme de limites.

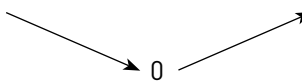
$$2. f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$$

$f'(x)$ est positive comme somme de termes positifs sur $]0; +\infty[$.

Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$47. 1. f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

2.

x	0	e^{-1}	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	-	0	+
Variations de h			

3. La fonction f admet donc un minimum nul, ce qui signifie que pour tout $x \in]0; +\infty[, \text{ on a } f(x) \geq 0$

$$\text{soit } x \ln x + e^{-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \ln x \geq -e^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x \ln x \geq -\frac{1}{e}.$$

Dérivées de fonctions du type $\ln u$

$$48. a) D_f = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ et } f'(x) = \frac{8}{8x - 4} = \frac{2}{2x - 1}$$

$$b) D_f = \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$c) D_f =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$$

$$\text{et } f'(x) = \frac{\frac{1 \times (2x + 4) - (x - 1) \times 2}{(2x + 4)^2}}{\frac{x - 1}{2x + 4}} = \frac{6}{(2x + 4)(x - 1)}$$

$$d) D_f =]0; +\infty[\text{ et } f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

49. a) Attention : il faut lire la fonction $f(x) = \ln(4 - x)$.

$$D_f =]-\infty; 4[\text{ et } f'(x) = -\frac{1}{4 - x}$$

$$b) D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \ln 2x > 0\} \\ = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x > 1\} = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\text{et } f'(x) = \frac{\frac{2}{2x}}{\ln 2x} = \frac{1}{x \ln 2x}$$

c) $D_f = \mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x \ln(e^x + 1) + x^2 \frac{e^x}{e^x + 1}$

$$= 2x \ln(e^x + 1) + \frac{x^2 e^x}{e^x + 1}$$

d) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0 \text{ et } x^2 - 1 > 0\}$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ et } x \neq 1$$

$$\text{et } x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$D_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2 - 1}(x^2 - 1) - \ln(x^2 - 1)(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{2x(1 - \ln(x^2 - 1))}{(x^2 - 1)^2}$$

e) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$

$$f'(x) = \frac{2(4x - 1) \times 4}{(4x - 1)^2} = \frac{8}{4x - 1}$$

f) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 > 0\}$

$$=]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

$$f'(x) = 3(\ln(x^2 - 1))^2 \times \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{6x(\ln(x^2 - 1))^2}{x^2 - 1}$$

ln x et fonctions auxiliaires

50. 1. a) $g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x}$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $g'(x) > 0$ donc g est croissante sur $]0; +\infty[$.

b) $g(1) = 0$, par conséquent, g est négative sur $]0; 1[$ et positive sur $]1; +\infty[$.

2. a) $f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{x^4 - x + 2x \ln x}{x^4}$

$$= \frac{x^3 - 1 + 2 \ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

b) $f'(x) < 0$ sur $]0; 1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$ donc f est décroissante sur $]0; 1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$.

51. 1. a) $h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} + 1 = \ln x + 2$

x	0	e^{-2}	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	-	0	+
Variations de h			

b) Le minimum de h est $1 - e^{-2} > 0$, donc la fonction h est positive sur $]0; +\infty[$.

2. a) $g'(x) = 1 \times \ln x + (x + 1) \times \frac{1}{x}$

$$= \frac{x \ln x + x + 1}{x} = \frac{h(x)}{x}$$

b) Puisque $h(x) > 0$ et $x > 0$ alors $g'(x) > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

c) **Attention** : les limites sont en 0 et $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

$$\text{Or } g(x) = x \ln x + \ln x$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\text{Donc par produit des limites, on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1) \ln x = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$$

ou $\ln x = 0$ or $x \in]0; +\infty[$. Cela revient donc uniquement à résoudre $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	0	1	$+\infty$
Variations de g			

Étude de fonctions avec lnu

52. 1. Soit la fonction $f(x) = (\ln 3 - 4x)$ sur $I = \left] -\infty; \frac{3}{4} \right[$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - 4x = +\infty \text{ or } \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x < \frac{3}{4}} 3 - 4x = 0^+ \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$$

$$x \rightarrow \frac{3}{4}$$

$$\text{Donc } \lim_{x < \frac{3}{4}} f(x) = -\infty$$

$$x \rightarrow \frac{3}{4}$$

Soit la fonction $g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x+1}\right)$ sur $J =]-1 ; 2[$:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2-x}{x+1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(X) = -\infty$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$

$$2. f'(x) = \frac{-4}{3-4x} \text{ pour tout } x \in]-\infty ; \frac{3}{4}[$$

$$f(x) < 0 \text{ donc } f \text{ est décroissante sur }]-\infty ; \frac{3}{4}[$$

$$g'(x) = \frac{\frac{-1(x+1) - (2-x) \times 1}{(x+1)^2}}{\frac{2-x}{x+1}} = \frac{-3}{(x+1)(2-x)} < 0$$

pour $x \in]-1 ; 2[$.

Donc g est décroissante sur $] -1 ; 2[$.

53. 1. Il faut que $-x^2 + 2x + 15 > 0$.

$\Delta = 64$ donc $x_1 = 5$ et $x_2 = -3$ soit $D_f =]-3 ; 5[$.

$$2. g'(x) = \frac{-2x+2}{-x^2+2x+15}$$

Or, pour tout $x \in]-3 ; 5[$, on a $-x^2 + 2x + 15 > 0$.

Donc le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $-2x+2$.

x	-3	1	5
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Variations de g			

$$3. T_0 : y = g'(0)x + g(0) \text{ soit } y = \frac{2}{15} + \ln 15.$$

$$54. 1. f'(x) = \frac{2}{2x+1} > 0 \text{ pour tout } x \in \left]-\frac{1}{2}; 4\right[.$$

La fonction f est donc strictement croissante sur I .

$$g'(x) = -\frac{1}{4-x}$$

Or pour tout $x \in I$, on a $4-x > 0$ donc $g'(x) < 0$ sur I .

La fonction g est donc strictement décroissante sur I .

2. Il s'agit d'étudier le signe de :

$$f(x) - g(x) = \ln(2x+1) - \ln(4-x).$$

$$\text{Or } \ln(2x+1) > \ln(4-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 > 4-x \text{ pour } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x > 1 \text{ et } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x \in]1 ; 4[.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $]1 ; 4[$.

$$55. 1. f'(x) = \frac{2x+2}{(x+1)^2} = \frac{2}{x+1}.$$

Or pour tout $x \in I =]-1 ; 5[$, $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur I .

$$g'(x) = -\frac{3}{-3x+15} = \frac{1}{x-5}.$$

Or pour tout $x \in I$, $x-5 < 0$ donc $g'(x) < 0$.

D'où g est strictement décroissante sur I .

2. Il s'agit de résoudre :

$$\ln(x^2+2x+1) > \ln(-3x+15)$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1 > -3x+15 \text{ avec } x \in I$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x-14 > 0 \text{ avec } x \in I.$$

$\Delta = 81$ donc $x_1 = -7$ et $x_2 = 2$.

x	-1	2	5
Signe de $f(x) - g(x)$	-	0	+

La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc strictement en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $] -1 ; 2[$ et strictement au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]2 ; 5[$.

Exercices d'entraînement p. 106-107

La fonction ln

$$56. 1. g(x) = \frac{\ln x \left(1 + \frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\ln x}}{1 - \frac{1}{\ln x}}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

$\lim_{x < e} \ln x - 1 = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow e} \ln x + 1 = 2$ d'où :

$$\lim_{x < e} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x > e} \ln x - 1 = 0^+$$

$$\lim_{x > e} g(x) = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

$$2. a) g'(x) = \frac{x}{(\ln x - 1)^2} = \frac{1(\ln x - 1) - (\ln x + 1) \times \frac{1}{x}}{x(\ln x - 1)^2} = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2}$$

b) Pour tout $x \in D_g$ on a $-\frac{2}{x} < 0$ or $(\ln x - 1)^2 > 0$

donc $g'(x) < 0$, la fonction g est donc strictement décroissante sur D_g .

x	0	e	$+\infty$
Variations de g	1	$+\infty$	1

$$57. 1. f'(x) = 2 \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{4 \ln x - 1}{x}. \text{ Pour tout } x \in]0; +\infty[, \text{ on a } x > 0.$$

Le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $4 \ln x - 1$.

x	0	$e^{\frac{1}{4}}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+

La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0; e^{\frac{1}{4}}[$ et strictement croissante sur $]e^{\frac{1}{4}}; +\infty[$.

$$2. a) 2X^2 - X - 1 = 0$$

$$\Delta = 9 \text{ donc } X_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = 1.$$

$$b) f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \text{ et } \ln x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = e \text{ et } x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

3. a)

x	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$e^{\frac{1}{4}}$	e
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	0	$-\frac{9}{8}$	0

b) Sur l'intervalle $]\frac{1}{\sqrt{e}}; e^{\frac{1}{4}}[$, la fonction f est strictement décroissante et continue, de plus $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) > -1$ et $f(e^{\frac{1}{4}}) < -1$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur cet intervalle. De même on montre que sur l'intervalle $]e^{\frac{1}{4}}; e[$ l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution β sur cet intervalle.

$$c) f(x) = -1 \Leftrightarrow 2(\ln x)^2 - \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x(2 \ln x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ et } \ln x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ et } x = \sqrt{e}$$

$$4. T_e : y = f(e)(x - e) + f(e) \text{ soit}$$

$$y = \frac{3}{e}(x - e) + 0 \text{ soit } y = \frac{3}{e}x - 3.$$

$$58. 1. a) f(1) = 2 \text{ et } f'(1) = 0$$

$$b) f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - (a + b \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{(b - a) - b \ln x}{x^2}$$

$$c) f(1) = 2 \Leftrightarrow a = 2$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow (b - a) = 0 \text{ avec } a = 2 \text{ on a alors } b = 2$$

$$f(x) = \frac{2 + 2 \ln x}{x}$$

2. a) $f'(x) = \frac{-2\ln x}{x^2}$

Puisque $\frac{2}{x^2} > 0$ sur $]0; +\infty[$ alors $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$ c'est-à-dire $f(x) > 0$ pour $x \in]0; 1[$ et $f(x) < 0$ pour $x \in]1; +\infty[$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + 2\ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$

Donc, par quotient des limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 2\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Par croissance comparée donc par somme des limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

3. a) Sur l'intervalle $]0; 1]$, la fonction f est strictement croissante et continue.

De plus pour tout $x \in]0; 1]$, on a $f(x) \in]-\infty; 2]$. Or $0 \in]-\infty; 2]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; 1]$.

b) À l'aide de la calculatrice, en traçant la courbe $\mathcal{C}_f$ et en cherchant la valeur de l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 1$, on détermine que $5 < \beta < 6$.

4. Attention : dans le programme Python , il faut lire **a=0**.

a) Cette fonction Python permet de calculer l'image de x par f .

b) Ce programme permet de déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.

c) Il faudrait changer **b-a>0,1** en **b-a>0,01** et l'instruction **if** serait à changer sous la forme :

```

if f(m) > 1 :
    a = m
else :
    b = m
    
```

59. 1. Soit C_g le coefficient multiplicateur global, on a alors :

$$C_g = 1,02 \times 1,021 \times \dots \times 1,021 \approx 1,1915$$

Sur ces 10 ans, il y a donc eu une augmentation totale d'environ 19,15 %.

$$2. \left(1 + \frac{t}{100}\right)^{10} \approx 1,1915$$

$$10 \ln \left(1 + \frac{t}{100}\right) \approx \ln 1,1915 \text{ soit}$$

$$\ln \left(1 + \frac{t}{100}\right) \approx \frac{\ln 1,1915}{10}$$

$$1 + \frac{t}{100} \approx e^{\frac{\ln 1,1915}{10}}$$

$$\left(e^{\frac{\ln 1,1915}{10}} - 1\right) \approx 1,77$$

Si l'augmentation était toujours la même sur les 10 ans, elle serait d'environ 1,77 %.

60. A ► 1. $\lim_{x \rightarrow 0} -2\ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -xe + 1 = 1$

D'où par somme des limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -2\ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -xe + 1 = -\infty.$$

Donc, par somme des limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

$$2. g'(x) = -\frac{2}{x} - e = \frac{-2 - ex}{x}.$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$ $x > 0$ et $-2 - ex < 0$

Donc $g'(x) < 0$ d'où la fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$.

3. Sur l'intervalle $[0,5; 1]$, la fonction g est strictement décroissante et continue.

De plus $g(0,5) \approx 1,03 > 0$ et $g(1) = 1 - e < 0$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle.

À l'aide de la calculatrice on trouve $\alpha \approx 0,7$.

4.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $g(x)$	+	0	-

$$\begin{aligned}
 \text{B} \blacktriangleright 1. f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x} + e\right)x^2 - (\ln x + xe) \times 2x}{x^4} \\
 &= \frac{(1+xe)x - 2x(\ln x + xe)}{x^4} \\
 &= \frac{1+xe - 2\ln x - 2xe}{x^3} \\
 &= \frac{-2\ln x - xe + 1}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}
 \end{aligned}$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0 ; \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha ; +\infty[$.

$$2. f(\alpha) = \frac{\ln \alpha + \alpha e}{\alpha^2} \text{ or } g(\alpha) = 0 \text{ soit}$$

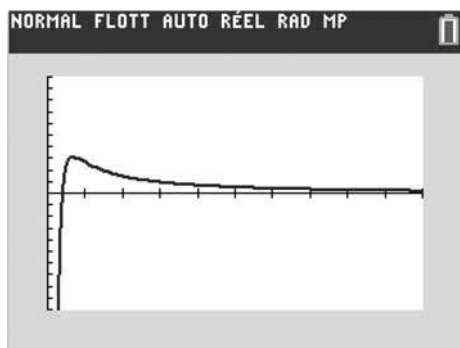
$$-2\ln \alpha - \alpha e + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1 - \alpha e}{2}$$

$$\text{D'où } f(\alpha) = \frac{\frac{1 - \alpha e}{2} + \alpha e}{\alpha^2} = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}.$$

3.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

4.



Fonction de type $\ln u$

$$61. 1. a) f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+1-4}{2(x+1)} = \frac{x-3}{2(x+1)}$$

b)

x	-1	3	$+\infty$
$x-3$	-	0	+
$2(x+1)$	0	+	+
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

2. Attention : il faut lire la droite d'équation $y = -x$. Il s'agit de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{2(x+1)} = -1 \text{ avec } x \in]-1 ; +\infty[\\
 &\Leftrightarrow x-3 = -2(x+1) \text{ avec } x \in]-1 ; +\infty[\\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ avec } x \in]-1 ; +\infty[.
 \end{aligned}$$

Il existe donc une tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$, parallèle à la droite d'équation $y = -x$.

$$\begin{aligned}
 T_{\frac{1}{3}} : y &= f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \\
 y &= -\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{7}{6} - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right) = -x + \frac{3}{2} - 2\ln\left(\frac{4}{3}\right).
 \end{aligned}$$

$$3. f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = -2\ln(x+1)$$

Pour tout $x \in]-1; 0[$, on a $0 < x+1 < 1$

Donc $\ln(x+1) < 0$.

Et pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a $\ln(x+1) > 0$.

Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement en-dessous de la droite d sur l'intervalle $]-1; 0[$ et strictement au-dessus sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$62. 1. f(-1) = \ln 2 \Leftrightarrow \ln(a-b+c) = \ln 2 \Leftrightarrow a-b+c = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{7}{8}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a}{16} - \frac{b}{4} + c\right) = \ln\left(\frac{7}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} - 2b + 8c = 7$$

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(c) = 0 \Leftrightarrow c = 1$$

Il s'agit de résoudre :

$$\begin{cases} a - b + 1 = 2 \\ \frac{a}{2} - 2b + 8 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a - 4b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

On a alors $f(x) = \ln(2x^2 + x + 1)$

2. a) $f'(x) = \frac{4x + 1}{2x^2 + x + 1}$

b) Pour trouver le signe de $2x^2 + x + 1$, on calcule $\Delta = -7$. Ce qui signifie que le polynôme est toujours du signe de $a = 2$.

Il est donc toujours positif, le signe de $f'(x)$ ne dépend que du signe de $4x + 1$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty \searrow \ln\left(\frac{7}{8}\right) \nearrow +\infty$		

$$f(x) = x^2 \left(2 + \frac{1}{x} \right) + 1$$

Or $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$

Donc, par produit des limites, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 + x + 1 = +\infty \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$f(-1) = \ln(2 \times 1 - 1 + 1) \ln 2$$

$$f(0) = \ln 1 = 0.$$

Modélisations

63. 1. Puisque $u_{n+1} = u_n \times 1,5$ cela signifie que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,5$ et de 1^{er} terme $u_0 = 10\,000$.

2. $u_n = u_0 \times q^n = 10\,000 \times 1,5^n$.

3. $10\,000 \times 1,5^n > 1\,000\,000 \Leftrightarrow 1,5^n > 100$
 $\Leftrightarrow n \ln 1,5 > \ln 100$
 $\Leftrightarrow n > \frac{\ln 100}{\ln 1,5}$

Soit $n \geq 12$.

Ceci signifie qu'au bout de 12 h, le nombre de bactéries aura dépassé le million.

64. 1. $u_{n+1} = u_n \times 1,02$

Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison 1,02 et de 1^{er} terme 1 200.

2. On veut déterminer n tel que :

$$\begin{aligned} u_n &\geq 3\,600 \Leftrightarrow 1\,200 \times 1,02^n \geq 3\,600 \\ &\Leftrightarrow 1,02^n \geq 3 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3}{\ln 1,02} \end{aligned}$$

Soit $n \geq 56$.

Au bout de 56 ans, le capital aura triplé.

65. 1. a) $L' = 10 \times \log\left(\frac{4I}{I_0}\right)$

On applique simplement la définition donnée en 1.

b) $L' = 10 \times \log\left(4 \times \frac{I}{I_0}\right)$
 $= 10 \times \left(\log 4 + \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \right)$
 $= 10 \log 4 + 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \approx 6 + L$

2. $L' = 10 \times \log\left(0,2 \times \frac{I}{I_0}\right)$
 $= 10 \times \log(0,2) + 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$
 $\approx -7 + L$

Exercices bilan

p. 108

66. Étude d'une fonction ln

1. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -2 \ln x = +\infty$

Donc par somme des limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$f(x) = \ln x (\ln x - 2) \text{ or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 2 = +\infty$$

Donc par produit des limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale, l'axe des ordonnées.

2. a) $f'(x) = 2\ln x \times \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2\ln x - 2}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$

b) Sur $]0; +\infty[$, on a $x > 0$ et $2 > 0$.

Le signe de $f'(x)$ ne dépend donc que du signe de $\ln x - 1$.

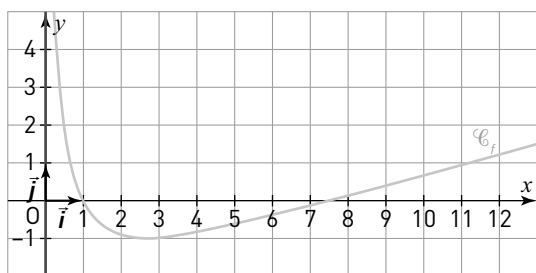
$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

x	0	e	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty \searrow \quad \quad \nearrow +\infty$ $\quad \quad \quad -1$		

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x - 2) = 0$.

Il s'agit d'une équation produit nul donc $\ln x = 0$ ou $\ln x - 2 = 0$ donc $S = \{1; e^2\}$.

4.



67. Avec une fonction auxiliaire

A ▶ 1. $v: x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

De plus, $w: x \mapsto x - 3$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, par conséquent, la fonction u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ comme somme de fonctions croissantes sur cet intervalle.

2. $u(2) = \ln 2 - 1 < 0$ et $u(3) = \ln 3 > 0$.

Par conséquent, la fonction u est strictement croissante et continue sur $]0; +\infty[$.

De plus, $u(2) < 0$ et $u(3) > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α .

3.

x	0	α	$+\infty$
Variations de u	$\nearrow$ $\quad \quad \quad 0$		
Signe de u	-	0	+

B ▶ 1. $\lim_{\substack{x>0 \\ x \rightarrow 0}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) - 2 = -\infty$

Par produit des limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

2. a) $f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}$
 $= \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{\ln x + x - 3}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}$

b) Pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a $x^2 > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $u(x)$.

La fonction f est donc décroissante sur $]0; \alpha[$ et croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

C ▶ 1. $f(x) - \ln x = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) + 2 - \ln x$
 $= -\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2 - \ln x}{x}$

2. $2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow x < e^2$

Donc sur l'intervalle $]0; e^2[$, $f(x) - \ln x > 0$, ce qui signifie que $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{C}'$.

Sur l'intervalle $]e^2; +\infty[$ on a $f(x) - \ln x < 0$

Donc la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{C}'$.

68. Calcul d'aire et étude de $\ln$

1. Soit g la fonction associée à l'aire du rectangle OPMQ :

$g(x) = x \times f_a(x) = ax - x \ln\left(\frac{x}{a}\right)$

$g'(x) = a - \ln\left(\frac{x}{a}\right) - x \times \frac{1}{\frac{x}{a}} \times \frac{1}{a} = a - \ln\left(\frac{x}{a}\right) - 1$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{a}\right) < a - 1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{a} < e^{a-1} \text{ et } x < 0$

$\Leftrightarrow 0 < x < ae^{a-1}$

x	0	ae^{a-1}	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Variations de g			

$$g(ae^{a-1}) = ae^{a-1}$$

$$M(ae^{a-1}; ae^{a-1})$$

2. Il s'agit de résoudre :

$$ae^{a-1} = a \Leftrightarrow e^{a-1} = 1 \Leftrightarrow a-1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Il existe une seule valeur : $a = 1$.

69. Paramètres et fonction auxiliaire

A ▶ 1. $f(1) = 3$

$$f'(1) = 2$$

$$f(2) = 4\ln 2 + 1.$$

2. $f(1) = 3 \Leftrightarrow b + c = 3$

$$f'(x) = \frac{a}{x} + b \text{ d'où } f'(1) = 2 \Leftrightarrow a + b = 2$$

$$f(2) = 4\ln 2 + 1 \Leftrightarrow a\ln 2 + 2b + c = 4\ln 2 + 1$$

Par identification : $a = 4$ et $2b + c = 1$

On doit alors résoudre :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ b + c = 3 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

On a alors : $f(x) = 4\ln x - 2x + 5$.

3. $S = [1; 3,5]$

B ▶ 1. $\lim_{x \rightarrow 0} 4\ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} -2x + 5 = 5$

Donc, par somme des limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

$$g(x) = x \left(\frac{4\ln x}{x} - 2 \right) + 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

par croissance comparée.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\ln x}{x} - 2 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

D'où, par produit des limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

2. $g'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$ sur $]0; +\infty[$, on a $x > 0$.

Le signe de $g'(x)$ ne dépend que du signe de $2 - x$.

x	0	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Variations de g			

3. $g(1) = 2\ln 1 - 1 + 1 = 0$

1 est donc bien solution de l'équation $g(x) = 0$.

4. La fonction g est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$ et continue. De plus, pour tout $x \in [2; +\infty[$, $g(x) \in]-\infty; 2\ln 2 - 1]$

Or $x \in I$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2; +\infty[$. Ici $\alpha \approx 3,51$.

5.

x	0	1	2	α	$+\infty$
Variations de g					
Signe de g	-	0	+	0	-

6. $f(x) \geq 3 \Leftrightarrow 4\ln x - 2x + 2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 2\ln x - x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) \geq 0$$

$$S = [1; \alpha]$$

70. ln u et tangente

$$\begin{aligned} 1. f(-x) &= \ln\left(\frac{5+x}{5-x}\right) = -\ln\left(\frac{1}{\frac{5+x}{5-x}}\right) \\ &= -\ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right) \end{aligned}$$

On en déduit donc $f(-x) = -f(x)$.

Autrement dit, la fonction f est impaire ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2. a) $\lim_{x \rightarrow -5} (5+x) = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -5} (5-x) = 10$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{10}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = +\infty$.

Ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\Delta : x = -5$ comme asymptote verticale.

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \frac{\frac{-(5+x) - (5-x)}{(5+x)^2}}{\frac{5-x}{5+x}} = \frac{-10}{(5+x)^2} \times \frac{5+x}{5-x} \\ &= \frac{-10}{(5+x)(5-x)} \end{aligned}$$

Sur $]-5; 0]$, on a $5-x > 0$ et $5+x > 0$ donc $f'(x) < 0$.
La fonction f est donc décroissante sur $]-5; 0]$.

c) $T_0 : y = f'(0)x + f(0) = -0,4x$.

3. a) Sur l'intervalle $]-5; 0]$, la tangente semble être au-dessus de la courbe $\mathcal{C}$ et sur l'intervalle $[0; 5]$, la tangente semble être en-dessous de la courbe $\mathcal{C}$.

b) **Attention** : changement de question :

Dresser le tableau de variations de la fonction

$$h : x \mapsto \ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right) + 0,4x.$$

On pensera à faire apparaître l'image de 0.

Il faut étudier le signe de

$$f(x) - (-0,4x) = \ln\left(\frac{5-x}{5+x}\right) + 0,4x.$$

Ainsi, il s'agit donc bien d'étudier le signe de h .

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{-10}{(5+x)(5-x)} + \frac{2}{5} = \frac{-50 + 2(5+x)(5-x)}{5(5+x)(5-x)} \\ &= \frac{-2x^2}{5(5+x)(5-x)} \end{aligned}$$

x	-5	0	+5
Signe de $-2x^2$	-	0	-
Signe de $5(5+x)(5-x)$	0	+	0
Signe de $h'(x)$	0	-	0
Signe de $5(5+x)(5-x)$			

c) **Attention** : changement de question :

En déduire la démonstration de cette conjecture.

Sur $]-5; 0]$, $h(x) > 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente.

Sur $]0; 5]$, $h(x) < 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de la tangente.

Exercices Préparer le BAC

Je me teste

p. 110

71. **C** 72. **C**

73. **B** 74. **D**

75. **C** 76. **C**

Exercices Préparer le BAC

Je révise

p. 111

77. Positions relatives de courbes

$$1. f(x) > 0 \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}}.$$

Pour $x \in]e^{\frac{3}{2}}; +\infty[$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

$$2. g(x) > f(x) \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 2\ln x - 3 > 0$$

On pose $X = \ln x$.

On a alors :

$$X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3) \text{ à l'aide du calcul de } \Delta.$$

On a alors $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 > 0$

$$\Leftrightarrow (\ln x + 1)(\ln x - 3) > 0.$$

x	0	$\frac{1}{e}$	e^3	$+\infty$
$\ln x + 1$	-	0	+	+
$\ln x - 3$	-	-	0	+
Signe de $f(x) - g(x)$	+	0	-	+

La courbe $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $\left]0; \frac{1}{e}\right[$ et sur $]e^3; +\infty[$.

$$3. \text{ a) } h'(x) = 4\ln x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \frac{4\ln x - 1}{x}$$

$h'(x) > 0$ pour $x \in]e^{\frac{1}{4}}; +\infty[$. Donc h est croissante sur $]e^{\frac{1}{4}}; +\infty[$ et décroissante sur $]0; e^{\frac{1}{4}}[$.

$$\text{b) } h(x) = 0 \Leftrightarrow 2(\ln x)^2 - \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x(2\ln x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathcal{C}_h$ coupe l'axe des abscisses en $M(1; 0)$ et $N(e^{\frac{1}{2}}; 0)$.

78. Retrouver l'expression de la fonction

1. $A(0; 1) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1.$

Graphiquement, on voit que :

$$f'(0) = -1 \text{ or } f'(x) = 2ax + b - \frac{1}{x+1}.$$

D'où $f'(0) = -1 \Leftrightarrow b - 1 = -1 \Leftrightarrow b = 0.$

$$f'(1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2a - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

D'où $f(x) = x^2 + 1 - \ln(x+1).$

2. $f'(x) = 2x - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x - 1}{x+1}$

Sur $] -1; +\infty[$, on a $x+1 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x^2 + 2x - 1$.

x	-1	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty \swarrow \searrow +\infty$ $f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0,82$		

$\lim_{x \rightarrow -1} x+1 = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} -\ln(X) = +\infty$

De plus, $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 1 = 2$ donc par somme des limites,

on a $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty.$

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right) + 1 \text{ pour } x \neq 0$$

$$f(x) = x^2 \left(1 - \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \times \frac{(x+1)^2}{x^2} \right) + 1$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X^2} = 0$

Par croissance comparée et avec

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 = 1, \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Et donc, par produit des limites, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$

3. Cela revient à résoudre :

$$f'(x) \times f'(0) = -1 \Leftrightarrow \left(2x - \frac{1}{x+1} \right) \times (-1) = -1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 = 0$$

avec $x \in] -1; +\infty[\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

Il existe donc une tangente à $\mathcal{C}_f$ perpendiculaire à T_0 .

4. $f(x) - g(x) = -4 - \ln(x+1) < 0$

$$\Leftrightarrow x \in]e^{-4} - 1; +\infty[.$$

Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $]e^{-4} - 1; +\infty[$ et au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $] -1; e^{-4} - 1[.$

$$f(x) - h(x) = -\ln(x+1) + \ln(x^2 + 6x + 5) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 4}{x+1} > 0 \text{ avec } x \in] -1; +\infty[$$

ce qui est toujours le cas sur $] -1; +\infty[.$

Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathcal{C}_h$ sur $] -1; +\infty[.$

$$h(x) - g(x) = -4 - \ln(x^2 + 6x + 5) < 0 \text{ avec } x \in] -1; +\infty[$$

$$\Leftrightarrow x \in] -1; -3 + \sqrt{4 + e^{-4}}[$$

Donc $\mathcal{C}_h$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $] -1; -3 + \sqrt{4 + e^{-4}}[$

et au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $] -3 + \sqrt{4 + e^{-4}}; +\infty[.$

79. Pourcentages, ln et suites

1. 1,2 traduit la hausse de 20 % et le « -28 » le fait de prélever 28 poissons à la fin de chaque année.

2. a) $w_{n+1} = u_{n+1} - 140 = 1,2u_n - 168$
 $= 1,2(u_n - 140) = 1,2w_n$

Par conséquent, la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,2$.

$$w_n = w_0 \times 1,2^n = 10 \times 1,2^n$$

D'où $u_n = w_n + 140 = 10 \times 1,2^n + 140.$

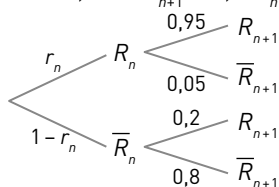
b) $u_n > 200 \Leftrightarrow 1,2^n > 60 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(60)}{\ln(1,2)}$

Soit $n \geq 10.$

Par conséquent, la responsable devra prévoir l'achat d'un autre aquarium au bout de 10 ans soit en 2028.

80. Probabilités et ln

1. $p(R_{n+1}) = r_{n+1} = 0,95r_n + 0,2(1-r_n)$ d'après la loi des probabilités totales, d'où $r_{n+1} = 0,75r_n + 0,2$.



2. a)

```

r ← 0.9
n = 1
Tant que r > 0,80001
    n = n + 1
    r = 0,75 * r + 0,2
Fin Tant que
    
```

b) $0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8 \leq 0,80001$

$$\Leftrightarrow 0,7^{n-1} \leq 0,0001$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,0001)}{\ln(0,7)} + 1$$

Donc c'est vérifié à partir de $n = 27$.

À partir de la 27^e semaine, la probabilité que le client rapporte la bouteille de son panier devient inférieure à 0,80001.

81. Avec une fonction auxiliaire

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} 5x^2 - 2 + 2\ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0^+$

Donc, par quotient de limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$.

$$g(x) = \frac{x^2 \left(5 - \frac{2}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2} \right)}{2x^2} = \frac{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}}{2}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée.

Donc, par somme des limites, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}}{2} = \frac{5}{2} \text{ soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{5}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g'(x) &= \frac{\left(10x + \frac{2}{x} \right) (2x^2) - (5x^2 - 2 + 2\ln x) \times 4x}{4x^4} \\ &= \frac{3 - 2\ln x}{x^3} \end{aligned}$$

x	0	α	$(\sqrt{e})^3$	$+\infty$
Signe de $g(x)$		+	0	-
Variations de g	$-\infty$	0	$\frac{5e^3 + 1}{2e^3}$	$\frac{5}{2}$
Signe de g	-	0	+	

c) Sur l'intervalle $]0,5; 1[$, g est une fonction continue, strictement croissante tel que $g(0,5) < 0$ et $g(1) > 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0,5; 1[$.

Sur $]0; 0,5[$, la fonction g est négative donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution et sur $]1; +\infty[$, la fonction g est positive donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution.

d) Voir le tableau précédent.

2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} 5x^2 - 2\ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0^+$

Donc, par quotient de limites, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

$$f(x) = \frac{x^2 \left(5 - \frac{2\ln x}{x^2} \right)}{2x} = \frac{x \left(5 - \frac{2\ln x}{x^2} \right)}{2}$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissance comparée.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(5 - \frac{2\ln x}{x^2} \right)}{2} = +\infty \text{ par produit et quotient}$$

des limites soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{\left(10x - \frac{2}{x} \right) \times 2x - (5x^2 - 2\ln x) \times 2}{4x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x) = \text{Signe de } g(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

c) D'après le tableau de variations, on en déduit que

f admet un minimum en α valant $f(\alpha) = \frac{5\alpha^2 - 2\ln \alpha}{2\alpha}$

Or on a $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2\ln \alpha = 2 - 5\alpha^2$

D'où $f(\alpha) = \frac{5\alpha^2 - 2 + 5\alpha^2}{2\alpha} = \frac{5\alpha^2 - 1}{\alpha}$.

d) $\alpha > 0,5$ donc $5\alpha^2 - 1 > 0$

d'où $\frac{5\alpha^2 - 1}{\alpha} > 0$

Le minimum de f étant positif, f est donc toujours positive sur $]0 ; +\infty[$.

CHAPITRE 5 Primitives et équations différentielles

Manuel p. 112-137

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Dans ce chapitre est introduite la notion d'équation différentielle et les élèves y découvrent le concept d'équation où l'inconnue est une fonction.

L'équation $y' = f$ introduit la notion de primitive dont la pratique sera travaillée, à la fois sur les fonctions usuelles mais aussi sur les fonctions composées et la forme $(u' \circ v) \times v'$.

Il doit permettre aux élèves d'installer des automatismes dans la recherche de primitives.

L'étude de l'équation $y' = ay + b$ est l'occasion de réinvestir les propriétés de la fonction exponentielle et les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien utiles dans la résolution d'équations et d'inéquations.

Ce chapitre sollicite les connaissances sur la continuité, la dérivabilité, les limites de fonctions, la résolution d'équations et d'inéquations. L'étude des équations différentielles développe les compétences pour prendre des initiatives et occupe une place centrale comme outil de modélisation.

L'algorithmique y occupe une part non négligeable notamment pour proposer une résolution approchée d'une équation $y' = ay + b$ par la méthode d'Euler.

Objectifs

- Savoir identifier une fonction solution de l'équation $y' = f$.
- Savoir reconnaître et savoir déterminer une ou l'ensemble des primitives d'une fonction usuelle ou d'une fonction composée.
- Savoir résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay$, avec a réel, avec ou sans condition initiale.
- Savoir résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$, avec a et b réels, avec ou sans condition initiale.
- Savoir résoudre une équation différentielle de la forme $y' = ay + \phi$ avec ϕ fonction.
- Modéliser un problème à l'aide d'une équation différentielle.
- Être capable d'interpréter et de travailler le concept d'équations différentielles en général.

II. Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 112

1. Calculer des dérivées de fonctions usuelles

a) $f'(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0 ; +\infty[$

c) $f'(x) = 5x^4$ sur $\mathbb{R}$

d) $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$ ou $]-\infty ; 0[$

e) $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$ sur $]0 ; +\infty[$ ou $]-\infty ; 0[$

2. Calculer des dérivées de fonctions de la forme $u \times v$, $\frac{u}{v}$ et $\frac{1}{v}$

a) $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$ ou $]-\infty ; 0[$

b) $f'(x) = (x+2)e^x$ sur $\mathbb{R}$

- c) $f'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$ sur $]-2; +\infty[$
 d) $f'(x) = \ln x + 1$ sur $]0; +\infty[$
 e) $f'(x) = \frac{-2}{(x+5)^3}$ sur $]-\infty; -5[$ ou $]-5; +\infty[$
 f) $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$

3. Calculer des dérivées de fonctions composées

- a) $f'(x) = -e^{-x+1}$ sur $\mathbb{R}$
 b) $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$ sur $\mathbb{R}$
 c) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ sur $\left]-\frac{1}{3}; +\infty\right[$
 d) $f'(x) = 12(4x+1)^2$ sur $\mathbb{R}$
 e) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ sur $\mathbb{R}$
 f) $f'(x) = \frac{4}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$ sur $\mathbb{R}$

4. Calculer des dérivées de la forme $f(ax+b)$, $e^{u(x)}$, $\ln(u(x))$

- a) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$
 b) $f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+5}$
 c) $f'(x) = (2x+5)e^{x^2-3x+5}$

5. Identifier si deux fonctions ont la même dérivée

- a) Les fonctions sont égales à la constante $\ln 2$ près sur I .

Leur dérivée est $f'(x) = g'(x) = \frac{2x+6}{(x+1)(x+5)}$.

- b) $f'(x) = g'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} - 1$

6. Résoudre des équations

a) $t = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-3}$

b) Impossible.

c) $x = \ln \frac{100}{7}$

d) $t = -2\ln 5$

Activités

p. 114-115

1. Découvrir la notion d'équation différentielle

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Introduire dans un contexte la notion d'équation différentielle et de fonction solution.

1. $u'(t) = \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-t}{4}}}{\left(1+2e^{\frac{-t}{4}}\right)^2}$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{12}[u(t)]^2 &= \frac{3}{4\left(1+2e^{\frac{-t}{4}}\right)} - \frac{1}{12} \times \left(\frac{3}{1+2e^{\frac{-t}{4}}}\right)^2 \\ &= \frac{9\left(1+2e^{\frac{-t}{4}}\right) - 9}{12\left(1+2e^{\frac{-t}{4}}\right)^2} = u'(t). \end{aligned}$$

2. $u'(t) = \frac{u(t)}{12}(3-u(t))$ sachant que $u(t)$ est positif,

la dérivée sera positive pour $u(t) < 3$ donc u est croissante sur $]0; 3[$.

2. Découvrir la notion de primitive

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Sur des exemples d'équations différentielles $y' = f$, en appliquant les règles de dérivation, déterminer une fonction primitive ou vérifier qu'une fonction est primitive d'une fonction donnée.

A ► Équation $y' = f$

1. a) $y(x) = e^x + 3x$ convient.

b) $F(x) = 4\sqrt{x} - x$ convient.

2. a) Ici, on ne reconnaît pas directement des fonctions usuelles ou des formules de dérivation obtenues par opération sur des fonctions usuelles.

b) $G(x) = (ax + b)e^x$ alors G est dérivable et $G'(x) = (a + ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$.

Par identification avec $g(x) = (x + 2)e^x$, on arrive à $a = 1$ et $b = 1$.

Ainsi $G(x) = (x + 1)e^x$.

3. $H(x) = x \ln x - x$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et

$$H'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

B ► Affirmations équivalentes

1. et 2. Si f et g ont la même dérivée sur I alors $f'(x) - g'(x) = 0$ sur I c'est-à-dire $(f - g)'(x) = 0$.

Ainsi la fonction $f - g$ est constante sur I .

Réciproquement, s'il existe un réel K tel que $(f - g)(x) = K$ alors $(f - g)'(x) = 0$ soit $f'(x) - g'(x) = 0$ c'est-à-dire f et g ont la même dérivée sur I .

3. Introduire l'étude des équations $y' = ay$ et $y' = ay + b$

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** À partir d'une fonction solution découvrir un ensemble de fonctions solutions.

A ► L'équation $y' = y$

1. La fonction $x \mapsto e^x$.

2. Si on a $f' = f$ alors $(Kf)' = Kf' = Kf$

Donc la fonction Kf est aussi solution de l'équation $y' = y$

3. Les fonctions $x \mapsto Ke^x$ avec K réel.

B ► L'équation $y' = ay$ et les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ avec K et a réels

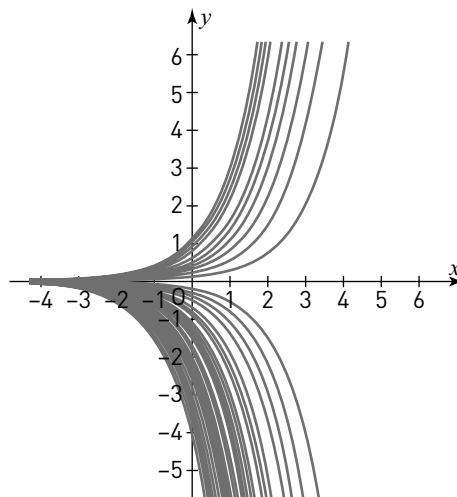
1. On dérive la fonction $f : x \mapsto e^{3x}$ et on obtient $f'(x) = 3e^{3x}$ donc $f' = 3f$.

2. Sur le modèle de la question précédent et en appliquant le bilan du **A ►** on fournit :

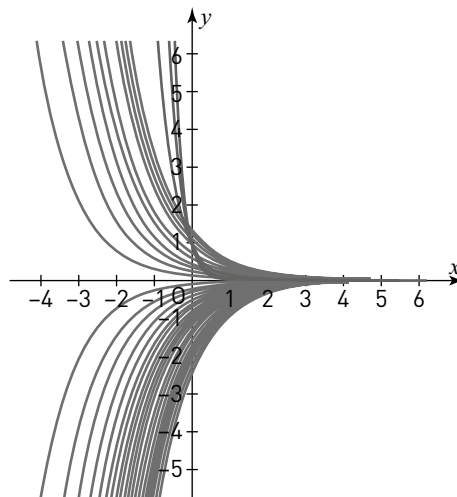
$x \mapsto Ke^{5x}$ avec K réel pour solutions de $y' = 5y$.

$x \mapsto Ke^{-x}$ avec K réel pour solutions de $y' = -y$.

3. a positif et K positif puis négatif :



a négatif et K positif puis négatif :



4. a) ① b) ⑤ c) ④ d) ③ e) ②

C ► L'équation $y' = ay + b$

1. En effet $y + \frac{5}{3}$ et y ont la même dérivée.

On a f solution de (E) si et seulement si $f' = 3f + 5$

$$\Leftrightarrow \left(f + \frac{5}{3}\right)' = 3\left(f + \frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow \left(f + \frac{5}{3}\right) \text{ est solution de } y' = 3y.$$

D'après la partie **B ►**, les fonctions $x \mapsto Ke^{3x}$ avec K réel, sont des solutions de $y' = 3y$.

Donc les fonctions $x \mapsto -\frac{5}{3} + Ke^{3x}$ avec K réel, sont des solutions de (E).

2. f solution de $y' = ay + b \Leftrightarrow \left(f + \frac{b}{a}\right)' = a\left(f + \frac{b}{a}\right)$

$\Leftrightarrow f + \frac{b}{a}$ solution de $y' = ay$.

D'après la partie **B** ►, les fonctions $x \mapsto Ke^{ax}$ avec K réel, sont des solutions de $y' = ay$.

Donc les fonctions $x \mapsto -\frac{b}{a} + Ke^{ax}$ avec K réel, sont des solutions de $y' = ay + b$.

À vous de jouer !

p. 117-123

1. a) $y'(x) = 5x^2 + 3x = f(x)$

b) $y'(x) = -\frac{3}{3x^4} = -\frac{1}{x^4} = f(x)$

2. a) $y'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = f(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

b) $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} = f(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

3. a) $F(x) = \frac{5}{12}x^4$

b) $F(x) = \frac{1}{3x^3}$

4. a) $F(x) = 2\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$

b) $F(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$

5. 1. $F'(x) = 1 \times \ln(x) - x \times \frac{1}{x} + 1 = \ln(x)$

2. L'ensemble des primitives de $\ln x$ est

$G_k : x \mapsto x \ln x + x + k$ avec k réel.

6. 1. La dérivée de e^{x^2} est $2xe^{x^2}$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Une primitive H de f est telle que $H(x) = e^{x^2} + k$, ici $H(0) = 5$ donc $k = 4$ et donc $H(x) = e^{x^2} + 4$.

7. a) e^{-x}

b) $\ln(x^3 + 5)$

c) $(x^2 + x - 7)^2$

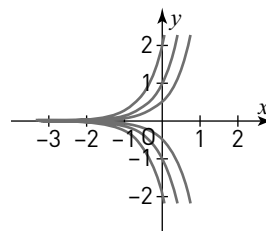
8. a) $(x^4 + 3x)^2$

b) $\ln(3x - 1)$

c) e^{2x+1}

9. 1. L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto Ke^{2x}$, où K est réel.

2. Si K est positif, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, si K est négatif la courbe est dessous de cet axe.



10. 1. a) $y' + \frac{1}{3}y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{3}y$

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto Ke^{-\frac{1}{3}x}$ avec K réel.

b) $4y' + 5y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{4}y$

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto Ke^{-\frac{5}{4}x}$ avec K réel.

2. $Ke^{-\frac{5}{4} \times 1} = 2 \Leftrightarrow K = 2e^{\frac{5}{4}}$

Donc la solution recherchée est $y : x \mapsto 2e^{\frac{5}{4}}e^{-\frac{5}{4}x}$

11. a) Une solution particulière est la fonction constante $-\frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto -\frac{1}{2} + Ke^{2x}$ avec K réel.

b) Une solution particulière est la fonction constante $\frac{2}{5}$.

L'ensemble des solutions sont les fonctions

$y_K : x \mapsto \frac{2}{5} + Ke^{-5x}$ avec K réel.

c) $y' + y = 3 \Leftrightarrow y' = -y + 3$

Une solution particulière est la fonction constante 3.
L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto 3 + Ke^{-x}$ avec K réel.

d) $4y' + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y + \frac{5}{4}$

Une solution particulière est la fonction constante 5.
L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto 5 + Ke^{-\frac{1}{4}x}$ avec K réel.

12. Une solution particulière est la fonction constante -20.

L'ensemble des solutions sont les fonctions $y_K : x \mapsto 20 + Ke^{0,5x}$, avec K réel.

$$y_K(4) = -30 \Leftrightarrow -20 + Ke^{0,5 \times 4} = -30 \\ \Leftrightarrow K = -10e^{-2}$$

Donc la solution recherchée est

$$y_K : x \mapsto -20 - 10e^{-2} e^{-5x}$$

13. 1. $3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{3}y$

Les solutions sont $y_K : x \mapsto Ke^{-\frac{2}{3}x}$ avec K réel.

2. $y_K(0) = e \Leftrightarrow Ke^{-\frac{2}{3} \times 0} = e \Leftrightarrow K = e$

Donc $f : x \mapsto e \times e^{-\frac{2}{3}x} = e^{1-\frac{2}{3}x}$.

3. $f'(x) = -\frac{2}{3}e^{1-\frac{2}{3}x} < 0$ pour tout réel x .

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

5. $f(x) = 5 \Leftrightarrow e^{1-\frac{2}{3}x} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{3-3\ln(5)}{2}$

14. 1. $y(x) = \frac{-3}{5} + Ke^{5x}$

2. $y(0) = \frac{-3}{5} + K = \frac{-6}{5}$ donc $K = \frac{-3}{5}$ et

$$f(x) = \frac{-3}{5} + \frac{-3}{5}e^{5x} = \frac{-3}{5}(1 + e^{5x})$$

3. $f'(x) = -3e^{5x} < 0$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{-3}{5}$

5. $f(x) = -10 \Leftrightarrow -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{5x} = -10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{47}{3}\right)}{5}$

6. $f(x) < -100 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}(1 + e^{5x}) < -100 \Leftrightarrow x > \frac{\ln\left(\frac{497}{3}\right)}{5}$

7. Voici un algorithme possible.

```

x ← 0
Tant que  $\frac{3}{5}(1 + e^{5x}) > -10000$ 
    x ← x+1
Fin Tant que
    
```

15. 1. Les solutions sont

$$y_K \mapsto Ke^{-0,035x} \text{ avec } K \text{ réel.}$$

2. $y_K(0) = 7 \Leftrightarrow K = 7$ donc $g(x) = 7e^{-0,035x}$.

3. $g(100) = 7e^{-0,035 \times 100} = 7e^{-3,5} \\ \approx 0,211 \text{ mW} > 0,08 \text{ mW}$

Donc le son est détectable.

16. 1. L'équation différentielle est $f' = \alpha f$, où α est une constante réelle.

Les solutions sont de la forme $x \mapsto f(t) = Ke^{\alpha t}$ avec $f(0) = 25$, on obtient $f(t) = 25e^{\alpha t}$.

2. Avec la condition $f(10) = 15$, soit $25e^{\alpha \times 10} = 15$,

on arrive à : $f : x \mapsto 25e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10}x}$.

3. $f(4) = 25e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10} \times 4} = 25e^{\frac{2\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{5}} \approx 20,4$

Il reste environ 20,4 kg de sel.

4. $f(x) = 0,5 \Leftrightarrow 25e^{\frac{\ln\left(\frac{3}{5}\right)}{10}x} = 0,5 \Leftrightarrow x = \frac{-10\ln(50)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} \approx 76,6$

Il ne reste plus que 0,5 kg de sel au bout de environ 76,6 heures.

Exercices

apprendre à démontrer

p. 117-123

Pour s'entraîner

Considérons une fonction $y(x) = Ke^{-ax}$.

Sa dérivée est $y'(x) = -Kae^{-ax}$.

Ainsi $-ay(x) = -a(Ke^{-ax}) = -Kae^{-ax} = y'(x)$.

Réciproquement, nous devons montrer que toute fonction solution est de la forme Ke^{-ax} .

Considérons g une solution de l'équation $y' = -ay$.

On a alors, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = -ag(x)$.

Définissons une fonction t par $t(x) = g(x) \times e^{ax}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$t'(x) = g'(x) \times e^{ax} + ag(x)e^{ax} = e^{ax}(g'(x) + ag(x)) = 0.$$

La fonction t est donc une fonction constante.

Il existe un réel K tel que $t(x) = K$ et ainsi $g(x) = Ke^{-ax}$.

Exercices

calculs et automatismes

p. 125

17. Existence de primitives

a) Vrai, car continue sur I .

b) Vrai, car continue sur I .

18. Primitives de x^n , $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$

a) $\ln x$ b) $\frac{1}{8}x^8$ c) $-\frac{1}{x}$ d) $\frac{-1}{2x^2}$ e) $\frac{-1}{4x^4}$

19. Logique

a) Si F est une primitive d'une fonction f sur I , alors toute fonction de la forme $F + k$ (k réel) est aussi une primitive de f sur I .

b) Considérant deux fonctions F et G dérivables sur I , on a :

$$(F - G)' = 0 \Leftrightarrow F = G + k \text{ avec } k \text{ réel.}$$

c) Si deux fonctions f et g continues sur I sont égales, alors leurs primitives sont égales à une constante réelle près.

20. Primitives de fonctions usuelles

1. Réponse **b**

2. Réponse **b**

3. Réponse **c**

21. Primitives et opérations

Forme (u fonction dérivable)	$f(x)$	Primitive $F(x)$
$u'u$	$(2x + 1)(x^2 + x + 5)$	$\frac{1}{2}[x^2 + x + 3]^2$
$\frac{u'}{u}$	$\frac{2x + 1}{x^2 + x + 5}$	$\ln(x^2 + x + 5)$
$u'e^u$	$(2x + 1)e^{x^2+x+5}$	e^{x^2+x+5}

22. Équations différentielles

a) Faux.

b) Faux.

c) Vrai.

23. Équations différentielles $y' = ay$

1. Réponse **d**

2. Réponse **b**

24. Équations différentielles $y' = ay + b$

1. Réponse **a**

2. Réponse **d**

3. Réponse **d**

25. Lecture graphique (1)

C'est la courbe $\mathcal{C}_2$.

26. Lecture graphique (2)

1. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto Ke^{\frac{x}{2}}$.

Seule la fonction avec $K = y_0 \times e^{\frac{-x_0}{2}}$ passe par M_0 .

2. Le point d'ordonnée 2 de ces courbes est aussi associé au nombre dérivé $y' = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

Donc elles sont parallèles à la droite $y = x$.

Exercices d'application

p. 126-129

Montrer qu'une fonction y est solution d'une équation différentielle

27. 1. a) $F'(x) = 3x + 1 = f(x)$

b) $F'(x) = -x^2 + e^x = f(x)$

c) $F'(x) = x^4 + x^3 + x = f(x)$

28. a) $F'(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4} = f(x)$ sur $]4; +\infty[$

b) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 = f(x)$ sur $]0; +\infty[$

29. 1. a) $F'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x = f(x)$

b) $F'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - 2xe^x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = f(x)$

2. a) $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^x + \sqrt{x}e^x = \left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x}}\right)e^x = f(x)$

b) $F'(x) = \ln(x) + \frac{x+1}{x} = \ln(x) + 1 + \frac{1}{x} = f(x)$

30. a) $F'(x) = (x+1)^2 = f(x)$ sur $I = \mathbb{R}$

b) $F'(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ sur $I = \mathbb{R}$

c) $F'(x) = \frac{4(2x+3)(x^2+3x+1)}{(2(x^2+3x+1))^2} = \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3} = f(x)$
sur $I = \left] \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; +\infty \right[$

d) $F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$ sur $I = \mathbb{R}$

31. a) $F'(x) = (-6 + 0,6 \times (6x+14))e^{-0,6x} - 1,4 = f(x)$ sur $\mathbb{R}$

b) $F'(x) = 10(2x - 0,1(x^2+2))e^{-0,1x} = f(x)$ sur $\mathbb{R}$

c) $F'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = f(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

d) $F'(x) = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^x} = f(x)$ sur $\mathbb{R}$

32. 1. $F'(x) = \frac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = f(x)$ sur $]1; +\infty[$

2. $F'(x) = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)x - x - 2 + \ln x}{x^2} = f(x)$ sur $]0; +\infty[$

3. $F'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = f(x)$
sur $]0; +\infty[$

4. $F'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = f(x)$ sur $]0; +\infty[$

33. a) $F'(x) = (2 - 2(2x+1))e^{-2x} = f(x)$ sur $\mathbb{R}$

b) $F'(x) = \ln x - x \times \frac{1}{x} - 1 = f(x)$ sur $]0; +\infty[$

c) $F'(x) = 0,2 \times 1000 0e^{-0,2x} + 15x^2 + 50x$ sur $\mathbb{R}$

34. Réponse **d**

35. Réponse **c**

Primitive d'une fonction usuelle

36. a) $F(x) = e^x$

b) $F(x) = 2\sqrt{x}$

c) $F(x) = \ln(x)$

d) $F(x) = \frac{1}{x}$

37. a) $F(x) = \frac{5}{12}x^4$

b) $F(x) = \frac{1}{2}x^3$

c) $F(x) = \frac{1}{3x^3}$

d) $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$

Ensemble des primitives d'une fonction, primitive avec conditions initiales

38. a) Sur $I = \mathbb{R}$, $F(x) = e^x + k$ avec k réel.

b) Sur $I =]0 ; +\infty[$, $F(x) = 2\sqrt{x} + k$ avec k réel.

c) Sur $I =]0 ; +\infty[$, $F(x) = \ln(x) + k$ avec k réel.

d) Sur $I = \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{8}x^2 + k$, avec k réel.

39. a) $F(x) = e^x - 1 - e$

b) $F(x) = 2\sqrt{x} - 4$

c) $F(x) = \ln(x) - 5$

d) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{3}$

40. a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 4$

b) $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{3}$

c) $F(x) = \frac{-1}{x} + 3$

d) $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$

41. On cherche une fonction f telle que

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} \text{ et } f(-1) = -2.$$

L'équation de la courbe est donc $y = -\frac{2}{x} - 4$.

Déterminer une primitive

42. a) $F(x) = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$

b) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + 5x$

c) $F(x) = e^x + \frac{1}{4}x^4$

d) $F(x) = 2e^x + x^3 + 5x$

43. a) $F(x) = \ln(x) + \frac{1}{3}x^3 + k$ avec k réel.

b) $F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + k$ avec k réel.

c) $F(x) = 3\ln(x) + \frac{5}{2}x^2 + k$ avec réel.

d) $F(x) = \sqrt{x} + \ln x + x + k$ avec k réel.

44. 1. Réponse **b**

2. Attention : il faut lire $x \mapsto 2xe^{x^2-1}$

Réponse **a**

3. Réponse **d**

45. a) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

b) $F(x) = e^{-x^2}$

c) $F(x) = e^{x^3+x} + 4x$

d) $F(x) = \frac{1}{5}e^{x^5+1}$

46. a) $F(x) = \ln(x^2 + x + 1) + k$.

sur $\mathbb{R}$ car le trinôme est positif sur $\mathbb{R}$

b) $F(x) = \ln(x+1) + k$ sur $]-1 ; +\infty[$

c) $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x)^2 + k$ sur $\mathbb{R}$

d) $F(x) = (\ln(x))^2 + k$ sur $]0 ; +\infty[$

47. a) $F(x) = \frac{3}{2}e^{x^2+1} + k$ sur $\mathbb{R}$

b) $F(x) = \frac{1}{20}(5x+1)^4 + k$ sur $\mathbb{R}$

c) $F(x) = \frac{1}{6}\ln(3x^2+1) + k$ sur $\mathbb{R}$

d) $F(x) = \frac{-1}{6(3x^2+1)}$ sur $\mathbb{R}$

Déterminer une primitive avec conditions initiales

48. a) $F(x) = e^{x^2-2x-2} + 1 - e^{-2\sqrt{2}}$

b) $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x - 1)^2 + \frac{1}{2}$

c) $F(x) = (\ln(x))^2 + 3$

49. a) $F(x) = \ln(3x^2 + x + 1)$

b) $F(x) = (\ln(\ln(x))) + 2$

c) $F(x) = e^{2x+1} - e^3$

50. 1. La fonction est continue sur $]0 ; +\infty[$.

2. $F(x) = e^x \times \ln(x)$

51. 1. $x > -2\ln 4$

On a $\frac{-1}{2}x < \ln 4$ soit $e^{\frac{-1}{2}x} < 4$ puis $f(x) > 0$.

F est donc croissante sur cet intervalle.

2. $F'(x) = a - \frac{1}{2}e^{\frac{-1}{2}x}$ d'où $a = 2$.

Puis $F(0) = b + 1 = 1$ donne $b = 0$.

52. Réponse **d**

53. 1. $F'(x) = \left(a - \frac{ax}{5} - \frac{b}{5}\right)e^{\frac{-x}{5}} = (14x + 42)e^{\frac{-x}{5}}$

Donc $a = -70$ et $b = -560$.

b) $F(x) = (-70x - 560)e^{\frac{-x}{5}} + k$

c) $F(x) = (-70x - 560)e^{\frac{-x}{5}} + 560$

54. $F(x) = x^2 - x - 2e^{\frac{-1}{2}x} + 1 + 2e^{\frac{1}{2}}$

Équation différentielle $y' = ay$

55. 1. Réponse **b**

2. Réponse **d**

3. Réponse **a**

56. a) Les solutions sont: $y_K : x \mapsto Ke^{4x}$ avec K réel.

b) Les solutions sont $y_K : x \mapsto Ke^{\frac{3}{2}x}$ avec K réel.

c) $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$

Les solutions sont $y_K : x \mapsto Ke^{-2x}$ avec K réel.

d) $3y' - y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3}y$

Les solutions sont $y_K : x \mapsto Ke^{\frac{1}{3}x}$ avec K réel.

57. 1. $y' - 10y = 0 \Leftrightarrow y' = 10y$

Les solutions sont $y_K : x \mapsto Ke^{10x}$ avec K réel.

2. $y_K\left(\frac{2}{e}\right) = -0,1 \Leftrightarrow Ke^{\frac{10 \times 2}{e}} = -0,1 \Leftrightarrow K = -0,1e^{-\frac{20}{e}}$

Donc la solution est $y : x \mapsto -0,1e^{-\frac{20}{e} + 10x}$.

58. 1. a) $2y' + 5y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{5}{2}y$

Les solutions sont $y_K : x \mapsto Ke^{-\frac{5}{2}x}$ avec K réel.

b) $y_K(2) = 1 \Leftrightarrow Ke^{-\frac{5}{2} \times 2} = 1 \Leftrightarrow K = 2e^5$

Donc la solution est $y : x \mapsto 2e^{\frac{5}{2} - \frac{5}{2}x}$.

2. a) Les fonctions ont la même expression algébrique, ce sont donc les mêmes.

b) $f'(x) = -\frac{5}{2}e^{\frac{-5}{2}x+5} < 0$ pour tout réel x .

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

59. 1. P est de la forme $Ke^{0,21t}$ avec K réel.

2. $P(0) = 0,07 \Leftrightarrow Ke^{0,21 \times 0} = 0,07 \Leftrightarrow K = 0,07$

Donc $P(x) = 0,07e^{0,21x}$

$P(30) = 0,07e^{0,21 \times 30} = 0,07e^{6,3} \approx 38,1$

La plante pèse environ 38,1 g au bout d'un mois.

60. 1. $100y' + 12y = 0 \Leftrightarrow y' = -0,12y$

Les solutions de cette équation sont de la forme $e^{-0,12x}$ avec K réel.

$y(0) = 100 \Leftrightarrow Ke^{-0,12 \times 0} = 100 \Leftrightarrow K = 100$

Donc la solution est $y : x \mapsto 100e^{-0,12x}$.

2. Les valeurs de a et de b correspondent aux extrémités d'un encadrement d'amplitude 0,01 de l'antécédent de 80 par f la solution trouvée en **1.**, obtenue par dichotomie.

61. 1. $a = 0,8$ et $b = \frac{\ln 2,7125}{10} \approx 0,100$

2. $y' = by$

3. $f(23) \approx 0,8e^{0,100 \times 23} \approx 7,98$

En 2023, le montant des ventes sera d'environ 7,98 milliers d'euros.

Équation $y' = ay + b$

62. a) Les solutions sont $y_K : x \mapsto \frac{1}{2} + Ke^{2x}$ avec K réel.

b) Les solutions sont $y_K : x \mapsto 4 + Ke^{-\frac{1}{4}x}$ avec K réel.

c) Les solutions sont $y_K : x \mapsto \frac{3}{2} + Ke^{-2x}$ avec K réel.

d) Les solutions sont $y_K : x \mapsto -\frac{1}{5} + Ke^{\frac{5}{2}x}$ avec K réel.

63. 1. Réponse **a**

2. Réponse **a**

64. 1. Les solutions sont $y_K : x \mapsto -\frac{5}{2} + Ke^{2x}$ avec K réel.

$$2. y_K(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} + Ke^{2 \times 0} = 0 \Leftrightarrow K = \frac{5}{2}$$

Donc la solution est $y : x \mapsto -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}e^{2x}$.

65. La fonction solution est $y : x \mapsto 3 - 2e^{-2x}$.
C'est la courbe $\mathcal{C}_4$.

66. 1. a) Les solutions sont :

$$y_K : x \mapsto -4 + Ke^{\frac{1}{5}x} \text{ avec } K \text{ réel.}$$

$$b) y_K(5) = -5 \Leftrightarrow -4 + Ke^{\frac{1}{5} \times 5} = -5 \Leftrightarrow K = -\frac{1}{e}$$

Donc la solution est :

$$y : x \mapsto -4 - \frac{1}{e}e^{\frac{1}{5}x} = -4 - e^{\frac{1}{5}x-1}$$

2. a) Les fonctions ont la même expression algébrique, ce sont donc les mêmes.

$$b) f'(x) = -\frac{1}{5}e^{\frac{1}{5}x-1} < 0 \text{ pour tout réel } x.$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Modélisation par une équation différentielle

$$67. 1. Q(t) = \frac{0,1}{k} - \frac{0,1}{k}e^{-kt}$$

$$2. \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = \frac{0,1}{k}, \text{ cette limite dépend donc de } k.$$

La limite évolue de façon inverse à k , elle correspond à la quantité de pénicilline présente dans le sang à long terme.

Si k est élevé, alors la quantité est faible.

Si k est faible (mais en restant positif), alors la quantité est élevée.

$$3. Q(180) = \frac{0,1}{k} - \frac{0,1}{k}e^{-180k} = \frac{0,1}{2k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{180}$$

$$68. 1. T' = kT, T(0)=100, T(t) = 100e^{kt} \text{ et } T(10) = 45$$

$$\text{D'où } k = \frac{\ln 0,45}{10}.$$

$$2. T(t) = 25 \Leftrightarrow 100e^{\frac{\ln 0,45}{10}t} = 25$$

$$\Leftrightarrow t = \ln(0,25) \times \frac{10}{\ln 0,45} \approx 17 \text{ min}$$

Exercices d'entraînement p. 130-132

Déterminer des primitives

$$69. 1. F(x) = (5x - 50)e^{\frac{x}{5}}$$

2. Les fonctions $x \mapsto (5x - 50)e^{\frac{x}{5}} + k$ avec k réel.

70. 1. Vrai

2. Vrai

3. Vrai

71. Les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ sont de la forme

$$\ln(\ln x) + k \text{ avec } k \text{ réel.}$$

$$\ln(\ln e) + k = 1 \Leftrightarrow k = 1$$

Donc la primitive recherchée est $F : x \mapsto \ln(\ln x) + 1$.

72. Les primitives de $x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1}$ sont de la forme

$$\ln \sqrt{x^2 + 1} + k \text{ avec } k \text{ réel.}$$

$$\ln \sqrt{1^2 + 1} + k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \ln 2$$

Donc la primitive recherchée est :

$$F : x \mapsto \ln \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$73. 1. F'(x) = ae^{1-x} - axe^{1-x} = (a - ax)e^{1-x}$$

Par identification avec $f(x)$, on a $a = 2$.

2. Les primitives de f sont de la forme $x \mapsto 2xe^{1-x} + k$ avec k réel.

$$2 \times 2,75e^{1-2,75} + k = 0 \Leftrightarrow k = -5,5e^{-1,75}$$

La primitive recherchée est :

$$F : x \mapsto 2xe^{1-x} - 5,5e^{-1,75}$$

Étude complète d'une fonction primitive

74.1. $F'(x) = \ln(x+1) + \frac{x+1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) - 2 = f(x)$

2. $F'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^2 - 1$

x	$-\infty$	$e^2 - 1$	$+\infty$
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$			

3. $f(0) = \ln(0+1) - 2 = -2$

Le coefficient directeur est donc -2.

75. 1. $f'(t) = e^{t-1} + te^{t-1} = (t+1)e^{t-1}$

2. $f'(t) = (t+1)e^{t-1}$ et $e^{t-1} > 0$ pour tout réel t .

Le signe de $f'(t)$ dépend donc du signe de $(t+1)$.

t	$-\infty$	-1	$+\infty$
$t+1$	-	0	+
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

3. $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 1$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$.

76. 1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} > 0$ pour tout réel x .

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$F(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. a) $x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1} = x + \ln 4 + \frac{2(e^x + 1) - 2e^x}{e^x + 1}$
 $= x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} = f(x)$

b) Les primitives de f sont de la forme

$\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln(4)x - 2\ln(e^x + 1) + k$ avec k réel.

77. 1. $F'(-1) = f(-1) = -(-1)^2 + (-1) + 2 = 0$

$F'(2) = f(2) = -2^2 + 2 + 2 = 0$

2. a) $F'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx - 1)e^x$
 $= (ax^2 + (2a + b)x + b - 1)e^x$

b) $F'(-1) = 0$

$\Leftrightarrow (a(-1)^2 + (2a + b)(-1) + b - 1)e^{-1}$

$\Leftrightarrow (-a - 1)e^{-1} = 0 \Leftrightarrow a = -1$

$F'(2) = 0$

$\Leftrightarrow (-1 \times 2^2 + (-2 + b) \times 2 + b - 1)e^2 = 0$

$\Leftrightarrow (3b - 9)e^2 = 0 \Leftrightarrow b = 3$

Donc $F(x) = (-x^2 + 3x - 1)e^x$.

78. 1. $r(1) = 7$

2. a) $r'(x) = 1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}$

b) r est strictement croissante.

$r(1) = 7$ et $r(5) = 11 + 2\ln 5 > 10$.

3. a) On applique le théorème des valeurs intermédiaires pour r sur $[1; 5]$. On a $\alpha \approx 2,319$.

b) $r(x) > 10$ pour $x > 2,319$ soit à partir de 2 319 voitures.

4. a) $G'(x) = 2(\ln x - 1) + 2 = g(x)$

b) $R(x) = 6x + \frac{1}{2}x^2 + 2x(\ln x - 1)$

Équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + b$

79. 1. Proposition 1 : **Faux**.

Proposition 2 : **Faux**.

2. Proposition 3 : **Faux**.

Proposition 4 : **Vrai**.

80. 1. $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$

Les solutions sont de la forme Ke^{-x} avec K réel

$Ke^{-0} = e \Leftrightarrow K = e$. Donc $f(x) = e^{1-x}$.

2. $e^{1-x} = c \Leftrightarrow 1 - x = \ln c \Leftrightarrow x = 1 - \ln c$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$

4. Cet algorithme détermine, pour un entier p donné, à partir de quelle valeur entière de x , on a $e^{1-x} < 10^{-p}$.

Étant donné que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = 0$ et que $10^{-p} > 0$ pour tout entier p , cet algorithme va forcément s'arrêter par définition de la limite.

81. 1. Réponse **d**

2. Réponse **a**

3. Réponse **b**

4. Réponse **a**

Équations différentielles dans un contexte

82. 1. Les solutions de l'équation différentielle sont $Ke^{-0,7x}$ avec K réel.

$$f(0) = e^{2,1} \Leftrightarrow Ke^{0,7 \times 0} = e^{2,1} \Leftrightarrow K = e^{2,1}$$

$$\text{Donc } f(x) = e^{2,1} \times e^{-0,7x} = e^{2,1-0,7x}.$$

2. a) $h'(x) = f(x) - g'(x) = -0,7e^{2,1-0,7x} - 0,5$

b) $e^{2,1-0,7x} > 0$ pour tout réel x .

$$\text{Donc } h'(x) = -0,7e^{2,1-0,7x} - 0,5 < 0 \text{ pour tout réel } x.$$

Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) Sur $[0;5]$, h est continue (car dérivable) et strictement décroissante. De plus :

$$h(0) = e^{2,1-0,7 \times 0} - (0,5 \times 0 + 0,7) = e^{2,1} - 0,7 > 0 \text{ et}$$

$$h(5) = e^{2,1-0,7 \times 5} - (0,5 \times 5 + 0,7) = e^{-1,4} - 3,2 < 0$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0 ; 5]$. À partir de la calculatrice, $\alpha \approx 2,172$.

3. $f(q_0) = g(q_0) \Leftrightarrow f(q_0) - g(q_0) = 0$

$$\Leftrightarrow h(q_0) = 0 \Leftrightarrow q_0 = \alpha$$

$$\text{Donc } q_0 = \alpha \approx 2,172 \text{ et } p_0 = g(q_0) = 0,5\alpha + 0,7 \approx 1,786$$

83. 1. $g : t \mapsto M$ est une solution particulière de l'équation. C est solution de l'équation différentielle si et seulement si $C - g$ est solution de $y' = -ky$.

Les solutions de cette équation sont de la forme Ae^{-kt} avec A réel.

Donc C est de la forme $M + Ae^{-kt}$ avec A réel.

$$C(0) = 0 \Leftrightarrow M + Ae^{-k \times 0} = 0 \Leftrightarrow A = -M$$

$$\text{Donc } C(t) = M - Me^{-kt}.$$

2. $C'(t) = kMe^{-kt} \geq 0$ pour tout réel t car $M > 0$ et $k \geq 0$. Donc C est croissante sur $\mathbb{R}$. $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = M$.

3. Dans ce cas, $M = 180$.

$$C(15) = 90 \Leftrightarrow 180 - 180e^{-15k} = 90 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{15}$$

$$\text{Donc } C(t) = 180 - 180e^{-\frac{\ln 2}{15}t}$$

$$C(t) > 170 \Leftrightarrow 180 - 180e^{-\frac{\ln 2}{15}t} = 170 \Leftrightarrow t = \frac{15 \ln 18}{\ln 2} \approx 62,5$$

Le maïs sera à moins de 10 cm de sa taille maximale au bout de 63 jours.

84. 1. $Y' = 0,25(360 + 0,8Y + 120 - Y)$

$$\Leftrightarrow Y' = -0,05Y + 120$$

2. $Y(t) = Ce^{-0,05t} + 2400$ et $Y(0) = 2\,000$

$$\text{Donc } C = -400 \text{ et } Y(t) = -400e^{-0,05t} + 2\,400.$$

3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} Y(t) = 2\,400$.

Donc le revenu se stabilise à 2 400.

85. 1. $g : x \mapsto 0,05$ est une solution particulière de $P' = -0,4P + 0,02$.

P est solution de cette équation si et seulement si $P - g$ est solution de $P' = -0,4P$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $Ke^{-0,4x}$ avec K réel.

Donc les solutions de $P' = -0,4P + 0,02$ sont $P_K : x \mapsto 0,05 + Ke^{-0,4x}$ avec K réel.

$$P(0) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 0,05 + Ke^{-0,4 \times 0} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow K = 0,75$$

$$\text{Donc } P(x) = 0,05 + 0,75e^{-0,4x}.$$

$$\text{Donc } f(q) = \frac{1}{P(q)} = \frac{1}{0,05 + 0,75e^{-0,4q}} = \frac{20}{1 + 15e^{-0,4q}}$$

$$f(0) = \frac{20}{1 + 15e^{-0,4 \times 0}} = \frac{5}{4}$$

$$2. f(q) = -\frac{20 \times 15 \times (-0,4)e^{-0,4q}}{(1 + 15e^{-0,4q})^2} = \frac{120e^{-0,4q}}{(1 + 15e^{-0,4q})^2} > 0$$

pour tout $q \in [0 ; 14]$.

Donc f est strictement croissante sur $[0 ; 14]$.

3. a) La droite (OQ) passe par les points $O(0 ; 0)$ et $Q(q ; f(q))$.

Son coefficient directeur est donc donné par :

$$\frac{y_Q - y_0}{x_Q - x_0} = \frac{f(q) - 0}{q - 0} = \frac{f(q)}{q}.$$

b) Le minimum est réalisé quand la droite (OQ) à un coefficient directeur minimal, soit pour $q = 14$, ce qui correspond à un coût moyen de

$$\frac{20}{14} = \frac{1 + 15e^{-0,4 \times 14}}{14} \approx 1,4$$

$$\begin{aligned} 86. 1. y(i+1) &= y(i) + hy'(i) \\ &= y(i) + h(3y(i) + 5) \\ &= y(i)(3h + 1) + 5h \end{aligned}$$

pour i compris entre 0 et $n - 1$.

2.

```
from pylab import *
def methode_euler(x, y, h, n) :
    x_liste=[x]
    y_liste=[y]
    for i in range(n) :
        x=x+h
        y=y*(3*h+1)+5*h
        x_liste.append(x)
        y_liste.append(y)
    return [x_liste, y_liste]
coord_liste=methode_euler(0, 1, 0.1, 10)
X=coord_liste[0]
Y=coord_liste[1]
plot(X, Y, "r+")
show()
```

Exercices bilan

p. 133-134

87. Temps de refroidissement

1. a) La fonction constante $f : x \mapsto 20$.

b) y est solution de (E) si et seulement si $y - f$ est solution de $y' = -0,04y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $e^{-0,04t}$ avec K réel.

Donc les solutions de (E) sont de la forme $y_K : t \mapsto 20 + Ke^{-0,04t}$.

$$c) g(0) = 100 \Leftrightarrow 20 + Ke^{-0,04 \times 0} = 100 \Leftrightarrow K = 80$$

$$\text{Donc } g(t) = 20 + 80e^{-0,04t}$$

$$2. a) g(30) = 20 + 80e^{-0,04 \times 30} = 20 + 80e^{-1,2} \approx 44 > 37$$

Donc la grand-mère a mal évalué le temps nécessaire pour atteindre 37°C .

$$b) g(t) = 37 \Leftrightarrow 20 + 80e^{-0,04t} = 37$$

$$\Leftrightarrow t = 25 \ln \frac{80}{17} \approx 38,72$$

La température sera de 37°C au bout d'environ 38 minutes et 43 secondes.

c)

```
t ← 0
Tant que 20+80e-0,04t > 30
    t ← t+1
Fin Tant que
Afficher t
```

88. Croissance des bactéries

1. a) $B' = kB$ avec k réel et avec les conditions $B(0) = 600$ et $B(2) = 1\,800$.

b) Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme e^{kt} avec C réel.

$$B(0) = 600 \Leftrightarrow Ce^{k \times 0} = 600 \Leftrightarrow C = 600$$

$$B(2) = 1\,800 \Leftrightarrow 600e^{2k} = 1\,800 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 3}{2}$$

$$\text{Donc } B(t) = 600e^{\frac{\ln 3}{2}t}$$

$$c) B(4) = 600e^{\frac{\ln 3}{2} \times 4} = 5\,400$$

Il y a 5 400 bactéries après 4 heures.

$$d) B(t) > 12\,000 \Leftrightarrow 600e^{\frac{\ln 3}{2}t} > 12\,000$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{2 \ln 20}{\ln 3} \approx 5,45$$

Le nombre de bactéries dépassera 12 000 au bout d'environ 5 heures et 27 minutes.

2.

```
t ← 0
Tant que 600eln3/2 t < 12000
    t ← t+1
Fin Tant que
```

89. Un modèle de bénéfice

1. $g : t \mapsto 30$ est une solution particulière de l'équation. f est solution de l'équation différentielle si et seulement si $f - g$ est solution de $y' = -\frac{1}{2}y$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $e^{\frac{1}{2}x}$ avec K réel.

Donc f est de la forme $30 - Ke^{-\frac{1}{2}x}$ avec K réel.

$$f(0) = -25 \Leftrightarrow 30 + Ke^{-\frac{1}{2} \times 0} = -25 \Leftrightarrow K = -55$$

$$\text{Donc } f(x) = 30 - 55e^{-\frac{1}{2}x}$$

2. À la calculatrice, on constate que la somme des carrés des écarts est d'environ $0,08 < 0,5$.

L'approximation par f semble donc satisfaisante.

$$3. a) f(x) > 29,8 \Leftrightarrow 30 - 55e^{-\frac{1}{2}x} > 29,8$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \ln 275 \approx 11,2$$

Le bénéfice dépassera 29 800 euros en 2011.

$$b) e^{-\frac{1}{2}x} > 0 \text{ pour tout réel } x.$$

$$\text{Donc } f(x) = 30 - 55e^{-\frac{1}{2}x} < 30 \text{ pour tout réel } x.$$

Le bénéfice ne peut donc pas atteindre 30 000 euros.

90. Carbone 14

A ▶ 1. $f(t) = Ke^{-0,124t}$

2. $f(t) = 15,3e^{-0,124t}$

B ▶ 1. $f'(t) = -1,897\ 2e^{-0,124t} < 0$

Donc f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

La quantité de carbone 14 disparaît totalement après une longue période.

C ▶ 1. $f(t) = 7,27 \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{7,27}{15,3}\right)}{-0,124}$

$\Leftrightarrow t \approx 6$ en milliers d'années.

2. $f(t) < 0,3\% \times 15,3 \Leftrightarrow t > \frac{\ln\frac{0,3}{100}}{-0,124}$

$\Leftrightarrow t > 46,84$

Donc à partir de 47 milliers d'années.

91. Décharge d'un condensateur

1. $u(t) = 20e^{\frac{-t}{RC}}$

2. $u(t) > 5 \Leftrightarrow t < 0,1 \ln 0,25$ soit $t < 0,13$.

92. Loi de refroidissement de Newton

1. $(T - 20)' = k(T - 20)$

D'où $T(t) = 20 + Ce^{kt}$,

$T(0) = 20 + C = 70$,

$C = 50$.

$T(5) = 20 + Ce^{5k} = 60$

Donc $k = \frac{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}{5}$

2. $T(30) \approx 33\ ^\circ\text{C}$

$T(t) = 40 \Leftrightarrow t = \frac{5 \ln \frac{2}{5}}{\ln \frac{4}{6}} \approx 20,53$.

À la minute près, il faudra 21 minutes pour atteindre $40\ ^\circ\text{C}$.

93. Écran plat

1. a) Si y est solution de (E) alors $y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$

$z' = \frac{y'}{y^2} = -\frac{\frac{1}{20}y(10 - y)}{y^2} = \frac{-10y + y'}{20y^2} = -\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2z}$

b) $g : x \mapsto \frac{1}{10}$ est une solution particulière de (E_1) .

z est solution de (E_1) si et seulement si $z - g$ est solution de $z' = -\frac{1}{2}z$.

Les solutions de cette équation sont de la forme : $e^{-\frac{1}{2}x}$ avec K réel.

Donc les solutions de (E_1) sont de la forme :

$z_K : x \mapsto \frac{1}{10} + Ke^{-\frac{1}{2}x}$ avec K réel.

Donc les solutions de (E) sont de la forme

$y_K = \frac{1}{z_K} : x \mapsto \frac{1}{\frac{1}{10} + Ke^{-\frac{1}{2}x}} = \frac{10}{10Ke^{-\frac{1}{2}x} + 1}$ avec K réel.

2. g est solution de (E) donc g est de la forme :

$\frac{10}{10Ke^{-\frac{1}{2}x} + 1}$ avec K réel.

$g(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{10Ke^{-\frac{1}{2} \times 0} + 1} = 1 \Leftrightarrow K = 0,9$

Donc $g(x) = \frac{10}{10 \times 0,9e^{-\frac{1}{2}x} + 1} = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$

3. $g'(x) = -\frac{10 \times \left(-\frac{9}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2} = \frac{45e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2} > 0$

pour tout $x \in [0 ; +\infty[$.

Donc g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 10$

Donc, au fil du temps, le nombre de foyers possédant un téléviseur se rapproche de 10 millions.

5.

```

x ← 0
Tant que  $\frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1} \leq 1$ 
    x ← x+1
Fin Tant que
Afficher 2005 + x
    
```

94. Épidémie

1. Si y est solution de (E) alors

$$y' = 0,05y(10 - y) \text{ et } y(0) = 0,01.$$

$$\begin{aligned} f' &= -\frac{y'}{y^2} = -\frac{0,05y(10 - y)}{y^2} = \frac{-0,5y + 0,05y^2}{y^2} \\ &= -\frac{0,5}{y} + 0,05 = -0,5f + 0,05 \end{aligned}$$

$$y(0) = 0,01 \Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{y(0)} = \frac{1}{0,01} = 100$$

2. a) $g : x \mapsto 0,1$ est une solution particulière de $f' = -0,5f + 0,05$.

f est solution de cette équation si et seulement si $f - g$ est solution de $f' = -0,5f$.

Les solutions de cette équation sont de la forme $e^{-0,5x}$ avec K réel.

Donc les solutions de $f' = -0,5f + 0,05$ sont de la forme $f_K : x \mapsto 0,1 + Ke^{-0,5x}$ avec K réel.

$$\begin{aligned} f(0) = 100 &\Leftrightarrow 0,1 + Ke^{-0,5 \times 0} = 100 \\ &\Leftrightarrow K = 99,9 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x) = 0,1 + 99,9e^{-0,5x}$$

$$\text{Donc } y(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0,1 + 99,9e^{-0,5x}}$$

b) Cet algorithme sert à afficher l'entier x à partir duquel on a $y(x) \geq 5$.

$$3. \text{ a) } y(30) = \frac{1}{0,1 + 99,9e^{-0,5 \times 30}} = \frac{1}{0,1 + 99,9e^{-15}} \approx 10$$

Environ 10 % de la population sera infectée au bout de 30 jours.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 10$ donc, à terme, l'infection touchera 10 % de la population.

95. Équation $y' = ay + \phi$ où ϕ est une fonction

A ▶ 1. Les solutions sont $\mapsto Ce^{-2x}$ avec C constante réelle.

2. Avec $C = \frac{9}{2}$ on obtient la fonction h .

3. g est dérivable et $g'(x) = 9e^{-3x}$ et donc $g(x) + 2g(x) = 3e^{-3x}$.

4. Comme $f = g + h$ alors $f' = g' + h'$ donc pour tout réel $x : f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x) + h'(x) + 2h(x) = 3e^{-3x} + 0 = 3e^{-3x}$

Ainsi f est solution de (E).

B ▶ 1. On factorise par $3e^{-2x}$

$$f(x) = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - \frac{e^{-3x}}{e^{-2x}} \right) = 3e^{-3x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right)$$

2. Par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ et, de même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, on en déduit par opérations que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$ et, de même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$, on en déduit par opérations que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$3. f'(x) = -9e^{-2x} + 9e^{-3x} = 9e^{-2x}(-1 + e^{-x})$$

Comme $9e^{-2x} > 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $-1 + e^{-x}$ donc positif pour $x \leq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	0

4. D'après l'expression de la question B ▶ 1., et comme pour tout réel x , $3e^{-2x} \neq 0$, on a :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = \ln \frac{2}{3} \approx -0,4 \text{ (à } 0,01 \text{ près)}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe (Ox) en un seul point A de coordonnées $\left(\ln \frac{2}{3}; 0 \right)$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe (Oy) en un seul point B de coordonnées $\left(0; f(0) \right)$ c'est-à-dire $\left(0; \frac{3}{2} \right)$.

Préparer le BAC
Je me teste

p. 136

96. A

97. B

98. B

99. A

100. D

101. A

102. A

103. D

Préparer le BAC

Je révise

p. 137

104. Culture de microbes

1. Les solutions de l'équation sont de la forme Ce^{kt} , avec C réel.

$$y(0) = N \Leftrightarrow Ce^{k \times 0} = N \Leftrightarrow C = N$$

$$\text{Donc } y(t) = Ne^{kt}$$

$$2. y(2) = 4N \Leftrightarrow N e^{2k} = 4N \Leftrightarrow k = -\ln 2$$

$$\text{Donc } y(t) = Ne^{\ln(2)t} = 2^t N$$

$$y(3) = 2^3 N = 8N.$$

Au bout de 3 heures, il y a 8N microbes.

$$3. y(5) = 6\,400 \Leftrightarrow 2^5 N = 6\,400 \Leftrightarrow N = 200$$

105. Primitives et équation $y' = ay + b$

1. Réponse **a**

2. Réponse **d**

3. Réponse **b**

4. Réponse **c**

106. Lecture graphique

$$1. f(1) = 1 \text{ et } f'(1) = 0$$

$$2. \text{ Pour } f(x) = \frac{4}{x} - 3 + 4\ln x, \text{ on a } f'(x) = \frac{-4}{x^2} + \frac{4}{x}$$

Donc on vérifie bien que $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$

$$3. F'(x) = 4\ln(x) + \frac{1}{x}(4x + 4) - 7 \\ = 4\ln(x) + \frac{4}{x} - 3$$

107. Loi de Newton

$$1. T' = -0,1(T - 20)$$

$$2. \text{ a) Si } T(t) = 20 \text{ alors } T'(t) = 0$$

Donc T vérifie bien l'équation.

$$\text{b) } T(t) = 20 + Ke^{-0,1t} \text{ et avec } T(0) = 100$$

On obtient $K = 80$.

$$\text{Donc } T(t) = 20 + 80e^{-0,1t}.$$

108. Équation logistique

$$1. P(t) = \frac{1}{N(t)} \text{ alors } P'(t) = \frac{-N'(t)}{(N(t))^2}$$

$$\text{Ainsi } N'(t) = 0,07N(t)(1 - 10^{-3}N(t))$$

$$\Leftrightarrow \frac{N'(t)}{(N(t))^2} = \frac{0,07}{N(t)} - 0,07 \times 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-N'(t)}{(N(t))^2} = \frac{-0,07}{N(t)} + 0,07 \times 10^{-3}$$

$$\Leftrightarrow P'(t) = -0,07P(t) + 0,07 \times 10^{-3}.$$

$$2. P(t) = 10^{-3} + Ke^{-0,07t}$$

$$\text{soit } N(t) = \frac{1}{10^{-3} + Ke^{-0,07t}} \text{ avec } N(0) = 100$$

$$\text{On a } K = \frac{1}{100} - 10^{-3} = 0,009.$$

$$\text{Donc } N(t) = \frac{1}{10^{-3} + 0,009e^{-0,07t}}$$

valeur qui est toujours inférieure à 1 000.

CHAPITRE 6 Calcul intégral

Manuel p. 138-161

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre termine la partie « Analyse » du programme.

Il donne les outils du calcul infinitésimal pour les études supérieures en définissant l'intégrale d'une fonction continue en centrant l'étude sur l'interprétation géométrique de l'intégrale d'une fonction positive puis négative pour terminer par le calcul de l'aire entre deux courbes.

L'accent dans ce chapitre est mis sur le sens de l'intégrale sans étude des propriétés abstraites.

Ainsi, le chapitre présente la définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive comme étant la généralisation d'un calcul d'aire.

L'existence de primitive permet de généraliser cette définition à toute fonction continue.

La valeur moyenne est introduite comme généralisation de la moyenne d'une série statistique et permet d'accéder rapidement à l'interprétation graphique dans le cas des fonctions continues positives.

Objectifs

- Estimer une intégrale par calcul d'aire
- Calcul d'intégrale en utilisant les primitives
- Déterminer la valeur moyenne d'une fonction
- Calculer une aire sous la courbe d'une fonction
- Calculer une aire entre deux courbes

II. Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 139

1. Calculer des aires

a) $11 < \mathcal{A} < 25$ et $16 < \mathcal{B} < 25$

b) Rectangle : $AB \times AD$

Triangle : $\frac{1}{2}(EF \times \text{hauteur})$

Demi-cercle : $(\pi \times (HI)^2)/8$

Trapeze : $0,5(LM + JK) \times \text{hauteur}$

2. Déterminer graphiquement le signe d'une fonction

a) f est positive sur $]-2 ; 2[$ et f est négative sur $[-3 ; -2[\cup]2 ; 4]$.

b) g est positive sur $[-3 ; -2[\cup]-0,25 ; 3,5[$ et g est négative sur $]-2 ; -0,25[\cup]3,5 ; 4]$.

c) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]-2 ; 1,25[$ et en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[-3 ; -2[\cup]1,25 ; 4]$.

3. Déterminer le signe d'une fonction

1. L'équation du 2nd degré $x^2 + 2x - 3 = 0$

admet une solution évidente : 1.

On en déduit la deuxième solution : -3.

Donc f est positive sur $]-\infty ; -3[\cup]1 ; +\infty[$

et négative sur $]3 ; 1[$. $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Donc g est positive sur $]1 ; +\infty[$ et négative sur $]-\infty ; 1]$.

2. On étudie le signe de :

$$f(x) - g(x) = x^2 + 2x - 3 - x + 1 = x^2 + x - 2.$$

1 est une solution évidente.

On en déduit la deuxième solution : -2.

$f(x) - g(x)$ est positive pour $x \in]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$

Donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$ et au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[-2 ; 1]$.

4. Déterminer une primitive

a) $F(x) = x^5 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$

b) $G(x) = \frac{1}{-2(3+x^2)^2}$

c) $K(x) = -\sqrt{3-2x}$

d) $H(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1}$

e) $J(x) = \ln|x|$

f) $K(x) = \frac{3}{2}\ln(x^2+1)$

Activités

p. 140

1. Évaluer l'intégrale d'une fonction continue et positive – (Thème 4)

- Durée estimée :** 55 min
- Objectif :** Introduire la définition de l'intégrale d'une fonction continue positive.

La première partie consiste à déterminer l'aire sous la courbe de fonctions en utilisant des formules.

La deuxième partie consiste à présenter une méthode, celle des rectangles pour approcher l'aire sous la courbe d'une fonction décroissante qui ne se détermine pas par une formule évidente. En utilisant un programme **Python** , l'élève peut confirmer son intuition : l'aire sous la courbe est encadrée par deux suites qui ont la même limite, l'aire. La notation intégrale est indiquée à la fin de cette partie.

Remarque : le TP 3 du thème 4 p. 265, indépendant de cette activité, reprend rapidement ces deux suites, présente la méthode des trapèzes et compare les vitesses de convergences des 3 suites par un calcul d'erreurs.

La troisième partie de l'activité est facultative et permet d'explicitier ces suites sur un exemple de fonction continue positive croissante.

A ► Aire sous la courbe d'une fonction

a) $\mathcal{A} = \frac{AC \times CB}{2} = 8$

b) $\mathcal{A} = \frac{(1+3) \times 4}{2} = 8$

c) $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi$

B ► Approximation de l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles

1. Attention : Il faut lire la fonction $f(x) = e^{-x \ln \frac{9}{24} + \ln 10}$.

On divise l'intervalle en quatre intervalles de même amplitude. On construit quatre rectangles hachurés de longueurs $f(6)$, $f(12)$, $f(18)$ et $f(24)$.

On construit quatre rectangles colorés $f(0)$, $f(6)$, $f(12)$, $f(18)$.

2. $U_2 = 12(f(12) + f(24))$

$U_3 = 8(f(8) + f(16) + f(24))$

$V_2 = 12(f(0) + f(12))$

$V_3 = 8(f(0) + f(8) + f(16))$

3. $\{U_n\}$ est l'aire des rectangles hachurés, elle est contenue dans l'aire sous la courbe.

Plus l'intervalle devient petit, plus l'aire hachurée croît et se rapproche de l'aire sous la courbe :

$\{U_n\}$ semble être une suite croissante convergente.

$\{V_n\}$ est l'aire des rectangles colorés et contient l'aire sous la courbe.

Plus l'intervalle devient petit, plus l'aire colorée décroît et se rapproche de l'aire sous la courbe :

$\{V_n\}$ est une suite décroissante convergente.

4. Il s'agit de déterminer $\{U_n\}$ et $\{V_n\}$ en fonction de n .

$$U_n = \frac{24}{n} \left(f\left(0 + \frac{24}{n} \times 1\right) + f\left(0 + \frac{24}{n} \times 2\right) + \dots + f\left(0 + \frac{24}{n} \times n\right) \right)$$

$$V_n = \frac{24}{n} \left(f\left(0 + \frac{24}{n} \times 0\right) + f\left(0 + \frac{24}{n} \times 1\right) + \dots + f\left(0 + \frac{24}{n} \times (n-1)\right) \right)$$

Le programme suivant permet de déterminer la valeur de U_n et celle de V_n .

```

def U(f,n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+f(k*24/n)
    return S*24/n
  
```

```

def V(f,n):
    S=0
    for k in range(0,n):
        S=S+f(k*24/n)
    return S*24/n
  
```

On remarque en prenant une valeur de n assez grande que les deux suites convergent vers la même valeur.

C ► Déterminer $\int_0^1 x^2 dx$

par la méthode des rectangles

1. Il pourrait être intéressant de modifier le programme pour qu'il s'adapte à toutes les fonctions.

Il suffit de changer la fonction f qui est une variable du programme.

2. a) $U_1 = 1 \times g(0) = 0$

$$U_2 = \frac{1}{2} \left(g(0) + g\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \frac{1}{8}$$

$$U_3 = \frac{1}{3} \left(g(0) + g\left(\frac{1}{3}\right) + g\left(\frac{2}{3}\right) \right) = \frac{5}{18}$$

$$V_1 = 1 \times g(1) = \frac{1}{2}$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \left(g\left(\frac{1}{2}\right) + g(1) \right) = \frac{5}{8}$$

$$V_3 = \frac{1}{3} \left(g\left(\frac{1}{3}\right) + g\left(\frac{2}{3}\right) + g(1) \right) = \frac{14}{27}$$

b) **Attention** : il faut en déduire que

$$U_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

$$U_n = \frac{1}{n} \left(g\left(0 + \frac{0}{n}\right) + g\left(0 + \frac{1}{n}\right) + \dots + g\left(0 + \frac{n-1}{n}\right) \right)$$

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{n} \left(\frac{1+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^2} \right) = \frac{1+2^2+\dots+(n-1)^2}{n^3} \\ &= \frac{\frac{1}{6}(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{n^3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \end{aligned}$$

c) **Attention** : il faut en déduire que

$$V_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

$$V_n = \frac{1}{n} \left(g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + g\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + g(1) \right)$$

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{n} \left(\frac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^2} \right) = \frac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3} \\ &= \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \end{aligned}$$

3. $\int_0^1 x^2 dx$ est l'aire sous la courbe de la fonction carrée entre 0 et 1.

(U_n) est contenu et dans cette aire, (V_n) contient cette aire.

On en déduit que $U_n \leq \int_0^1 x^2 dx \leq V_n$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{6n^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

2. Relier les notions d'intégrale et de primitive

• **Durée estimée** : 20 min

• **Objectif** : Calculer l'intégrale d'une fonction continue positive de manière différente : par le calcul d'aire et par l'image d'une fonction qui s'avère être celle de la primitive de la fonction intégrée.

La première partie permet de conjecturer la propriété sur un exemple.

La deuxième partie démontre la propriété sur un exemple.

Remarque : la démonstration dans le cas général est traitée dans la rubrique « apprendre à démontrer » p. 150 du manuel de l'élève.

A ► Intégrale d'une fonction affine

1. **Attention** : il faut lire la fonction

$$f(t) = \frac{1}{2}t + 2.$$

Les coordonnées de M sont $(x; 0)$ avec $x \geq 0$.

N est le point de la courbe de f d'abscisse x .

L'aire est égale à $\mathcal{A}(x) = \frac{x^2}{4} + 2x$.

2. L'aire du trapèze est aussi l'aire sous la courbe de la fonction f entre 0 et x .

$$\text{Donc } \mathcal{A}(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

$$3. \mathcal{A}'(x) = \frac{1}{4} \times 2x + 2 = \frac{1}{2}x + 2 = f(x).$$

On en déduit que $\mathcal{A}(x) = \int_0^x f(t) dt$ est une primitive de f .

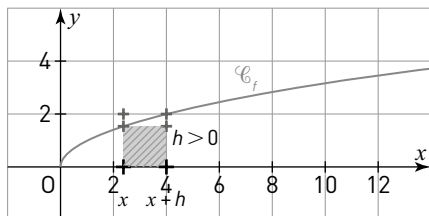
B ► Intégrale de la fonction racine carrée

Attention : la fonction f est définie par

$$f(x) = e^{-x \ln\left(\frac{9}{24}\right) + \ln 10}$$

1. L'aire sous la courbe de la fonction racine carrée entre 0 et x est $\int_0^x \sqrt{t} dt$.

2. a)



b) L'aire sous la courbe racine carrée entre x et $x+h$ est égale à $\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)$.

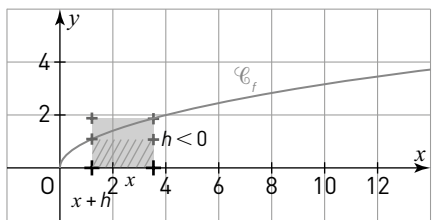
Elle est comprise entre l'aire colorée (égale à $h \times \sqrt{x}$) et l'aire hachurée (égale à $h \times \sqrt{x+h}$) d'où :

$$h \times \sqrt{x} \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq h \times \sqrt{x+h}.$$

$$\text{c) } -h\sqrt{x+h} \leq \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x+h) \leq -h\sqrt{x}$$

$$\text{Donc } h\sqrt{x} \leq \mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x) \leq h\sqrt{x+h}.$$

$$\text{Ainsi } \mathcal{A}(x+h) \leq \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} \leq \mathcal{A}(x).$$



$$3. \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\mathcal{A}(x+h) - \mathcal{A}(x)}{h} = \sqrt{x}$$

La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\mathcal{A}'(x) = \sqrt{x}$.

On en déduit que $\mathcal{A}(x) = \int_0^x \sqrt{t} dt$ est une primitive de la fonction carrée.

3. Valeur moyenne d'une fonction

• **Durée estimée :** 15 min

• **Objectif :** Définir la valeur moyenne d'une fonction et son interprétation pour ensuite résoudre des problèmes (méthode 8). Ainsi, deux interprétations sont proposées : la première est la généralisation de la moyenne d'une série statistique, la deuxième comme étant la longueur d'un rectangle d'aire la surface sous la courbe.

1. a) La valeur moyenne est égale à 32.

b) 32 est la quantité d'eau qui serait tombée par jour s'il avait plu la même quantité d'eau chaque jour.

C'est aussi la largeur d'un rectangle de côté 5 et d'aire la somme des 5 rectangles constituées par la série.

$$2. \text{ a) } \mathcal{A} = \int_0^5 (1,2 + \cos x) dx$$

b) On cherche le nombre qui multiplié par 5 (la longueur du rectangle) est égal à $\mathcal{A}$.

$$\text{Soit } \frac{1}{5} \int_0^5 (1,2 + \cos x) dx.$$

À vous de jouer !

p. 143

$$1. \int_2^5 2x dx = \frac{(4+10) \times 3}{2} = 21$$

$$2. \int_{-4}^{-1} (-2u - 1) du = 12$$

$$3. \mathcal{A}_i = \frac{5}{10} \left(\ln(1) + \ln\left(1 + \frac{5}{10}\right) + \ln\left(1 + 2 \times \frac{5}{10}\right) + \dots + \ln\left(1 + 9 \times \frac{5}{10}\right) \right)$$

$$\mathcal{A}_i = \frac{5}{10} (\ln(1 \times 1,5 \times 2 \times 2,5 \times \dots \times 5,5)) \approx 5,28 \text{ u.a.}$$

$$\mathcal{A}_s = \frac{5}{10} \ln\left(1 + \frac{5}{10}\right) + \ln\left(1 + 2 \times \frac{5}{10}\right) + \dots + \ln\left(1 + 9 \times \frac{5}{10}\right) + \ln(6)$$

$$\mathcal{A}_s = \frac{5}{10} (\ln(1,5 \times 2 \times 2,5 \times \dots \times 5,5 \times 6)) \approx 6,18 \text{ u.a.}$$

4. **Attention :** on n'utilise pas la formule donnant la somme des carrés des n premiers termes. On choisit une série de rectangles (inférieurs ou supérieurs) et on calcule leur aire $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} = 0,4 \times \sum_{i=0}^9 (-2 + i \times 0,4)^2$$

$$\mathcal{A} = 5,44 \text{ u.a.}$$

$$5. \text{ a) } \int_{-1}^4 (x-1)^2 dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_{-1}^4 = \frac{27}{3} - \left(\frac{-8}{3} \right) = \frac{35}{3}$$

$$\text{b) } \int_2^3 \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} dx = [\ln(x^3 - x)]_2^3 = \ln 24 - \ln 6 = \ln 4$$

6. a) Attention : dans l'énoncé, les bornes de l'intégrale doivent être 2 et 3.

$$\text{On a } \int_2^3 \frac{1}{(2x-3)^2} dx = -\frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \int_0^1 2xe^{x^2} dx = e - 1$$

$$7. \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1) dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} + \ln(2)$$

$$8. \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 0,25 dx + \int_0^1 (2x+3) dx = 2,875 + 4 = 6,875$$

$$9. \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-10t} dt = -\frac{1}{20} (e^{-20} - 1)$$

$$10. \int_1^4 f(x) dx = 6$$

11. f est négative sur $[-5; -3]$ donc

$$\mathcal{A} = -\int_{-5}^{-3} \frac{1}{x} dx = \ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

$$12. 1. g(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) = 1 \text{ car la fonction racine}$$

cubique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit $x = 2$.

2. g est négative sur $]2; +\infty[$ donc

$$\mathcal{A} = \int_{-3}^2 g(x) dx - \int_2^4 g(x) dx = \frac{8811}{256}.$$

$$13. f(x) - g(x) = x^2 - x - 2.$$

2 et -1 sont les solutions du trinôme donc $(f - g)$ est négative sur $[-1; 2]$.

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = 4,5 \text{ u.a.}$$

$$14. f(x) - g(x) = \frac{3}{4}x^2 - 12 \text{ donc}$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = -4$$

$(f - g)$ est négative sur $[-4; 4]$ donc

$$\mathcal{A} = -\int_{-4}^4 (f(x) - g(x)) dx = 64.$$

$$15. 1. F'(t) = [(-20t - 20)e^{-t}]' \\ = (-20t - 20)'e^{-t} + (-20t - 20)(e^{-t})' \\ = -20e^{-t} + 20e^{-t} + 20te^{-t} = f(t)$$

$F(t)$ est donc bien une primitive de f .

$$2. \int_0^{10} f(t) dt = -220e^{-10} + 20 < 20.$$

Ils respectent bien le cahier des charges (de justesse).

16. 1. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f'(x) = -(0,5x + 3)e^{-0,5x}.$$

f' est négative donc

f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$2. F'(x) = (x+8)e^{-0,5x} = f(x).$$

Donc $F(x)$ est bien une primitive de $f(x)$.

3. x est exprimé en centaines d'euros donc 200 euros équivaut à $x = 2$.

$$f(2) = 10e^{-1} \approx 3,678\,794$$

$f(2)$ étant exprimé en milliers d'objets, pour un prix unitaire de 200 euros, la demande est de 3 678 objets à l'unité près.

$$4. \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx = \frac{1}{2} (F(4) - F(2)) \\ = \frac{1}{2} (-28e^{-2} + 24e^{-1})$$

$$\frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx \approx 5,039\,71 \text{ milliers d'objets.}$$

La valeur moyenne de la demande est 5 040 objets à 10 produits près.

Exercices

apprendre à démontrer

p. 150

Pour s'entraîner

Soit $x_0 \in [a; b]$ et $h \neq 0$ tel que $\{x_0 + h\} \in [a; b]$.

• Si $h > 0$: d'après la relation de Chasles, on a :

$$F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \\ = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

f est décroissante, on a l'encadrement suivant.

$$hf(x_0 + h) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq hf(x_0).$$

$$\text{D'où } f(x_0 + h) \leq \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \leq f(x_0).$$

f est continue, $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

$$\text{Ainsi, } \lim_{\substack{h > 0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0).$$

• Si $h < 0$: d'après la relation de Chasles, on a :

$$F_a(x_0) - F_a(x_0 + h) = - \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

f est décroissante, on a l'encadrement suivant.

$$-hf(x_0) \leq - \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \leq -hf(x_0 + h).$$

$$\text{D'où } f(x_0) \leq \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

$$\text{Donc } \lim_{\substack{h < 0 \\ h \rightarrow 0}} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0).$$

La limite à gauche est égale à la limite à droite de

$$0 \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Ainsi F_a est dérivable en x_0 et $F'_a(x_0) = f(x_0)$.

F_a est dérivable sur I et $F'_a = f$ et $F_a(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$,

F_a est la primitive de f qui s'annule en a .

25. Aire sous la courbe

Attention : dans l'énoncé, il faut lire pour la proposition **d**

$$2 \times \int_{-4}^{-3} (0,5x^2 + 0,5x - 3) dx - \int_{-3}^2 (0,5x^2 + 0,5x - 3) dx.$$

Réponse **d**

26. Estimer une intégrale

Attention : pour la question **a**), il faut lire

$$\int_{-1}^1 f(x) dx < \int_{-1}^1 g(x) dx.$$

Pour la question **b**), il faut lire $\int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 g(x) dx$

a) Vrai

b) Vrai

27. Aire entre deux courbes

Réponse **b**

Exercices

calculs et automatismes

p. 151

17. Primitives

Réponses **b** et **d**

18. Calcul d'intégrale (1)

Réponse **d**

19. Calcul d'intégrale (2)

Réponses **b** et **c**

20. Calcul d'intégrale (3)

Vrai.

21. Valeur moyenne (1)

Vrai.

22. Valeur moyenne (2)

Réponse **b**

23. Calcul d'intégrale (4)

Vrai.

24. Calcul d'intégrale (5)

Attention : dans l'énoncé, il faut lire pour la propo-

sition **d** $\int_{-4}^{-1} (x+1) dx$.

Réponse **d**

Exercices d'application

p. 152

Déterminer une intégrale par calcul d'aire

$$28. 1. \mathcal{A}_f = 6$$

$$2. \mathcal{A}_g = 12$$

29. Attention : il faut lire qu'on considère le point B sur la droite d'équation $y = -2x$ et d'abscisse -2 .

$$\mathcal{A}_{OAB} = 5$$

$$30. \int_0^4 (-x + 4) dx = 8$$

$$31. \int_{-1}^3 (x + 2) dx = 12$$

$$32. \text{ a) } \int_0^1 x dx = 0,5 \quad \text{ b) } \int_1^3 (2t + 1) dt = 10$$

c) Attention : il faut lire que la borne inférieure pour le calcul de l'intégrale est 3.

$$\int_3^4 (-y + 3) dy = -0,5$$

33. a) Soit $x \mapsto x$. On a $\mathcal{A}(x) = 4,5$

b) Soit $x \mapsto 2$. On a $\mathcal{A}(x) = 6$

c) Soit $x \mapsto -x + 3$. On a $\mathcal{A}(x) = 4,5$

Estimer une intégrale par la méthode des rectangles

34. 1. La longueur d'un intervalle est de 0,2.

2. Aire colorée = 0,2

$$\text{Aire hachurée} = 0,2 \times \frac{1}{1,2} = \frac{1}{6}$$

3. Aire des 5 rectangles colorés :

$$0,2 \left(\frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,6} + \frac{1}{1,8} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1627}{2520}$$

Aire des 5 rectangles hachurés :

$$0,2 \left(1 + \frac{1}{1,2} + \frac{1}{1,4} + \frac{1}{1,6} + \frac{1}{1,8} \right) = \frac{1879}{2520}$$

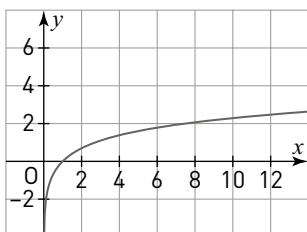
La fonction inverse est décroissante donc

$$\frac{1627}{2520} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq \frac{1879}{2520}$$

$$35. 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} \leq \int_0^4 f(x) dx \leq 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}$$

$$\text{Donc } 4 \leq \int_0^4 f(x) dx \leq 6$$

36. 1.



2. On peut utiliser les fonctions programmées lors de l'activité 1 en remplaçant n par 10 et f par la fonction logarithme.

$$\text{On a alors } U \leq \int_5^{10} \ln(t) dt \leq V$$

```
def U(f,n) :
    S=0
    for k in range(1,n+1) :
        S=S+f(k*5/n)
    return S*5/n
```

```
def V(f,n) :
    S=0
    for k in range(0,n) :
        S=S+f(k*5/n)
    return S*5/n
```

Calculs d'intégrales avec les primitives des fonctions usuelles

$$37. a) \int_0^4 (x-3) dx = -4$$

$$b) \int_0^{11} (1-x) dx = -49,5$$

$$c) \int_{-1}^1 \frac{3}{4} (1-x^2) dx = 1$$

$$d) \int_{-1}^4 (2t^3 - 3t^2 - 4t + 2) dt = 42,5$$

$$38. a) \int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t} \right) dt = 1 - \ln(4)$$

$$b) \int_0^1 e^{1-2x} dx = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

$$c) \int_1^3 \frac{1}{u^2} du = \frac{2}{3}$$

$$39. a) \int_0^1 x e^{x^2+2} dx = \frac{e^2(e-1)}{2}$$

$$b) \int_{-1}^1 x(2-x^2)^3 dx = 0$$

$$c) \int_{-2}^{-1} t(t^2-1) dt = -\frac{9}{4}$$

$$d) \int_{-1}^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}} dx = 3 - \sqrt{6}$$

$$40. a) \int_1^e \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} (\ln(1+e^2) - \ln 2)$$

b) Attention : la borne inférieure de l'intégrale est égale à 5.

$$\int_5^{15} \frac{3}{x-4} dx = 3 \ln 11$$

$$c) \int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \ln(8,5)$$

$$d) \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+2} dx = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

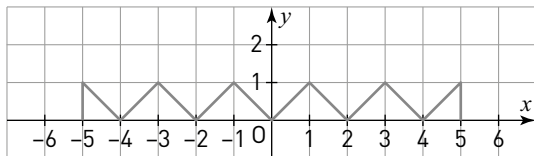
Utiliser la relation de Chasles

41. Attention : il faut lire ainsi la 3^e ligne d'équation :

$$t-3 \text{ si } t \in]3; 4].$$

$$\int_{-1}^4 f(t) dt = \int_{-1}^2 dt + \int_2^3 (-t+3) dt + \int_3^4 (t-3) dt = 4$$

42. 1. Attention : la fonction g est définie sur $[-5 ; 5]$.



2. $\int_0^1 g(t) dt = 0,5$

3. $\int_{-1}^1 g(t) dt = 1$

Attention : les bornes de la 2^e intégrale sont :

-5 pour la borne inférieure,

5 pour la borne supérieure.

$$\int_{-5}^5 g(t) dt = 5$$

43. Attention : il faut lire la 3^e ligne d'équation :

$$\frac{-x+3}{2} \text{ si } 2 \leq x \leq 3.$$

$$\int_0^3 f(x) dx = \ln 2 + \frac{7}{12}$$

Déterminer la valeur moyenne d'une fonction

44. 1. La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle de définition est égale à $\frac{13}{3}$.

2. La fonction f est positive sur $[-2 ; 2]$ donc la valeur moyenne est la longueur d'un rectangle de largeur 4 et d'aire $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

45. Attention : il faut lire $g : x \mapsto \frac{x}{[x^2 - 3]^2}$.

1. La valeur moyenne de g sur l'intervalle de définition est égale à $\frac{1}{4-e} \left(-\frac{1}{26} + \frac{1}{2e^2 - 6} \right)$.

2. La fonction g est positive sur $[e ; 4]$ donc la valeur moyenne est la longueur d'un rectangle de longueur $4 - e$ et d'aire $\int_e^4 g(x) dx$.

46. $\int_1^3 g(x) dx = 2 \ln 2$

47. La fonction étant paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc

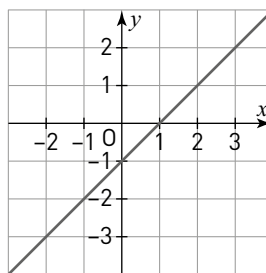
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt = 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt.$$

Or $\frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt = \frac{2}{\pi}$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t) dt = \frac{1}{2}$.

48. Soit $k \in \mathbb{R}$, si $f(x) = kx$ alors la valeur moyenne de la fonction sur $[a ; b]$ est $\frac{k(a+b)}{2}$.

Calcul d'aire à l'aide d'une intégrale

49. 1.



2. a) $\int_{-2}^1 f(x) dx = -4,5$

b) $\int_1^3 f(x) dx = 2$

3. f est négative sur $[-2 ; 1]$ et f est positive sur $[1 ; 3]$.

4. $\mathcal{A} = \int_{-2}^1 -f(x) dx = 4,5 \text{ u.a.}$

5. $\mathcal{A} = -\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 4,5 + 2 = 6,5 \text{ u.a.}$

50. 1. Attention : il faut déterminer le signe de h sur $[-3 ; 5]$.

h est négative sur $[-3 ; -2] \cup [1 ; 4]$ et positive sur $[-2 ; 1] \cup [4 ; 5]$.

2. $\mathcal{A} = \frac{81}{8}$

3. $\mathcal{A} = \frac{211}{8}$

51. 1. f est positive sur $[-5 ; -3] \cup [5 ; 6]$ et négative sur $[-3 ; 5]$.

2. $\mathcal{A} = \frac{167}{6}$

3. $\int_{-5}^6 f(x) dx = -\frac{187}{12}$

4. L'aire sous la courbe d'une fonction de signe non constant n'est pas égale à l'intégrale de la fonction.

Exercices d'entraînement p. 154-157

Calculs d'intégrales

52. 1. $g'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$ donc g est une primitive de f .

$$2. \int_1^e f(x) dx = \frac{e^3 - 7}{6}$$

53. 1. $a = 1$ et $b = -1$

$$2. \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ = \left[x - \ln(x+1)\right]_0^1 = 1 - \ln 2$$

54. 1. On réduit au même dénominateur $1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.

$$2. \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} = 1 + \ln \frac{2}{1+e}$$

55. 1. $a = \frac{1}{6}$ et $b = -\frac{1}{6}$

$$2. \int_4^5 f(x) dx = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{4}{7}\right)$$

56. 1. La fonction racine carrée est positive.

2. Les coordonnées de I sont $(1; 1)$.

Les coordonnées de M sont $(x; \sqrt{2x - x^2} + 1)$

$$\text{On a } IM^2 = (\sqrt{2x - x^2})^2 + (x - 1)^2 = 1.$$

$$3. \int_0^1 C(t) dt = 1 + \frac{\pi}{4}$$

Aire sous la courbe

$$57. \mathcal{A} = \int_0^1 t dt + \int_1^3 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} + \ln 3$$

58. 1. f est positive sur $[0; +\infty[$.

2. a) $u_0 = 0$

$$u_1 = 1$$

$$u_2 = 4$$

$$u_3 = 8$$

b) $u_n = 4(n-1)$ si $n \geq 2$

59. f s'annule en -1 et le produit des deux racines est égale à $-\frac{2}{3}$ donc la 2^e racine est $\frac{2}{3}$.

f est négative sur $\left[-1; \frac{2}{3}\right]$.

$$\mathcal{A} = -\int_{-1}^{\frac{2}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{2}{3}}^3 f(x) dx = \frac{250}{54}$$

$$60. \mathcal{A} = \frac{8}{3}$$

61. 1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ donc f est continue.

$$2. \int_0^4 f(x) dx = 2 \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

62. 1. 1 et -2 sont les deux racines du trinôme $x^2 + x - 2$ qui est donc négatif sur $[-2; 1]$ et positif sur $] -\infty; -2] \cup [1; +\infty[$.

$$2. I = \int_{-3}^2 f(x) dx \\ = \int_{-3}^{-2} (x^2 + x - 2) dx + \int_{-2}^1 -(x^2 + x - 2) dx \\ + \int_1^2 (x^2 + x - 2) dx$$

$$3. I = \frac{49}{6} \text{ et } J = -\frac{5}{6}. \text{ Donc } I > J.$$

$$63. 1. c = 4 \text{ et } a = -\frac{4}{9}$$

$$2. \mathcal{A} = 16 \text{ m}^2$$

$$3. \mathcal{A}_{\text{façade}} = 48 \text{ m}^2 \text{ soit } \mathcal{A} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\text{façade}}$$

Donc l'ouverture correspond aux normes.

64. A ► 1. a) $f(-1) = 0$

b) $f'(2) < 0$

c) $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en 0 et $f'(0) = -1$.

2. La fonction f est positive, l'intégrale $\int_{-1}^0 f(x) dx$ correspond à l'aire sous la courbe entre -1 et 0. On peut ainsi estimer qu'elle est comprise entre 2 et 3.

$$\text{B ► 1. } f(-1) = (-1 + 2)e^1 = e$$

$$2. f'(x) = -(x+1)e^{-x}$$

f est croissante sur $[-2; -1]$ et décroissante sur $[-1; 4]$.

$$3. F'(x) = (-x-3)e^{-x} + e^{-x} = (-x-2)e^{-x} = -(x+2)e^{-x} = f(x)$$

4. a) $\int_{-1}^0 f(x)dx = -3 + 2e$

b) On trouve comme valeur approchée de l'intégrale 2,43 qui est bien compris entre 2 et 3.

65. 1. La fonction f est positive, l'intégrale $\int_0^2 f(x)dx$ correspond à l'aire sous la courbe entre 0 et 2.

On peut ainsi estimer qu'elle est comprise entre 2 et 4.

2. a) On a $F'(x) = f(x)$.

b) $\int_0^2 f(x)dx = 4e - 8 \approx 2,87$ à 10^{-2} près.

Fonction définie par une intégrale

66. 1. F est la primitive de $f(t) = 1 - e^{-t^2}$ qui s'annule en 0 donc $F'(x) = 1 - e^{-x^2}$.

F' est positive sur $\mathbb{R}_+$ donc F est croissante.

2. $F(0) = 0$ et F est croissante.

Donc F est positive sur $\mathbb{R}_+$.

67. $F'(x) = 1 - e^{-x}$

F' est positive donc F est croissante sur $[0 ; 1]$.

Aire d'un domaine entre deux courbes

68. 1. $f(x) > g(x)$ si $x \in]2 ; +\infty[$.

2. $\mathcal{A}_{ABC} = 18$ u.a.

3. $\mathcal{A} = 12,5$ u.a.

69. 1. A(-2 ; -1) et B(2 ; 1)

2. $[-2 ; 2]$

3. $\frac{16}{3}$ u.a.

70. 1. A(-2 ; 0) et B(3 ; 0)

2. $]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$

3. $\frac{125}{6}$ u.a.

71. 1. a) $N(2) = 0$

b) $b = 1, c = 4, d = 8$

c) $f(x) - g(x)$ est négative sur $[0 ; 2]$ et positive sur $[2 ; +\infty[$.

2. Soit $a < 2$, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \frac{a^2}{4} - 8\ln(a+2) - 8\ln 2$

3. Soit $a \geq 2$, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = -8\ln 8 + 8\ln(a+2) - \frac{a^2}{4}$

72. 1. a) $a = 2, 1$

b) $f(x) - g(x)$ est négative sur $]0 ; 1]$ et positive sur $[1 ; +\infty[$.

2. a) $h'(x) = \ln x + 2$

b) h est décroissante sur $]0 ; e^{-2}[$ et croissante sur $]e^{-2} ; +\infty[$.

c) $f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow x \ln x - 1 + x \geq 0$$

Or $h(x) = x \ln x - 1 + x$ donc $f(x) - g(x)$ est du même signe que h .

Néanmoins, la factorisation par x entraîne un décalage sur l'axe des abscisses du changement de signe de $f(x) - g(x)$.

Il faut donc calculer la valeur de x pour laquelle $f(x) - g(x) = 0$ soit $x = 1$.

Donc $f(x) - g(x)$ est négative sur $]0 ; 1[$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur cet intervalle.

Donc $f(x) - g(x)$ est positive sur $]1 ; +\infty[$ donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur cet intervalle.

3. a) **Attention** : on demande de montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$F(x) = x \ln(x) - x$ est une primitive de f .

$F'(x) = f(x)$

b) **Attention** : on demande de montrer que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est égale à $1 - \frac{1}{e}$ en u.a.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{D}} &= \int_{e^{-1}}^1 (g(x) - f(x))dx \\ &= \int_{e^{-1}}^1 \left(\frac{1}{x} + 1 - \ln x \right) dx \\ &= \frac{e-1}{e} = 1 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

4. a) $\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \int_1^a (f(x) - g(x))dx$

$$\begin{aligned} &= \int_1^a \left(\ln x - \frac{1}{x} - 1 \right) dx \\ &= (a-1)\ln(a) \end{aligned}$$

b) **Attention** : on cherche à étudier les variations de k uniquement sur $[1 ; +\infty[$.

k est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

c) **Attention** : on demande de déterminer une valeur approchée de a à 10^{-2} près.

$a = 1,95$ à 10^{-2} près.

Interpréter une intégrale

73. 1. $f'(x) = -0,04e^x + 1$

$f'(x) > 0$ si $x < \ln 25$

f est croissante sur $[0 ; \ln 25[$ et décroissante sur $]\ln 25 ; 6]$.

2. $\alpha \approx 4,5$

3. $\int_2^4 f(x)dx = -0,04(e^4 - e^2) + 4$

4. La fonction est maximale en $x = \ln 25$.

$\ln 25 \approx 3,21$ et $f(\ln 25) \approx 1,218 8$ donc

$q_0 = 32$ et le bénéfice maximal est environ égal à 1 220 euros à 10 euros près.

5. $q_1 = \alpha \times 10 = 45$

6. $\frac{1}{2} \int_2^4 f(x)dx = -0,02(e^4 - e^2) + 2$

Donc le bénéfice moyen est de 1 056 euros à 1 euro près.

74. 1. $(0,82)^3 \times 10 = 5,514$ soit 5 514 euros.

2. a) $V_n = (0,82)^n \times 10$

b) 10

3. a) $I = \int_0^5 10e^{-0,2x} dx = 50 \left(1 - \frac{1}{e} \right)$
 $\approx 31,606$ milliers d'euros.

Soit 31 606 euros

b) $m = \frac{1}{5} \int_0^5 10e^{-0,2x} dx = \frac{1}{5} \times 50 \left(1 - \frac{1}{e} \right)$
 $= 10 \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 6,321$ milliers d'euros.

Soit 6 321 euros.

75. A ► Étude du prix proposé par le fournisseur

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = 1$

2. On détermine P' .

3. P est décroissante sur $[100 ; +\infty[$

B ► Étude de la somme à dépenser par le supermarché

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = +\infty$

2. On détermine S' .

3. On réduit au même dénominateur.

$$x + 22 - 20\,000 \times \frac{1}{x + 100}$$

4. $T(x) = \frac{x^2}{2} + 200x - 20\,000 \ln(x + 100)$

C ► Étude de différentes situations

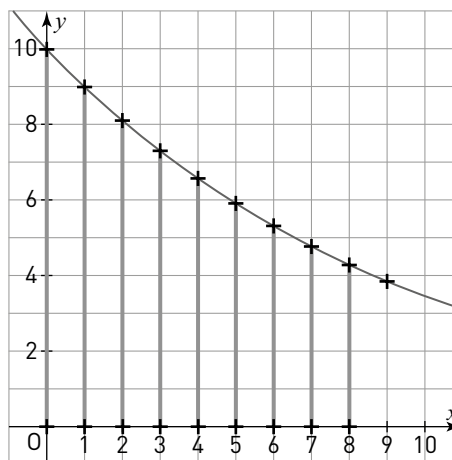
1. S est strictement croissante de $[100 ; +\infty[$ sur $[S(100) ; +\infty[$ donc 900 admet un unique antécédent α . Par dichotomie, on obtient $\alpha \approx 724$

2. $700 + 100 \ln \left(\frac{5}{7} \right) \approx 666$ €

76. 1. Attention : il faut lire $f(x) = 10e^{x \ln 0,9}$.

a) f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

b)



2. a) $v_{n+1} = 10e^{n \ln 0,9} e^{\ln 0,9} = 0,9 v_n$

v est une suite géométrique de raison 0,9.

Elle est positive et décroissante.

b) Voir la représentation graphique ci-dessus.

c) $S = \frac{10^{10} - 9^{10}}{10^8}$ et $S' = 100(1 - 0,9^{11}) - 10$

3. a) I est l'aire sous la courbe entre 0 et 10.

S est l'aire des rectangles contenus dans I .

S' est l'aire des rectangles contenant I .

Donc $S \leq I \leq S'$.

b) $I = \frac{10}{\ln 0,9} (e^{\ln 0,9} - 1)$

c) La moyenne de f vaut $\frac{1}{\ln 0,9} (e^{\ln 0,9} - 1)$.

4. a) $v_0 = 10$ (milliers d'euros), $v_1 = 0,9 \times 10$,
 $v_2 = 0,9^2 \times 10$, $v_n = 0,9^n \times 10$ (milliers d'euros)

b) $n = 9$

c) Sa valeur moyenne sur 10 ans est de 6,181 8 milliers d'euros soit 6 182 euros.

77. 1. $a = \frac{1}{2}$ et $b = 2$

2. $\frac{28}{3}$ u.a. soit $\frac{2\,800}{3} \text{ m}^2$

Exercices bilan

p. 158

78. Égalité des aires

1. Si $a = 3$ alors $\mathcal{A}_{\text{rectangle}} = 3$

$$\mathcal{A}_g = \frac{21 - e^{-5}}{5}$$

$\mathcal{A}_{\text{rectangle}}$ n'est pas égale à la moitié de $\mathcal{A}_g$.

2. $a = \frac{21 - e^{-5}}{10}$

79. Quelle forme de plage pour la piscine ?

1. $F'(x) = f(x)$

2. $-785e^{-5} + 160 \approx 154,71 \text{ m}^2$

3. $-\frac{157}{5}e^{-5} + 6,4 \approx 6,19 \text{ m}^2$

80. Vendre des voitures

1. $r(1) = 7$

2. a) On détermine $r' = \frac{x+2}{x}$

b) r est croissante sur $[1 ; 5]$.

3. a) $G'(x) = g(x)$

b) $R(x) = 6x + \frac{x^2}{2} + 2x \ln(x-1)$

c) $7 + 4 \ln 2 \approx 9,772\,588$ soit 97 725 euros

81. Aire entre deux courbes

1. $f(x) - g(x) \leq 0$ sur $[2 ; 4]$ et

$f(x) - g(x) \geq 0$ sur $]-\infty ; 2] \cup [4 ; +\infty[$.

2. $\mathcal{A} = \frac{4}{9}$

Exercices Préparer le BAC

Je me teste

p. 160

82. **D**

83. **B**

84. **B** et **D**

85. **B** et **D**

86. **A**

87. **B** et **D**

88. **A** et **C**

Exercices Préparer le BAC

Je révise

p. 161

89. Estimer une intégrale

a) $\int_0^1 x dx = 0,5$

b) $\int_1^3 (2t+1) dt = 10$

c) $\int_{-2}^1 (-y+3) dy = 10,5$

90. Estimer une intégrale

Réponse **C**

91. Calcul d'intégrale

1. $F'(x) = f(x)$

2. $\int_{-1}^2 f(x) dx = -12$

92. Estimer une intégrale

$\frac{1}{x+1}$ est positive sur $[0 ; 1]$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ est l'aire sous la courbe entre 0 et 1.

$\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2$.

93. Calcul d'aire

1. f est positive sur $[-2 ; 0]$.

2. $\int_{-2}^0 f(x) dx = e - \frac{1}{e^3}$

94. Calcul d'intégrale

a) $\int_{-2}^{-1} (x + 3)^2 dx = \frac{7}{3}$

b) $\int_{-3}^2 (x^3 + 2x^2 - 3x + 3) dx = \frac{355}{12}$

95. Calcul d'aire

a) $\int_{-2}^1 [(2x + 1) - (x^2 + 3x - 1)] dx = 4,5$

b) $\int_{1,5}^2 [(-10e^{-x}) - (-x^2)] dx = 10e^{-2} - 10e^{-\frac{3}{2}} - \frac{37}{24}$

96. Calcul d'aire

1. $f'(x) = 2e^x + 2xe^x = (2x + 2)e^x$

2. $I = \frac{2}{e}$

3. La fonction est positive.

97. Résoudre un problème

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

2. $f'(x) = \frac{2-x}{x}$

x	0	2	5
Signe de f'(x)	+	0	-
Variations de f	$-\infty$ $\nearrow$ $1 + 2\ln(2)$ $\searrow$ $-4 + 2\ln 5$		

3. a) $f(1) = 0$

b) f est continue et strictement décroissante de $[3 ; 4]$ sur $[-3 + 2\ln 3 ; -2 + 2\ln 2]$.

$0 \in [-3 + 2\ln 3 ; -2 + 2\ln 2]$ donc 0 admet un unique antécédent dans $[3 ; 4]$.

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[3 ; 4]$. $\alpha \approx 3,51$.

c) f est positive sur $[1 ; \alpha]$ et négative sur $[0 ; 1] \cup [\alpha ; 5]$.

4. a) $g'(x) = f(x)$

b) $\mathcal{A} = \int_1^\alpha f(x) dx = [g(x)]_1^\alpha = g(\alpha) - g(1)$

c) $\mathcal{A} \approx 0,64$ u.a.

Or $1 \text{ u.a.} = 2 \times 5 \text{ cm}^2 = 10 \text{ cm}^2$

donc $\mathcal{A} \approx 6,4 \text{ cm}^2$.

CHAPITRE 7 Lois discrètes

Manuel p. 164-193

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre se situe dans le prolongement des deux chapitres sur les probabilités du programme de Première spécialité (« Probabilités conditionnelles » et « Variables aléatoires réelles »).

Son objectif est double :

- faire découvrir et utiliser les variables aléatoires suivant les lois uniforme discrète, de Bernoulli, binomiale ainsi que toutes les notions en lien (coefficients binomiaux et schéma de Bernoulli notamment) et géométrique.
- mobiliser et faire travailler les acquis sur les trois chapitres évoqués précédemment.

Une place particulière est donnée aux notions d'intervalle de fluctuation (bien que l'expression ne soit pas employée dans le programme, il nous a semblé utile de l'appeler ainsi) et de seuil en se dégageant du systématisme induit par l'ancien programme (« on calcule l'intervalle de fluctuation bilatéral et on regarde si la fréquence est dedans », notamment en variant les types d'intervalles selon le contexte (à droite, à gauche ou centré), le tout dans des situations concrètes et variées.

Il est à noter que, conformément au programme, nous proposons ici quelques exercices sur les probabilités conditionnelles que l'on pourra prolonger dans le thème 6.

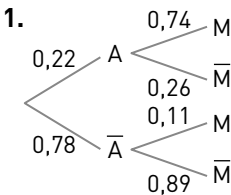
Objectifs

- Modéliser à l'aide des variables aléatoires suivant les lois uniforme discrète, de Bernoulli, binomiale et géométrique
- Déterminer et utiliser les coefficients binomiaux, notamment en lien avec le triangle de Pascal
- Utiliser une loi binomiale dans le cadre d'un problème de seuil
- Utiliser un intervalle de fluctuation dans le cadre de la loi binomiale
- Utiliser l'espérance pour comparer des lois
- Utiliser l'absence de mémoire de la loi géométrique
- Calculer des probabilités dans des situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles et des répétitions d'expériences aléatoires.

II. Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 165

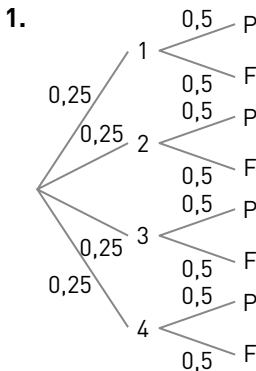
1. Utiliser un arbre pondéré



2. a) $p(A \cap M) = 0,22 \times 0,74 = 0,1628$ et
 $p(M) = 0,22 \times 0,74 + 0,78 \times 0,11 = 0,2486$

b) $p_M(A) = \frac{p(A \cap M)}{p(M)} = \frac{0,1628}{0,2486} \approx 0,6549$

2. Représenter une succession de deux épreuves indépendantes



ou

Lancer de dé \ Lancer de pièce	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
F	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. $3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0,375$ (voir les cases grisées dans le tableau).

3. Modéliser par une variable aléatoire

1.

g_i	-1	0	4	19	99
$p(G = g_i)$	0,865	0,1	0,02	0,01	0,005

2. a) $E(G) = 0,865 \times (-1) + 0,1 \times 0$
 $+ 0,02 \times 4 + 0,01 \times 19$
 $+ 0,005 \times 99 = -0,1.$

b) $\sigma(G) \approx 7,33.$

c) Non car $E(G) \neq 0.$

3. $p(G \geq 15) = p(G = 19) + p(G = 99)$
 $= 0,01 + 0,005 = 0,015.$

4. Interpréter une espérance

$E(X) = -0,01$ signifie que si l'on joue un grand nombre de fois, en moyenne, on perd 0,01 euro par partie.

a) $100 \times (-0,01) = -1$

b) $1\,000 \times (-0,01) = -10$

Activités

p. 166-169

1. Loi uniforme discrète

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir la loi uniforme

1. On a :

q_i	1	2	3	4
$p(Q = q_i)$	0,25	0,25	0,25	0,25

$$E(Q) = 0,25 \times 1 + 0,25 \times 2 + 0,25 \times 3 + 0,25 \times 4 = 2,5$$

2. On a :

h_i	1	2	3	4
$p(H = h_i)$	0,125	0,125	0,125	0,125
h_i	5	6	7	8
$p(H = h_i)$	0,125	0,125	0,125	0,125

$$E(H) = 0,125 \times 1 + 0,125 \times 2 + \dots + 0,125 \times 8 = 4,5$$

3. a) $\frac{1}{n}$

b) $E(X) = \frac{n+1}{2}$

c) On a : $p(X = 1) = p(X = 2) = \dots = p(X = n) = \frac{1}{n}$

$$\text{Donc } E(X) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{1}{n} + \dots + n \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} (1 + 2 + \dots + n)$$

$$\text{Or } 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Donc } E(X) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

2. Découvrir les schémas de Bernoulli – (Thème 7)

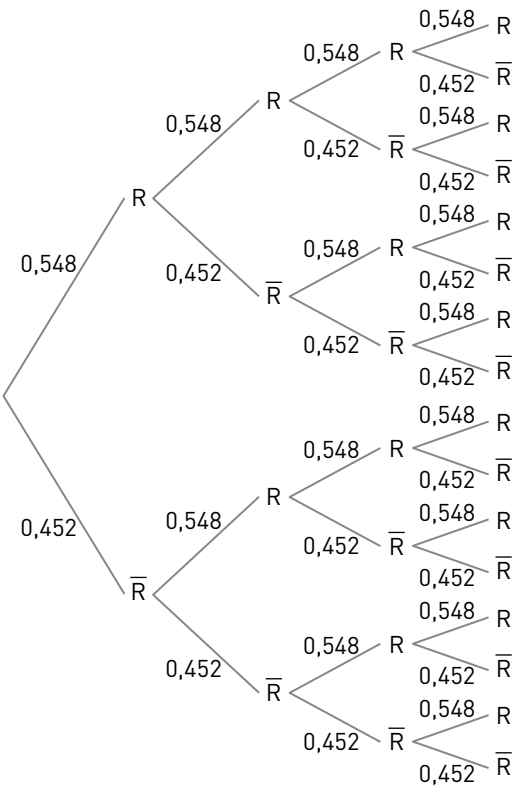
- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Découvrir les schémas de Bernoulli et comment les utiliser pour calculer des probabilités

1. La réponse dépend de l'élève.

2. a) Soit le tir est réussi (c'est un succès), soit non. C'est donc bien une épreuve de Bernoulli avec la probabilité d'un succès

$p = 0,548$.

b) En appelant R un tir réussi :

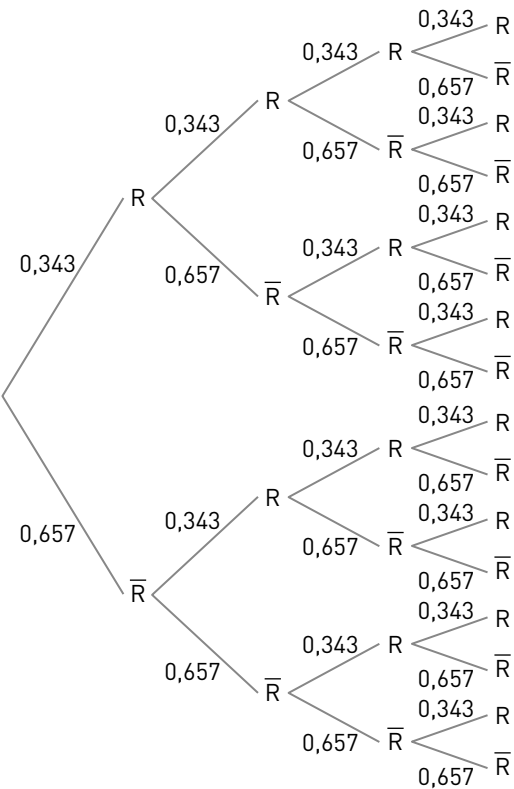


c) La probabilité qu'au moins 3 tirs soient réussis est : $4 \times 0,548^3 \times 0,452 + 0,548^4 \approx 0,39$

(il y a 4 chemins avec 3 tirs réussis : le 2^e, le 3^e, le 5^e et le 9^e et 1 chemin avec 4 tirs réussis : le 1^{er}).

3. a) Soit le tir est réussi (c'est un succès), soit non donc c'est bien une épreuve de Bernoulli avec la probabilité d'un succès $p = 0,343$.

On a :



b) La probabilité qu'au moins 2 tirs soient réussis est :

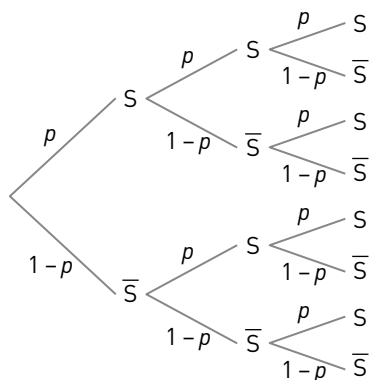
$6 \times 0,343^2 \times 0,657^2 + 4 \times 0,343^3 \times 0,657 + 0,343^4 \approx 0,42$
(il y a 6 chemins avec 2 tirs réussis : le 4^e, le 6^e, le 7^e, le 10^e, le 11^e et le 13^e, il y a 4 chemins avec 3 tirs réussis : le 2^e, le 3^e, le 5^e et le 9^e et 1 chemin avec 4 tirs réussis : le 1^{er}).

4. Dans ces deux cas, il marque au moins 6 points s'il réussit au moins trois paniers à 2 points ou au moins deux paniers à 3 points ce qui est réalisé avec les probabilités respectives approximatives 0,39 et 0,42 : il doit donc préférer l'option à 3 points.

3. Découvrir les k par n

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir les k parmi n et comment les obtenir à l'aide de la calculatrice.

1.



2. a) $\binom{3}{0} = 1$ (dernier chemin)

$\binom{3}{1} = 3$ (4^e, 6^e et 7^e chemins)

$\binom{3}{2} = 3$ (2^e, 3^e et 5^e chemins)

$\binom{3}{3} = 1$ (1^{er} chemin)

4. Découvrir le triangle de Pascal

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Découvrir en le construisant le triangle de Pascal

1. • Dans l'arbre représentant un schéma de Bernoulli de taille n , seul le premier chemin correspond à n succès donc $\binom{n}{n} = 1$.

• Dans l'arbre représentant un schéma de Bernoulli de taille n , seul le premier chemin correspond à 0 succès donc $\binom{n}{0} = 1$.

2. La diagonale et la première colonne correspondent respectivement aux valeurs de $\binom{n}{n}$ et $\binom{n}{0}$ donc elles ne contiennent que des 1.

3. a) $\binom{2}{1} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1}$

$= 1 + 1 = 2.$

b) $\binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1}$

$= 1 + 2 = 3.$

c) On a le triangle complété ci-contre.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

5. Travailler avec la loi binomiale – (Thème 7)

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** De manière ouverte, découvrir la formule donnant $p(X = k)$ en contexte pour X suivant la loi binomiale.

Si l'on trace l'arbre représentant le schéma de Bernoulli associé à cette loi binomiale, il y a $\binom{8}{2} = 28$ chemins correspondant à 2 succès sur les 8 répétitions. Sur chacun de ces chemins, il y a 2 pondérations 0,25 (probabilité d'un succès : « On obtient 1 ») et 6 pondérations 0,75 donc $p(X = 2) = 28 \times 0,25^2 \times 0,75^6 \approx 0,31$.

6. Déterminer directement $p(X = k)$ avec la calculatrice pour la loi $B(n ; p)$ – (Thème 7)

- **Durée estimée :** 5 min
 - **Objectif :** Calculer une probabilité avec la loi binomiale avec les fonctionnalités avancées des calculatrices.
2. $p(Y = 10) \approx 0,136$ et $p(Z = 17) \approx 0,048$.

7. Déterminer directement $p(X \leq k)$ avec la calculatrice pour la loi $B(n ; p)$

- **Durée estimée :** 5 min
 - **Objectif :** Calculer une probabilité avec la loi binomiale avec les fonctionnalités avancées des calculatrices.
2. $p(Y \leq 22) \approx 0,07$ et $p(Z \leq 56) \approx 0,903$

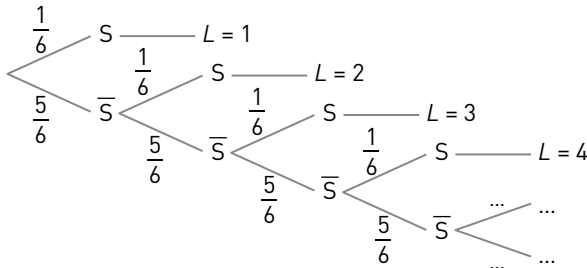
8. Découvrir la loi géométrique – (Thème 7)

• **Durée estimée** : 30 min

• **Objectif** : Découvrir la loi géométrique

1. a) C'est impossible car l'arbre a une infinité de branches.

b)



2. a) $p(L = 1) = \frac{1}{6}$

$$p(L = 2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$$

$$p(L = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$$

$$p(L = 4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} = \frac{125}{1296}$$

b) $p(L = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$ ($k - 1$ échecs successifs puis une réussite).

3. a) $K = [k \text{ for } k \text{ in range}(1, 26)]$

b) $P = [(1/6) * (5/6)**(k-1) \text{ for } k \text{ in range}(1, 26)]$

c)

```
K=[k for k in range(1,26)]
P=[(1/6)*(5/6)**(k-1) for k in range(1,26)]
import matplotlib.pyplot as plt
plt.bar(K,P)
plt.show()
```

d) À la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

À vous de jouer !

p. 171-181

1. 1. F prend les valeurs 1, 2 et 3 avec la même probabilité $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Donc F suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3\}$.

2. $p(F \leq 2) = p(F = 1) + p(F = 2) = \frac{2}{3}$

2. 1. D prend les valeurs 1, 2, ..., 20 avec la même probabilité $\frac{1}{20}$

Donc D suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; 20\}$.

2. $p(D = 20) = \frac{1}{20} = 0,05$

3. 1. Il y a soit 0 boule rose, avec une probabilité $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$, soit 1 boule rose, avec une probabilité

$$\frac{10}{15} = \frac{2}{3} \text{ donc } R \text{ suit la loi } \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right).$$

2. Il faudrait que la probabilité d'obtenir une boule rose soit $\frac{1}{4}$ c'est-à-dire qu'il y ait 40 boules au total donc il faudrait ajouter 25 boules vertes.

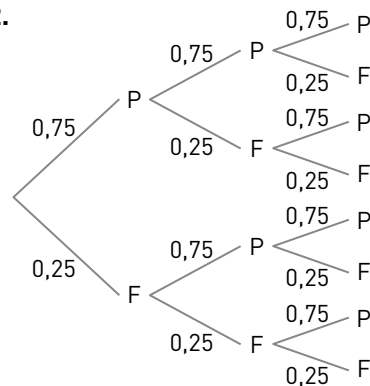
4. 1. $p(X = 0) = 1 - 0,2 = 0,8$

et $p(X = 2) = 0$

2. $E(X) = p = 0,2$

5. 1. On considère une succession de 3 expériences de Bernoulli (en considérant qu'un succès est : « Obtenir PILE » par exemple) identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est 0,75 donc cette succession d'épreuves est bien un schéma de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = 0,75$.

2.



3. La probabilité d'obtenir exactement une fois PILE est $3 \times 0,75 \times 0,25^2 = 0,140625$ (4^e, 6^e et 7^e chemins en partant du haut).

6. 1. On doit supposer que toutes les parties sont indépendantes.

2. Si on fait un arbre, il y a un seul chemin correspondant à 3 parties perdues et toutes les pondérations inscrites dessus sont 0,9 donc cette probabilité est $0,9^3 = 0,729$.

7. 1. X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 20$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès correspond à : « Obtenir FACE ») de paramètre $p = 0,5$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,5$.

$$\begin{aligned} 2. p(X = 11) &= \binom{20}{11} \times 0,5^{11} \times 0,5^{20-11} \\ &= \binom{20}{11} \times 0,5^{20} \approx 0,16 \end{aligned}$$

8. 1. T donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 15$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (un succès correspond à : « Obtenir un trèfle ») de paramètre $p = 0,25$ donc T suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,25$.

$$\begin{aligned} 2. p(T = 5) &= \binom{15}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{15-5} \\ &= \binom{15}{5} \times 0,25^5 \times 0,75^{10} \approx 0,17 \end{aligned}$$

9. 1. $p(X > 6) = 1 - p(X \leq 6) \approx 0,62$

2. $p(3 \leq X < 12) = p(X \leq 11) - p(X \leq 2) \approx 0,97$

10. 1. $p(Y < 24) = p(Y \leq 23) \approx 0,15$

2. $p(21 < Y < 25) = p(Y \leq 24) - p(Y \leq 21) \approx 0,26$

11. $\alpha = 0,1$ et on tabule $p(Y \leq x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
38	0.0061			
39	0.0106			
40	0.0177			
41	0.0285			
42	0.0444			
43	0.0667			
44	0.0967			
45	0.1356			
46	0.184			
47	0.2419			
48	0.3084			

X=38

Donc l'intervalle est [45 ; 100].

12. On tabule $p(Z \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
17	0.0019			
18	0.0062			
19	0.0179			
20	0.0451			
21	0.1004			
22	0.1968			
23	0.3397			
24	0.5174			
25	0.6993			
26	0.8484			
27	0.9425			

X=27

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
21	0.1004			
22	0.1968			
23	0.3397			
24	0.5174			
25	0.6993			
26	0.8484			
27	0.9425			
28	0.9856			
29	0.9982			
30	1			
31	1			

X=31

Donc l'intervalle est [18 ; 29].

13. 1. F donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès : « Obtenir FACE », lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'être un succès est 0,2.

Donc F suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,2$.

2. $p(F = 3) = (1 - 0,2)^{3-1} \times 0,2 = 0,128$.

3. $p(F \leq 4) = 1 - (1 - 0,2)^4 = 0,5904$.

4. $E(F) = \frac{1}{0,2} = 5$ donc on peut « espérer » obtenir FACE en cinq essais.

14. 1. C donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès : « Obtenir un café », lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'être un succès est 0,1.

Donc C suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,1$.

2. $p(C \leq 6) = 1 - (1 - 0,1)^6 \approx 0,469$.

15. 1. $\binom{4}{2} = 6$

2. $\binom{6}{2} = \binom{5}{1} + \binom{5}{2} = 5 + 10 = 15$

16. On a :

n \ k							
	0	1	2	3	4	5	6
6	1	6	15	20	15	6	1

$$\begin{aligned} 17. p_{X>4}(X \geq 8) &= p_{X>4}(X > 7) \\ &= p_{X>4}(X > 4 + 3) \\ &= p(X > 3) = 0,25^3 \\ &\approx 0,016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18. p_{X \geq 5}(X > 10) &= p_{X > 4}(X > 10) \\
 &= p_{X > 4}(X > 4 + 6) \\
 &= p(X > 6) = 0,25^6 \\
 &\approx 0,000\ 2
 \end{aligned}$$

19. • Soit A la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus si on lance une pièce équilibrée. A suit la loi $\mathcal{B}(0 ; 5)$ donc, en moyenne, on obtient $E(A) = 0,5$ FACE quand on fait un grand nombre de lancers.

• Soit B la variable aléatoire donnant le nombre de FACE obtenus si on lance deux fois la pièce truquée. B suit la loi $\mathcal{B}(2 ; 0,2)$ donc, en moyenne, on obtient $E(B) = 0,4$ FACE quand on fait un grand nombre de lancers.

Il faut donc privilégier le lancer de la pièce non truquée.

$$20. E(X) = \frac{1+4}{2} = 2,5 \text{ et } E(Y) = \frac{1}{0,25} = 4$$

Donc, en moyenne, le concours 1 est obtenu à la 2,5^e tentative contre la 4^e pour le concours 2.

Le concours 1 semble donc plus facile à obtenir.

Exercices

apprendre à démontrer

p. 182

Pour s'entraîner

$$\begin{aligned}
 V(X) &= (1-p)^2(0-2p)^2 + 2p(1-p)(1-2p)^2 + p^2(2-2p)^2 \\
 &= (1-p)^2 \times 4p^2 + 2p(1-p)(1-2p)^2 + p^2(2(1-p))^2 \\
 &= 2p(1-p)(2p(1-p) + (1-2p)^2 + 2p(1-p)) \\
 &= 2p(1-p)(2p - 2p^2 + 1 - 4p + 4p^2 + 2p - 2p^2) \\
 &= 2p(1-p)
 \end{aligned}$$

Exercices

calculs et automatismes

p. 183

21. Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$

Faux ($p(2) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{16}$ par exemple).

22. Épreuve de Bernoulli

Réponse **b**

23. Loi de Bernoulli (1)

Faux (il faut que ces valeurs soient 0 et 1).

24. Loi de Bernoulli (2)

Réponses **a** et **b**

($p = p(Y=1)$ et $V(X) = p(1-p)$ n'est égal à 0,16 que pour $p = 0,2$ et $p = 0,8$ pour les réponses proposées).

25. Schéma de Bernoulli

On doit justifier que ces épreuves sont des épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

26. Loi binomiale (1)

Réponse **c**

Attention : on regarde le nombre d'échecs et 0,2 est la probabilité d'un succès.

27. Loi binomiale (2)

$$\binom{4}{1} \times 0,1^1 \times 0,9^3 = 0,2916$$

28. Espérance de la loi binomiale (1)

Réponse **b** ($200 \times 0,63 = 126$).

29. Espérance de la loi binomiale (2)

Réponse **b** (valeur sur laquelle la cloche est approximativement centrée).

30. Intervalle de fluctuation

Vrai

31. Loi géométrique (1)

$$p(X=5) = 0,051\ 84$$

32. Loi géométrique (2)

Réponse **b**

33. Loi géométrique (3)

Vrai (de paramètre $1-p$ où p est la probabilité d'un succès).

Exercices d'application

p. 184-187

Loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$

34. 1. C suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; 15\}$.

$$2. E(C) = \frac{1+15}{2} = 8$$

$$V(C) = \frac{15^2 - 1}{12} \approx 18,7$$

$$3. p(C > 4) = p(5) + \dots + p(15) = \frac{11}{15}$$

35.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

1. Il y a 10 nombres dont le chiffre des unités est 1, 10 nombres dont le chiffre des unités est 2, ..., 10 nombres dont le chiffre des unités est 9.

Ainsi, pour tout k entier entre 1 et 9, $p(D = k) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$

Donc D suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; 9\}$ ($n = 9$).

2. Non car U peut prendre la valeur 0.

36. 1. C prend les valeurs 1, 2, 3 et 4 avec la probabilité $\frac{1}{4} = 0,25$ donc C suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

2. En moyenne, elle boit $E(C) = \frac{1+4}{2} = 2,5$ cafés par jour soit environ $2,5 \times 100 = 250$ cafés en 100 jours.

37. On résout $\frac{1+n}{2} = 11,5 \Leftrightarrow n = 22$.

Épreuve de Bernoulli

38. En considérant qu'un succès est : « L'élève a choisi l'option mathématiques complémentaires » alors c'est une expérience à deux issues, donc une épreuve de Bernoulli, avec la probabilité d'un succès $p = 0,27$.

Remarque : Il est tout aussi légitime de considérer qu'un succès est : « L'élève n'a pas choisi l'option mathématiques complémentaire » auquel cas, $p = 0,73$.

39. 1. En considérant qu'un succès est : « Le TGV arrive à l'heure » alors c'est une expérience à deux issues, donc une épreuve de Bernoulli.

2. La probabilité d'un succès est $p = 0,914$.

40. Il y a trois résultats possibles à cette épreuve (pierre, feuille ou ciseau) donc ce n'est pas une épreuve de Bernoulli.

Loi de Bernoulli

41. 1. On obtient :

- PILE c'est-à-dire 0 fois FACE avec une probabilité $\frac{2}{3}$,
- FACE c'est-à-dire 1 fois FACE avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

Donc les valeurs prises par X sont bien 0 et 1 avec

$$p(X = 1) = \frac{1}{3} \text{ donc } p = \frac{1}{3}.$$

$$2. \sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

42. 1. Le chiffre des dizaines d'un entier entre 1 et 12 est 0 ou 1.

Le dé étant équilibré :

$$p(X = 0) = \frac{9}{12} = 0,75 \text{ (résultats } 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 8 \text{ et } 9)$$

$$p(X = 1) = \frac{3}{12} = 0,25 \text{ (résultats } 10 ; 11 \text{ et } 12)$$

Donc X suit une loi de Bernoulli avec $p = 0,25$.

2. On a :

Dé 8 \ Dé 4	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	4	5	6	7	8	9	10	11
4	5	6	7	8	9	10	11	12

D'après ce tableau :

$$p(Y = 0) = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} \text{ (résultats 2 ; 3 ; ... ; 8 et 9)}$$

$$p(Y = 1) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16} \text{ (résultats 10 ; 11 et 12)}$$

Donc Y suit une loi de Bernoulli avec $p = \frac{3}{16}$.

43. 1. $E(X) = (1 - p) \times 0 + p \times 1 = p.$

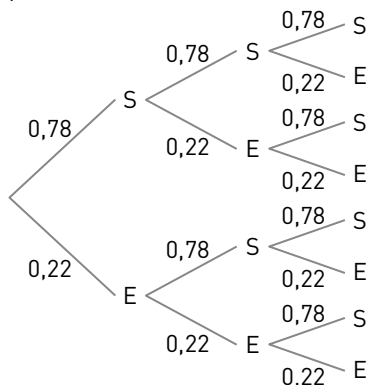
$$\begin{aligned} 2. V(X) &= (1-p)[0-p]^2 + p[1-p]^2 \\ &= (1-p) \times p^2 + p(1-p)^2 \\ &= (1-p)p(p+1-p) = p(1-p) \end{aligned}$$

Donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1-p)}$.

Schéma de Bernoulli

44. 1. On doit supposer que les lancers sont indépendants.

2. On considère qu'un succès (S) désigne le fait de planter la boule sur le socle.

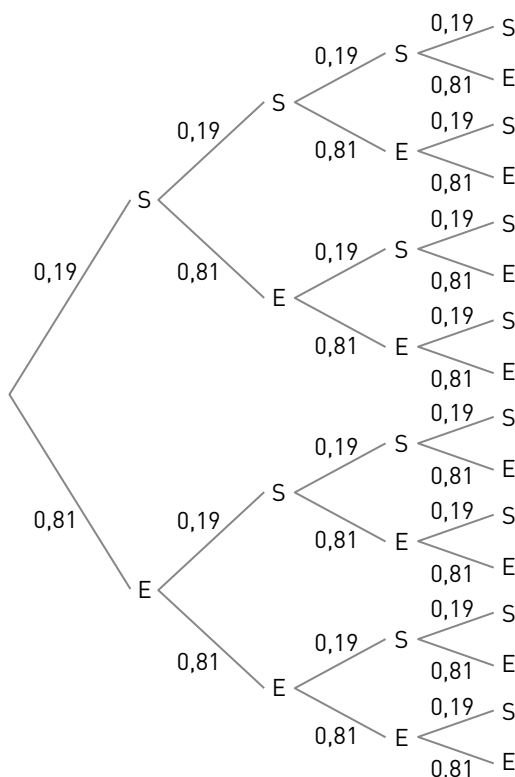


3. a) $0,78 \times 0,22 \times 0,22 + 0,22 \times 0,78 \times 0,22 + 0,22 \times 0,22 \times 0,78 \approx 0,113$.

b) $0,78^3 + 3 \times 0,78^2 \times 0,22 \approx 0,876$.

45. 1. On doit supposer que les appels sont indépendants.

2. On considère qu'un succès (S) désigne le fait que l'appel soit injustifié.



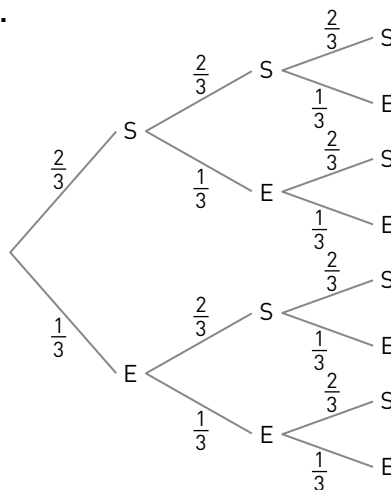
3. a) $6 \times 0,81^2 \times 0,19^2 \approx 0,142.$

b) C'est le contraire de : « Tous les appels sont injustifiés » donc $1 - 0,19^4 \approx 0,999$.

46. 1. En considérant qu'un succès (S) est : « Il regarde son téléphone », on considère une succession de 3 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes avec la probabilité d'un succès qui est $\frac{2}{3}$ donc cette succession d'épreuves est bien un

schéma de Bernoulli avec $n = 3$ et $p = \frac{2}{3}$.

2.



$$3. \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \approx 0,741.$$

Coefficients binomiaux sans triangle de Pascal

$$47. \binom{10}{10} = 1 \text{ et } \binom{100}{0} = 1$$

$$48. 1. \binom{12}{5} = 792 \quad \binom{12}{6} = 924$$

$$2. a) \binom{12}{7} = \binom{12}{12-5} = \binom{12}{5} = 792$$

$$b) \binom{13}{6} = \binom{12}{6} + \binom{12}{5} = 1716$$

$$c) \binom{13}{7} = \binom{13}{13-6} = \binom{13}{6} = 1716$$

$$49. 1. \binom{15}{4} = 1365 \text{ et } \binom{15}{5} = 3003$$

$$2. a) \binom{15}{11} = \binom{15}{15-4} = \binom{15}{4} = 1365$$

$$b) \binom{15}{10} = \binom{15}{15-5} = \binom{15}{5} = 3003$$

$$c) \binom{16}{5} = \binom{15}{5} + \binom{15}{4} = 4368$$

$$d) \binom{16}{11} = \binom{16}{16-5} = \binom{16}{5} = 4368$$

Loi binomiale, définition et calcul de $p(X = k)$

$$50. a) p(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0,42^1 \times 0,58^3 \\ \approx 4 \times 0,42 \times 0,195 \approx 0,328$$

$$b) p(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0,42^2 \times 0,58^2 \\ \approx 6 \times 0,176 \times 0,336 \approx 0,355$$

$$c) p(Y = 1) = \binom{4}{1} \times 0,58^1 \times 0,42^3 \\ \approx 4 \times 0,58 \times 0,074 \approx 0,172$$

$$d) p(Y = 2) = \binom{4}{2} \times 0,58^2 \times 0,42^2 \\ \approx 6 \times 0,336 \times 0,176 \approx 0,355$$

Remarque : ces approximations ne sont pas très bonnes.

51. 1. En considérant qu'un succès pour chacun des lancers est : « Obtenir rouge », X donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 20$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (« Obtenir rouge ») est $p = \frac{18}{37}$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{18}{37}$.

2. On cherche :

$$p(X = 9) = \binom{20}{9} \times \left(\frac{18}{37}\right)^9 \times \left(\frac{19}{37}\right)^{11} \approx 0,168.$$

52. 1. En considérant qu'un succès pour chacun des 35 élèves est : « L'élève est mineur en fin d'année », M donne le nombre de succès lorsque l'on réalise $n = 35$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli dont la probabilité de succès (« L'élève est mineur en fin d'année ») est $p = 0,33$ donc M suit la loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,33$.

$$2. p(M = 10) = \binom{35}{10} \times 0,33^{10} \times 0,67^{25} \approx 0,126$$

$$p(M = 11) = \binom{35}{11} \times 0,33^{11} \times 0,67^{24} \approx 0,141$$

$$p(M = 12) = \binom{35}{12} \times 0,33^{12} \times 0,67^{23} \approx 0,139$$

3. On cherche :

$$p(10 \leq M \leq 12) \\ = p(M = 10) + p(M = 11) + p(M = 12) \\ \approx 0,126 + 0,141 + 0,139 = 0,406.$$

Remarque : on peut aussi utiliser les fonctionnalités avancées de la calculatrice.

Calculs de probabilités avec la loi binomiale

$$53. a) \text{ Environ } 0,197. \quad b) \text{ Environ } 0,366.$$

$$c) \text{ Environ } 0,861. \quad d) \text{ Environ } 0,66.$$

54. a) Environ 0,398. b) Environ 0,637.
c) Environ 0,922. d) Environ 0,95.

55. G suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,1$.

- a) $p(G > 100) \approx 0,473$.
b) $p(G < 85) \approx 0,049$.
c) $p(95 \leq G \leq 105) \approx 0,438$.
d) $p(90 < G < 110) \approx 0,684$.

56. On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes végétariennes parmi les 250 personnes prenant un repas à cette cantine. Elle suit la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = 0,12$. On cherche $p(X > 32) \approx 0,307$.

Loi binomiale : espérance et aspect graphique

57. 1. $E(X) = 20 \times 0,83 = 16,6$
2. $E(Y) = 100 \times 0,79 = 79$

58.

```
def param_binom(n,p) :  
    return n*p
```

59. 1. $np = 2$ donc $n = \frac{2}{p}$.

On a $\frac{1}{0,15} \geq \frac{1}{p} \geq \frac{1}{0,16}$ donc $\frac{2}{0,15} \geq n = \frac{2}{p} \geq \frac{2}{0,16}$.

Comme $\frac{2}{0,15} \approx 13,3$ et $\frac{2}{0,16} \approx 12,5$ on en déduit que $n = 13$.

2. $p = \frac{2}{13}$.

60. Soit X suivant la loi à B.

On peut penser que $E(X) \approx 7$ donc $p \approx \frac{7}{10} = 0,7$ donc $p = 0,66$.

61. 1. a) $E(X) = 10$

b) $np = 10 \Leftrightarrow n = \frac{10}{0,4} = 25$.

2. On peut penser que $E(Y) = 20$.

Comme $n = 25$, on a $p = \frac{20}{25} = 0,8$.

Intervalle de fluctuation

62. a) $[0 ; 30]$ b) $[0 ; 33]$

63. a) $[3 ; 50]$ b) $[2 ; 50]$

64. a) $[20 ; 31]$ b) $[18 ; 32]$

65. 1. F suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,36$.

On tabule $x \mapsto p(F \leq x)$ et on obtient que le plus petit entier k tel que $p(F \in [0 ; k]) \geq 0,95$

c'est-à-dire $p(F \leq k) \geq 0,95$ est 11 donc l'intervalle cherché est $[0 ; 11]$.

2. $\frac{11}{20} = 0,55$ donc on peut être sûr au seuil de 95 %

que la fréquence de « FACE » obtenus sera inférieure ou égale à 55 %.

66. 1. J suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,35$.

On cherche le plus petit k tel que $p(J \leq k) > 0,01$.

On tabule $x \mapsto p(J \leq x)$ et on obtient $k = 7$ donc l'intervalle cherché est $[7 ; 40]$.

2. $\frac{7}{40} = 0,175$ donc on peut être sûr au seuil de

99 % que la fréquence de boules jaunes obtenues sera supérieure ou égale à 17,5 %.

67. 1. P suit la loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = \frac{5}{11}$.

On tabule $k \mapsto p(P \leq k)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1			
6	0.0232			
7	0.0504			
8	0.1244			
9	0.2283			
10	0.3668			
11	0.5242			
12	0.6773			
13	0.8048			
14	0.8959			
15	0.9516			
16	0.9806			

X=16

Donc $[7 ; 16]$ est un intervalle de fluctuation centré au seuil de 95 % (car $p(X \leq 7) > 0,025$ et $p(X \leq 16) \geq 0,975$).

2. La fréquence de nombres pairs sur les 25 tirages est donc comprise entre $\frac{7}{25}$ soit 28 % et $\frac{16}{25}$ soit 64 %, au risque de 5 %.

Loi géométrique

68. À 10^{-3} près :

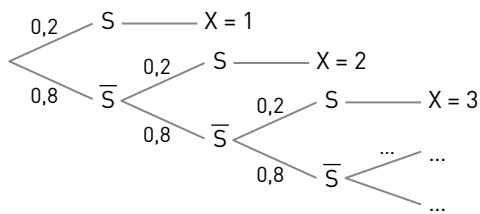
- a) 0,072
- b) 0,6
- c) 0,536
- d) 0,316
- e) 0,591
- f) 0,283

69. À 10^{-3} près :

- a) 0,028
- b) $\frac{1}{0,03} \approx 33,3$
- c) 0,177
- d) 0,119
- e) 0,07
- f) 0,36

70. 1. X donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès : « Réussir un carreau » lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'être un succès est 0,2 donc X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,2$.

2. On a :



$$p(X = 2) = 0,8 \times 0,2 = 0,16.$$

$$3. p(X = 5) = 0,8^4 \times 0,2 = 0,081\,92$$

C'est la probabilité qu'elle réussisse le premier carreau au 5^e essai.

$$4. p(X \leq 3) = 1 - 0,8^3 = 0,488$$

C'est la probabilité qu'elle réussisse le premier carreau avant le 4^e essai.

71. 1. X donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès (« Gagner une partie ») lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'être un succès est 0,001 donc X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,001$.

2. En moyenne, on peut espérer gagner la première fois après

$$E(X) = \frac{1}{0,001} = 1\,000 \text{ parties.}$$

$$3. p(X > 500) = (1 - 0,001)^{500} \approx 0,606.$$

4. On cherche

$$p(X \leq 1\,000) = 1 - (1 - 0,001)^{1000} \approx 0,632.$$

72. 1. X donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès (« obtenir 10 ») lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'être un succès est $\frac{1}{15}$ donc X suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{15}$.

$$2. p(5 \leq X \leq 12) = p(X > 4) - p(X > 12) \\ = \left(\frac{14}{15}\right)^4 - \left(\frac{14}{15}\right)^{12} \approx 0,322.$$

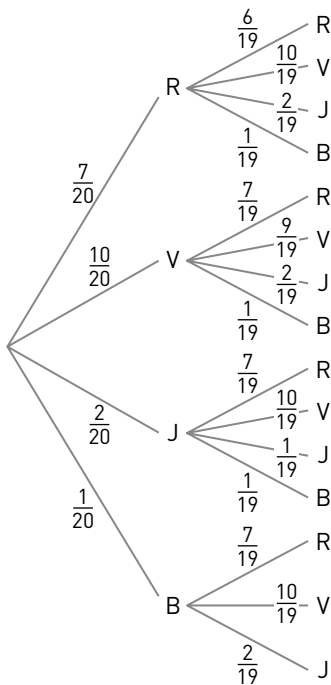
Remarque : On peut aussi remarquer que $p(5 \leq X \leq 12) = p(X \leq 12) - p(X \leq 4)$

73. On est dans le contexte d'une loi géométrique d'espérance 6 donc la probabilité d'un succès est $\frac{1}{6}$.

Probabilités conditionnelles et successions d'épreuves

74. 1. Non car chaque tirage change la composition de l'urne donc a de l'influence sur les suivants.

2. Dans l'arbre ci-après, R désigne l'obtention d'une boule rouge, V d'une boule verte, J d'une boule jaune et B d'une boule bleue.



3. a) $\frac{7}{20} \times \frac{6}{19} = \frac{21}{190} \approx 0,111$

b) $\frac{10}{20} \times \frac{2}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{10}{19} = \frac{2}{19} \approx 0,105$

c) Appelons :

J_1 l'événement : « La première boule est jaune ».

R_2 l'événement : « La deuxième boule est rouge ».

On cherche $p_{R_2}(J_1) = \frac{p(J_1 \cap R_2)}{p(R_2)}$ avec :

$$p(J_1 \cap R_2) = \frac{2}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{7}{190}$$

$$p(R_2) = \frac{7}{20} \times \frac{6}{19} + \frac{10}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{7}{19} + \frac{1}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{133}{380} = \frac{7}{20}$$

$$\text{Donc } p_{R_2}(J_1) = \frac{\frac{7}{190}}{\frac{7}{20}} = \frac{7}{190} \times \frac{20}{7} = \frac{2}{19} \approx 0,105.$$

d) Appelons :

V_1 l'événement : « La première boule est verte ».

B_2 l'événement : « La deuxième boule est bleue ».

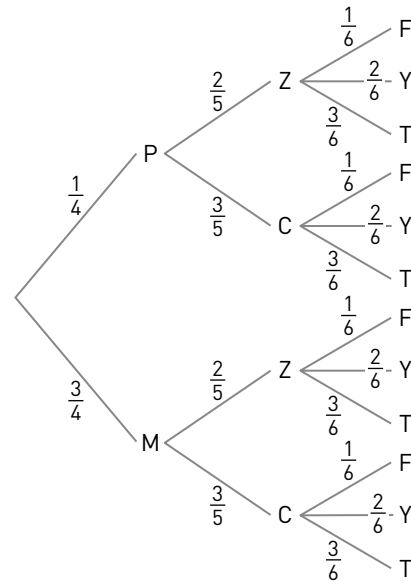
On cherche $p_{B_2}(V_1) = \frac{p(V_1 \cap B_2)}{p(B_2)}$ avec :

$$p(V_1 \cap B_2) = \frac{10}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{38}$$

$$p(B_2) = \frac{7}{20} \times \frac{1}{19} + \frac{10}{20} \times \frac{1}{19} + \frac{2}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{20}$$

$$\text{Donc } p_{B_2}(V_1) = \frac{\frac{1}{38}}{\frac{1}{20}} = \frac{1}{38} \times \frac{20}{1} = \frac{10}{19} \approx 0,526.$$

75. 1. En prenant l'initiale de chaque activité (par exemple P pour pilates) :



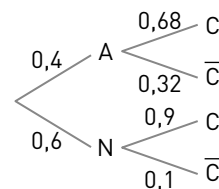
2. $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = 0,05.$

76. 1. On considère les événements suivants.

A : « La tablette est produite par l'ancienne chaîne »,

N : « La tablette est produite par la nouvelle chaîne »

C : « La tablette est commercialisable ».



2. $p(N \cap C) = 0,6 \times 0,9 = 0,54.$

3. On cherche

$$p_{\bar{C}}(N) = \frac{p(\bar{C} \cap N)}{p(\bar{C})} = \frac{0,6 \times 0,1}{0,4 \times 0,32 + 0,6 \times 0,1} = \frac{0,06}{0,188} \approx 0,319.$$

Exercices d'entraînement p. 188-189

Approfondir les lois

77. On résout $\frac{n^2 - 1}{12} = 24 \Leftrightarrow n = 17$ (car $n > 0$).

78. 1. T suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; 600\}$.

2. $p(T \geq 180) = \frac{421}{600}$

3. On cherche :

$$\begin{aligned} p_{T \geq 120}(T < 240) &= \frac{p(T \geq 120 \cap T < 240)}{p(T \geq 120)} \\ &= \frac{p(120 \leq T < 240)}{p(T \geq 120)} = \frac{\frac{120}{600}}{\frac{481}{600}} \\ &= \frac{120}{600} \times \frac{600}{481} = \frac{120}{481} \end{aligned}$$

79. 1. C suit la loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = 0,8$.

2. $[461 ; 499]$

3. a) On s'attendait à un nombre de contrats entre 461 et 499 donc le nombre de 550 est nettement plus élevé.

b) On peut penser que cette affirmation est fausse, au risque d'erreur de 5 %.

80. 1. Le graphique 1 est associée à la loi binomiale et le graphique 2 à la loi géométrique.

2. • Pour le graphique 1, l'espérance est environ 10 (axe de symétrie).

• Pour le graphique 2, appelons X la variable aléatoire associée.

Le paramètre p de la loi géométrique est

$p(X = 1)$ donc l'espérance est environ $\frac{1}{0,1} = 10$.

81. 1. La probabilité de réussir au k -ième essai est la probabilité que les $k - 1$ premiers essais soient des échecs (probabilité $1 - p$) et le k -ième un succès soit, comme les tirages sont indépendants, $p(X = k) = (1 - p)^{k-1} \times p$.

2. • $p(X \leq k)$

$$\begin{aligned} &= p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) + \dots + p(X = k) \\ &= p + (1 - p) \times p + (1 - p)^2 \times p + \dots + (1 - p)^{k-1} \times p \\ &= p(1 + (1 - p) + (1 - p)^2 + \dots + (1 - p)^{k-1}) \\ &= p \frac{1 - (1 - p)^k}{1 - (1 - p)} = p \frac{1 - (1 - p)^k}{p} = 1 - (1 - p)^k. \end{aligned}$$

• $p(X > k)$

$$\begin{aligned} &= 1 - p(X \leq k) = 1 - (1 - (1 - p)^k) \\ &= (1 - p)^k \end{aligned}$$

Triangle de Pascal

82. En « prolongeant le triangle de Pascal », on trouve :

$$\bullet \binom{7}{2} = 21 \bullet \binom{6}{5} = 6 \bullet \binom{7}{6} = 7 \bullet \binom{5}{4} = 5 \bullet \binom{7}{3} = 35$$

83.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

84. 1. On conjecture $\binom{n}{1} = n$.

2. $\binom{n}{1}$ est le nombre de chemins correspondant à 1 succès en n essais : on peut obtenir ce succès soit au premier essai, soit au deuxième essai, ... soit au n -ième essai, c'est-à-dire de n façons différentes. Ainsi $\binom{n}{1} = n$.

Intervalles de fluctuation en contexte

85. La variable aléatoire X donnant le nombre d'articles trouvés suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,8$.

1. On a :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
18	0.0095				
19	0.0256				
20	0.0611				
21	0.1287				
22	0.2392				
23	0.393				
24	0.5725				
25	0.7448				
26	0.8773				
27	0.9558				
28	0.9895				

X=18

Donc l'intervalle cherché est [19 ; 28].

2. [19 ; 30].

Donc il est sûr, au seuil de 99 %, de trouver au moins 19 articles.

86. 1. On a :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
41	0.0035				
42	0.0073				
43	0.0142				
44	0.0263				
45	0.0463				
46	0.0771				
47	0.1219				
48	0.1831				
49	0.2612				
50	0.3546				
51	0.4588				

X=41

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
52	0.5672				
53	0.672				
54	0.7658				
55	0.8436				
56	0.9028				
57	0.9442				
58	0.9707				
59	0.986				
60	0.994				
61	0.9977				
62	0.9992				

X=62

Donc l'intervalle cherché est [44 ; 59].

2. [0 ; 81]

Simulation de loix

87. 1. La loi uniforme sur {1 ; 2 ; ... ; 10}.

2. `random.randint (1,100)`

88. `random.random()` renvoie un flottant aléatoire entre 0 et 1 donc cette fonction renvoie 1 avec une probabilité 0,63 et 0 avec une probabilité 0,37 donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,63$.

```
def bernoulli (p) :
    if random.random () <= p :
        x = 1
    else :
        x = 0
    return x
```

90. `random.random()` renvoie un flottant aléatoire entre 0 et 1 donc ce programme affiche le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès lorsque l'on réalise successivement et indépendamment la même expérience de Bernoulli de paramètre 0,3.

Donc la variable aléatoire donnant la valeur n affichée suit la loi géométrique de paramètre 0,3.

Propriété de non vieillissement

$$91. a) p_{X>9}(X > 12) = p_{X>9}(X > 9 + 3) \\ = p(X > 3)$$

$$b) p_{X>6}(X \geq 10) = p_{X>6}(X > 9) \\ = p_{X>6}(X > 6 + 3) \\ = p(X > 3)$$

$$c) p_{X>5}(X \leq 8) = 1 - p_{X>5}(X > 8) \\ = 1 - p_{X>5}(X > 5 + 3) \\ = 1 - p(X > 3) = p(X \leq 3)$$

$$d) p_{X>2}(X < 20) = 1 - p_{X>2}(X > 19) \\ = 1 - p_{X>2}(X > 2 + 17) \\ = 1 - p(X > 17) \\ = p(X \leq 17)$$

92. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du trajet correspondant au premier contrôle. X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,05$.

On cherche :

$$p_{X>15}(X \geq 30) = p_{X>15}(X > 29) \\ = p_{X>15}(X > 15 + 14) \\ = p(X > 14) \\ = 0,95^{14} \approx 0,488$$

93. La variable aléatoire X donnant le rang du premier lancer où l'on obtient 6 suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

1. On cherche :

$$\begin{aligned}
 p_{X>10}(X \geq 14) &= p_{X>10}(X > 13) \\
 &= p_{X>10}(X > 10 + 3) \\
 &= p(X > 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,579
 \end{aligned}$$

2. On cherche :

$$\begin{aligned}
 p_{X>10}(X < 16) &= p_{X>10}(X \leq 15) \\
 &= 1 - p_{X>10}(X > 15) \\
 &= 1 - p_{X>10}(X > 10 + 5) \\
 &= 1 - p(X > 5) \\
 &= p(X \leq 5) \\
 &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,598.
 \end{aligned}$$

94. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier entraînement annulé.
 X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,1$.

$$1. p_{X>5}(X > 5 + 10) = p(X > 10) = 0,9^{10} \approx 0,349.$$

$$\begin{aligned}
 2. p_{X>5}(X < 13) &= p_{X>5}(X \leq 12) \\
 &= 1 - p_{X>5}(X > 12) \\
 &= 1 - p_{X>5}(X > 5 + 7) \\
 &= 1 - p(X > 7) \\
 &= p(X \leq 7) \\
 &= 1 - 0,9^7 \approx 0,522.
 \end{aligned}$$

95. 1. s et t sont positifs donc $(X > s + t) \Rightarrow (X > s)$.
 Les événements $(X > s + t) \cap (X > s)$ et $(X > s + t)$ sont donc identiques donc ils ont même probabilité.

2. Pour $s = n$ et $t = 1$, la relation de départ donne

$$\begin{aligned}
 p_{X>n}(X > n + 1) &= p(X > 1) \\
 \Leftrightarrow \frac{p((X > n) \cap (X > n + 1))}{p(X > n)} &= p(X > 1) \\
 \Leftrightarrow \frac{p(X > n + 1)}{p(X > n)} &= p(X > 1) \\
 \Leftrightarrow p(X > n + 1) &= p(X > n) \times p(X > 1).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. u_{n+1} &= p(X > n + 1) = p(X > n) \times p(X > 1) \\
 &= u_n \times p(X > 1)
 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison

$$q = p(X > 1) = 1 - p(X = 1) = 1 - p \text{ puisque } X \text{ prend ses valeurs dans } \mathbb{N}^*.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Son premier terme est } u_1 &= p(X > 1) \\
 &= 1 - p.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \text{ On a donc } u_n &= u_1 \times q^{n-1} \\
 &= (1 - p) \times (1 - p)^{n-1} \\
 &= (1 - p)^n.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. p(X = n) &= p(X > n - 1) - p(X > n) \\
 &= (1 - p)^{n-1} - (1 - p)^n \\
 &= (1 - p)^{n-1}(1 - (1 - p)) \\
 &= (1 - p)^{n-1} \times p \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

On reconnaît la loi géométrique de paramètre p .

Résolution de problèmes avec l'espérance

96. 1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,09$ et Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,05$.

$$2. E(X) = 10 \times 0,09 = 0,9 \text{ et } E(Y) = 20 \times 0,05 = 1.$$

En moyenne, on obtient un peu plus de tickets gagnants avec l'option 2.

97. 1. La variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées avec la stratégie 1 suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,1$ donc on peut espérer gagner $20 \times 0,1 = 2$ parties.

On peut donc espérer gagner $2 \times 9 = 18$ €.

2. On gagne 9 €.

3. a) 20 €

b) La variable aléatoire donnant le nombre de parties jouées suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,1$.

On peut donc espérer jouer $\frac{1}{0,1} = 10$ parties et donc dépenser 10 €.

4. Avec la stratégie 1, le gain algébrique espéré (mise comprise) est $18 - 20 = -2$ €.

Avec la stratégie 2, le gain algébrique espéré (mise comprise) est $9 - 10 = -1$ €.

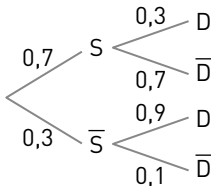
On perd donc moins avec la stratégie 2 (mais dans les deux cas, on perd à long terme).

Exercices bilan p. 190

98. Partie de pêche

A ► Calcul de probabilités

- 1. Le fait que Michaela aille pêcher le samedi a de l'influence sur le fait qu'elle y aille le dimanche donc les deux épreuves ne sont pas indépendantes.
- 2. On appelle S l'événement : « Elle va à la pêche samedi » et D l'événement : « Elle va à la pêche dimanche ». On obtient l'arbre suivant.



Soit W l'événement : « Elle va à la pêche ce week-end ».

On a $p(W) = 1 - 0,3 \times 0,1 = 0,97$.

3. On cherche

$$p_w(S) = \frac{p(W \cap S)}{p(W)} = \frac{p(S)}{p(W)} = \frac{0,7}{0,97} \approx 0,722.$$

B ► Loi géométrique

- 1. X donne le rang du premier succès : « Elle rentre après 17 h », quand on réalise successivement et indépendamment la même expérience de Bernoulli de probabilité de succès 0,4. Donc X suit la loi géométrique de paramètre 0,4.
- 2. $p(X < 4) = p(X \leq 3) = 1 - 0,6^3 = 0,784$ donc la probabilité qu'elle ne rentre pas après 17 h avant le 4^e soir est 0,784.
- 3. $p(X = 3) = 0,6^2 \times 0,4 = 0,144$
- 4. On cherche $p_{X>4}(X > 9) = p_{X>4}(X > 4 + 5) = p(X > 5) = 0,6^5 = 0,077\,76$

99. Comparaison de lois

- Soit X la variable aléatoire donnant le résultat du dé, en moyenne, on obtient $E(X) = \frac{1+8}{2} = 4,5$ (X suit la loi uniforme sur {1 ; 2 ; ... ; 8}).
 - Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de PILE, en moyenne, on obtient $E(Y) = 8 \times 0,5 = 4$ (Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,5$).
- On choisit le lancer de dé. Réponse **a**

100. Loi uniforme

Voir l'activité 1 du manuel de l'élève.

101. La planche de Galton

A ► Avec 3 étages

- 1. a) 5 € puis 10 €
- b) Dans les 3 cas (il va tout le temps à droite sauf une fois qui peut être à l'étage 1, 2 ou 3), il finit dans le réceptacle à 10€.
- 2. a) En admettant que le fait qu'il aille à droite ou à gauche à un étage n'a pas d'influence sur le fait qu'il aille à droite ou à gauche aux autres, c'est-à-dire que les directions sont indépendantes à chaque étage, et en considérant qu'un succès est l'événement « le palet va à gauche » alors X donne le nombre de succès quand on réalise $n=3$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$ donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,5$.

b) $p(X=0) = p(X=3) = 0,125$ et $p(X=1) = p(X=2) = 0,375$

```
c)
import random
gauche = 0
for i in range(3):
    if random.random() <= 0.5:
        gauche = gauche + 1
if gauche == 0:
    print("500 euros")
if gauche == 1:
    print("10 euros")
if gauche == 2:
    print("5 euros")
if gauche == 3:
    print("1000 euros")
```

d)

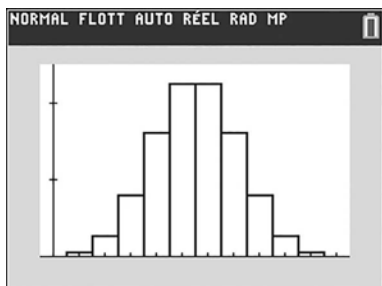
g_i	1 000	5	10	500
$p(G = g_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

B ► Avec 11 étages

- 1. Il y a 11 étages donc 1 clou au-dessus, puis 2 clous, etc. puis 11 clous à l'étage le plus bas ce qui correspond à 12 façons de tomber (un réceptacle à gauche de chacun des clous et un à droite du dernier).
- 2. a) Si la boule va 0 fois à droite, elle se retrouve dans le réceptacle 0 ; si elle va 1 fois à droite elle se retrouve dans le réceptacle 1, etc.

Le numéro du réceptacle dans lequel finit la bille est donc donné par le nombre de fois où la bille va aller à droite sur les 11 clous qu'elle va rencontrer : R suit la loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0,5$.

b) Avec la calculatrice (graduations tous les 1 en abscisse et 0,1 en ordonnée), on obtient :



c) On retrouve la forme caractéristique de la répartition des billes observée dans la vidéo.

Préparer le BAC
Je me teste

p. 192

- | | | |
|---------------|---------------|---------------|
| 102. B | 103. D | 104. B |
| 105. C | 106. A | 107. B |
| 108. B | 109. C | 110. B |

Préparer le BAC
Je révise

p. 193

111. Intervalle de fluctuation

1. X donne le nombre de succès : « L'élève mange à la cantine », lorsque l'on réalise $n = 237$ fois de manière indépendante la même expérience de Bernoulli de probabilité de succès $p = 0,93$.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 237$ et $p = 0,93$.

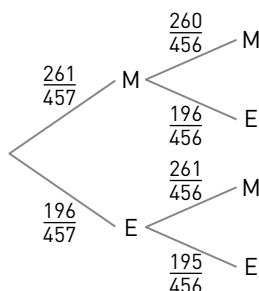
2. On cherche à trouver le plus petit entier k tel que $p(X \leq k) \geq 0,95$. La calculatrice donne $k = 227$.

3. Il faut prévoir au minimum 227 repas si l'on veut être sûr au seuil de 95 % que tous les élèves se présentant aient un repas.

112. Succession d'épreuves

1. Non car le titre joué ne peut pas être rejoué à l'étape d'après : le résultat d'une épreuve a donc de l'influence sur la suivante.

2.



$$3. a) \frac{261}{457} \times \frac{196}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{261}{456} \approx 0,491$$

(2^e et 3^e chemins)

b) Soit :

E_1 l'événement : « Le 1^{er} titre est électro ».

E_2 l'événement : « Le 2^e titre est électro ».

On cherche :

$$p_{E_2}(E_1) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \frac{\frac{196}{457} \times \frac{195}{456}}{\frac{261}{457} \times \frac{196}{456} + \frac{196}{457} \times \frac{195}{456}} \approx 0,428.$$

113. Triangle de Pascal

Voir méthode 8.

114. Comparaison de lois

• Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de succès pour la première expérience.

En moyenne, on obtient 0,25 succès (loi de Bernoulli de paramètre 0,25).

• Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de succès pour la deuxième expérience. En moyenne,

on obtient $E(Y) = 4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ succès

(Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et

$p = \frac{1}{12}$).

On choisit la deuxième expérience.

115. Loi géométrique, aspect graphique

La hauteur de la première barre est $p(X = 1) = 0,2$.
 La hauteur de la dixième barre est $p(X = 10) \approx 0,027$.
 L'allure générale est typique de la décroissance exponentielle.

116. Intervalle de fluctuation centré et loi géométrique

1. Soit A la variable aléatoire donnant le rang du premier appareil avec défaut trouvé.
 Les tirages étant assimilables à des tirages avec remise, A suit la loi géométrique de paramètre 0,02.

a) On cherche :

$$p(A \leq 30) = 1 - (1 - 0,02)^{30} \\ = 1 - 0,98^{30} \approx 0,455.$$

b) $E(A) = \frac{1}{0,02} = 50$ donc après 50 appareils.

c) On cherche :

$$p_{A>50}(A > 75) = p_{A>50}(A > 50 + 25) \\ = p(A > 25)$$

par propriété de non vieillissement.

$$\text{Donc } p_{A>50}(A > 75) = 0,98^{25} \approx 0,603.$$

$$\text{d) } p_{A>25}(A < 50) = 1 - p_{A>25}(A \geq 50) \\ = 1 - p_{A>25}(A > 49) \\ = 1 - p(A > 24) \\ = 1 - 0,98^{24} \approx 0,384$$

2. D suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,500$ et $p = 0,02$.

a) $p(D < 35) \approx 0,799$

$p(D \geq 30) \approx 0,525$

b) $[20 ; 41]$

c) Non car $40 \in [20 ; 41]$

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

Ce chapitre traite la notion de probabilité continue en présentant de nombreux exemples d'expériences aléatoires dont l'univers est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Cette notion est introduite par des activités permettant de comprendre le passage « du discret au continu » dans différentes situations (dont deux particulières : loi uniforme et loi sans vieillissement) et à l'aide de différents outils.

Ensuite les différents exercices reprennent les éléments clefs du cours que sont :

- la densité de probabilité dans le cas général qui permet de réactiver les connaissances en intégration et de représenter le calcul de probabilité comme un calcul d'aire,
- l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi à densité,
- la loi uniforme sur un intervalle sur $[0 ; 1]$ et sur un intervalle quelconque $[a ; b]$,
- la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Objectifs

- Déterminer si une fonction est une densité de probabilité.
- Calculer une probabilité.
- Calculer l'espérance d'une variable à densité.

II. Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 195

1. Calculer l'espérance et la variance

$$1. E(X) = -5 \times 0,4 + 0 \times 0,2 + 2 \times 0,3 + 12 \times 0,1 = -0,2$$

$$V(X) = 0,4 \times (-5 + 0,2)^2 + 0,2 \times (0 + 0,2)^2 + 0,3 \times (2 + 0,2)^2 + 0,1 \times (12 + 0,2)^2 = 25,56$$

2. Déterminer graphiquement une intégrale

$\int_2^8 f(x)dx$ est égale à l'aire du domaine sous la courbe de f en unités d'aire (u.a.). Or, la courbe de f est une droite, et le domaine sous la droite est un trapèze de hauteur 6 unités (= $8 - 2$), dont les bases mesurent respectivement 2 et 5 unités.

$$\mathcal{A}_{\text{(trapèze)}} = \frac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2}$$

$$= \frac{(5 + 2) \times 6}{2} = 21 \text{ u.a. donc } \int_2^8 f(x)dx = 21$$

3. Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

$$\int_1^3 (-x^2 + 10)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 10x \right]_1^3$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + 10 \times 3 \right) - \left(-\frac{1^3}{3} + 10 \times 1 \right)$$

$$= 21 - \frac{29}{3} = \frac{34}{3}$$

4. Calculer une probabilité conditionnelle

$$p(A \cap E) = p(A) + p(E) - p(A \cup E).$$

Or, tous les élèves font de l'allemand ou de l'espagnol.

$$\text{Donc } p(A \cup E) = 1$$

$$\text{Ainsi } p(A \cap E) = 0,55 + 0,57 - 1 = 0,12$$

$$p_A(E) = \frac{p(A \cap E)}{p(A)} = \frac{0,12}{0,55} = \frac{12}{55} \approx 0,22$$

Activités

p. 196-197

1. Passage du discret au continu

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** introduire la notion de probabilités continues.

A ► 1. La probabilité que son niveau de vie soit compris entre 800 € et 900 € est égale à 6,10 %, soit 0,061.

2. $7,4 + 6,5 + 5,6 + 5,5 + 4,7 + 4,2 + 3,2 + 3 = 40,1$ %
Donc la probabilité que son niveau de vie soit compris entre 1 200 € et 2 000 € est égale à 0,401.

3. $0 + 0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,6 + 2,4 + 3,4 + 4,7 + 6,1 + 7,1 = 24,8$ %

Donc 75,2 % (= $100 - 24,8$) des ménages français ont un revenu au moins égal à 1 000 €.

Donc la probabilité que son niveau de vie soit supérieur ou égal à 1000 € est égale à 0,752.

$$\mathbf{B \text{ ► } 1.} \int_a^b f(t)dt \quad \mathbf{2.} \int_{1200}^{2000} f(t)dt \approx 0,401$$

2. Choix d'un nombre aléatoire dans [0 ; 1] – (Thème 7)

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** utiliser la fonction **ALEA()** et découvrir la loi uniforme sur [0 ; 1].

1. a) $p(D = d) = \frac{1}{1000}$ car de 0 à 0,999 9 on peut dénombrer 10 000 nombres décimaux.

b) $p(Y = y) = \frac{1}{10^{10}}$ car de 0 à 0,999 999 999 9 on peut dénombrer 10^{10} nombres décimaux.

c) Il y a une infinité de nombres réels entre 0 et 1, donc on peut considérer que la probabilité d'obtenir au hasard l'un de ces nombres est nulle.

2. b) La fréquence s'obtient à l'aide de la formule indiquée dans le « coup de pouce ».

c) $p(0,25 \leq X \leq 0,5) = 0,25$

d) $p(0 \leq X \leq 0,25) = 0,25$

$p(0,85 \leq X \leq 0,9) = 0,05$

3. $p(c \leq X \leq d) = d - c$

4. La fonction constante $f : x \mapsto 0,1$ définie sur l'intervalle [0 ; 1].

3. Loi de probabilité sans mémoire – (Thème 8)

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** comprendre et démontrer la propriété d'absence de mémoire.

$$\mathbf{1. a)} \quad 10\,000 \times \left(1 - \frac{1}{100}\right) = 10\,000 \times 0,99 = 9\,900$$

La probabilité que l'ampoule ait une durée de vie supérieure ou égale à 1 mois est égale à $\frac{9\,900}{10\,000} = 0,99$.

b) Attention : on cherche la probabilité que l'ampoule ait une durée de vie supérieure ou égale à 2 mois.

$$9\,900 \times 0,99 = 9\,801$$

La probabilité que l'ampoule ait une durée de vie supérieure ou égale à 2 mois est égale à $\frac{9\,801}{10\,000} = 0,9801$.

2. Le nombre d'ampoules encore en état de fonctionnement au bout de n mois est égal à $10\,000 \times 0,99^n$.

$$\text{Donc } p(T \geq n) = \frac{10\,000 \times 0,99^n}{10\,000} = 0,99^n$$

$$\mathbf{3. a)} \quad p(T \geq 3,5) = e^{3,5 \ln 0,99} \approx 0,9654$$

$$\mathbf{b)} \quad p(T \leq 8,5) = 1 - p(T > 8,5) = 1 - e^{8,5 \ln 0,99} \approx 0,0819$$

$$\mathbf{4.} \quad p_{T \geq 8,5}(T \geq 12) = \frac{p(T \geq 8,5 \text{ et } T \geq 12)}{p(T \geq 8,5)} = \frac{p(T \geq 12)}{p(T \geq 8,5)} \approx \frac{0,886385}{0,918119} \approx 0,9654$$

Cela donne le même résultat que $p(T \geq 3,5)$.

$$\begin{aligned} p_{(T>t)}(T > t+h) &= \frac{p((T > t) \cap (T > t+h))}{p(T > t)} \\ &= \frac{p(T > t+h)}{p(T > t)} \\ &= \frac{e^{(t+h) \ln 0,99}}{e^{t \ln 0,99}} \\ &= e^{(t+h) \ln 0,99 - t \ln 0,99} \\ &= e^{h \ln 0,99} = p(X > h) \end{aligned}$$

À vous de jouer !

p. 199-207

1. 1. g est une fonction polynôme donc continue sur $[0 ; 1]$. Pour tout réel x , on a $3x^2 \geq 0$.

Donc la fonction g est positive sur $[0 ; 1]$.

$$\int_0^1 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1.$$

Donc g est une densité de probabilité sur $[0 ; 1]$.

$$\begin{aligned} 2. p(X \geq 0,25) &= \int_{0,25}^1 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_{0,25}^1 \\ &= 1^3 - 0,25^3 = 0,984\,375 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(0,5 \leq X \leq 0,75) &= \int_{0,5}^{0,75} 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_{0,5}^{0,75} \\ &= 0,75^3 - 0,5^3 = 0,296\,875 \end{aligned}$$

2. 1. f est une fonction continue et positive sur $[0 ; 2]$. De plus, le domaine situé sous la courbe de f sur l'intervalle $[0 ; 2]$ est un triangle rectangle dont les deux côtés adjacents à l'angle droit mesurent respectivement 2 unités et 1 unité, donc son aire est égale à $\frac{2 \times 1}{2} = 1$ u.a.

Ainsi la fonction f est une densité de probabilité sur $[0 ; 2]$.

2. La fonction linéaire f est définie sur $[0 ; 2]$ par $f(x) = 0,5x$.

$$p(X < 1) = \int_0^1 0,5x dx = \left[0,25x^2 \right]_0^1 = 0,25$$

$$\begin{aligned} p(0,5 \leq X \leq 1,5) &= \int_{0,5}^{1,5} 0,5x dx = \left[0,25x^2 \right]_{0,5}^{1,5} \\ &= 0,25 \times 1,5^2 - 0,25 \times 0,5^2 = 0,5 \end{aligned}$$

3. 1. F est la primitive de f sur $[0 ; 2]$ qui s'annule en 0. Or les primitives de f sont de la forme

$$F(x) = \frac{x^2}{4} + c \text{ où } c \text{ est un réel.}$$

Or $F(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$. Donc la fonction de répartition F est définie sur $[0 ; 2]$ par $F(x) = \frac{x^2}{4}$.

$$2. F(1,5) - F(0,5) = \frac{1,5^2}{4} - \frac{0,5^2}{4} = \frac{1}{2}$$

Cela signifie que $p(0,5 \leq X \leq 1,5) = \frac{1}{2}$.

4. 1. f est une fonction polynôme donc f est continue sur $[-1 ; 0]$, et admet des primitives sur $[-1 ; 0]$ de la forme :

$$F(x) = x^3 + c \text{ où } c \text{ est un réel.}$$

$$F(-1) = 0 \Leftrightarrow c = 1.$$

Donc la fonction de répartition F est définie sur $[-1 ; 0]$ par $F(x) = x^3 + 1$.

2. $F(0) = 1$ cela signifie que $p(X \leq 0) = 1$.

3. Attention : on cherche à calculer $F(-0,2) - F(-0,5)$.

$$F(-0,2) = (-0,2)^3 + 1 = 0,992$$

$$F(-0,5) = (-0,5)^3 + 1 = 0,875$$

$$F(-0,2) - F(-0,5) = 0,117$$

$$\text{Donc } p(-0,5 \leq X \leq -0,2) = 0,117$$

$$\begin{aligned} 5. E(X) &= \int_0^2 (x \times 0,5x) dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^2 = \frac{2^3}{6} - \frac{0^3}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_0^2 x^2 \times 0,5x dx - \left(\frac{4}{3} \right)^2 \\ &= \int_0^2 \frac{1}{2} x^3 dx - \frac{16}{9} = \left[\frac{x^4}{8} \right]_0^2 - \frac{16}{9} \\ &= \frac{2^4}{8} - \frac{0^4}{8} - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. E(X) &= \int_0^1 x \times 3x^2 dx = \int_0^1 3x^3 dx \\ &= \left[\frac{3x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_0^1 x^2 \times 3x^2 dx - \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \int_0^1 3x^4 dx - \frac{9}{16} \\ &= \left[\frac{3x^5}{5} \right]_0^1 - \frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80} \end{aligned}$$

$$7. 1. p\left(T < \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{ car } 20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ heure.}$$

$$2. p\left(T > \frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$8. 1. p(X > 0,279\,735\,6) = 1 - 0,279\,735\,6 = 0,720\,264\,4$$

La probabilité que Lilia gagne la partie est égale à environ 0,72.

$$2. p(X < 0,996\,942\,7) = 0,996\,942\,7.$$

Donc la probabilité que Lilia gagne encore est égale à environ 0,997.

$$9. 1. p(X > 3) = \frac{10 - 3}{10 - 0} = \frac{7}{10}$$

$$p(2 \leq X \leq 7) = \frac{7 - 2}{10 - 0} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$2. E(X) = \frac{0 + 10}{2} = 5$$

$$V(X) = \frac{(10 - 0)^2}{12} = \frac{100}{12} = \frac{25}{3}$$

$$10. 1. p(X \geq -1) = \frac{4 - (-1)}{4 - (-4)} = \frac{5}{8}$$

$$p(X \in [-3; 3]) = \frac{3 - (-3)}{4 - (-4)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$2. E(x) = \frac{-4 + 4}{2} = 0$$

$$V(X) = \frac{(4 - (-4))^2}{12} = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

11. 1. D suit la loi uniforme sur l'intervalle $[24; 72]$.

$$a) p(X < 24) = 0$$

$$b) p(X > 48) = \frac{72 - 48}{72 - 24} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$2. E(X) = \frac{24 + 72}{2} = 48.$$

Donc en moyenne le colis sera livré en 48 h.

$$12. a) p(X \leq 462) = \frac{462 - 400}{670 - 400} = \frac{62}{270} = \frac{31}{135}$$

$$b) p(600 \leq X \leq 625) = \frac{625 - 600}{670 - 400} = \frac{25}{270} = \frac{5}{54}$$

$$13. a) p(X \leq 5) = 1 - e^{-0,1 \times 5} \approx 0,393\,5$$

$$b) p(10 < X < 20) = e^{-0,1 \times 10} - e^{-0,1 \times 20} \approx 0,232\,5$$

$$c) p_{X>6}(X \geq 16) = p_{X>6}(X \geq 6 + 10) = p(X \geq 10) = e^{-0,1 \times 10} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,367\,9$$

$$d) E(X) = \frac{1}{0,1} = 10$$

$$14. a) p(X > 50) = e^{-0,02 \times 50} \approx 0,367\,9$$

$$b) p(X \in [5; 75]) = e^{-0,02 \times 5} - e^{-0,02 \times 75} \approx 0,681\,7$$

$$c) p_{X>50}(X \geq 80) = p(X \geq 30) = e^{-0,02 \times 30} \approx 0,548\,8$$

$$d) E(X) = \frac{1}{0,02} = 50.$$

15. 1. Soit D la durée de vie, $E(D) = 10$ d'après l'énoncé.

$$\text{Donc } \frac{1}{\lambda} = 10 \Leftrightarrow \lambda = 0,1.$$

$$2. p(D \leq 4) = 1 - e^{-0,1 \times 4} \approx 0,329\,7$$

$$p_{X>10}(X > 10 + 5) = p(X > 5) = e^{-0,1 \times 5} \approx 0,606\,5$$

$$16. 1. a) p(A < 18) = 1 - e^{-\frac{18}{16}} \approx 0,675$$

$$b) p(A > 60) = e^{-\frac{60}{16}} \approx 0,024$$

$$2. E(A) = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

Donc l'âge moyen est 16 ans.

$$17. 1. \int_x^0 e^t dt = \left[e^t \right]_x^0 = e^0 - e^x = 1 - e^x$$

2. On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Donc, par soustraction des limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^x = 1.$$

3. La fonction exponentielle est continue est positive sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $I =]-\infty ; 0]$.

D'après les questions 1. et 2., $\int_1 g(t) dt = 1$.

Donc g est une densité de probabilité sur I .

$$4. p(X > -4) = \int_{-4}^0 e^t dt = \left[e^t \right]_{-4}^0 = e^0 - e^{-4} \\ = 1 - e^{-4} \approx 0,9817$$

18. 1. La fonction h est une fonction rationnelle continue et positive sur I .

$$\text{De plus } \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1$$

$$\text{Or } \lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{1}{b} = 0.$$

$$\text{Donc, par addition des limites, } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b h(x) dx = 1.$$

h est donc une densité de probabilité sur $I = [1 ; +\infty[$.

$$2. a) p(Y \geq 5) = 1 - p(Y < 5) = 1 - \int_1^5 \frac{1}{x^2} dx \\ = 1 - \left[-\frac{1}{x} \right]_1^5 = 1 - \left(-\frac{1}{5} + 1 \right) = \frac{1}{5}$$

$$b) E(Y) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x \times \frac{1}{x^2} dx.$$

$$\text{Or } \int_1^b x \times \frac{1}{x^2} dx = \int_1^b \frac{1}{x} dx = \left[\ln(x) \right]_1^b = \ln(b).$$

$$\text{Donc } E(Y) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(b) = +\infty.$$

$$19. p(Y \geq 10) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow -10\lambda = \ln \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0,4}{-10} \approx 0,0916$$

$$20. p(X \leq 2) = 0,75$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 0,75$$

$$\Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0,25$$

$$\Leftrightarrow -2\lambda = \ln 0,25$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0,25}{-2} \approx 0,69$$

$$21. 1. p(T \leq 1) = 0,1$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda} = 0,1$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda} = 0,9$$

$$\Leftrightarrow -\lambda = \ln 0,9$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\ln 0,9 \approx 0,11$$

$$2. E(T) = \frac{1}{0,11} \approx 9$$

La durée de vie moyenne d'une calculatrice est 9 ans.

$$22. V(X) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{(b-1)^2}{12} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (b-1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow b-1 = 2 \text{ ou } b-1 = -2$$

$$\Leftrightarrow b = 3 \text{ ou } b = -1.$$

D'après l'énoncé b est supérieur à 1, donc $b = 3$.

23. Si $f(x) = \frac{1}{10}$ est la densité de la loi uniforme sur

$[a ; b]$ alors $\frac{1}{10} \times (b-a) = 1$ soit $b-a = 10$.

D'autre part $E(X) = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow a+b = 4.$$

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} b-a=10 \\ a+b=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=10+a \\ a+10+a=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=10+a \\ 2a=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=7 \end{cases}$$

Exercices

apprendre à démontrer

p. 208

Pour s'entraîner

1^{re} étape : Montrons que f est continue sur I .

La fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est de la forme e^u où u est la fonction affine $u : t \mapsto \lambda t$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur I inclus dans $\mathbb{R}$.

Or, on sait que si u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction e^u est dérivable sur I .

La fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est donc dérivable sur I .

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I et λ étant une constante, on en déduit que la fonction $f : t \mapsto \lambda e^{\lambda t}$ est continue sur I .

2^e étape : Montrons que f est positive sur I .

D'une part, on sait que λ est un nombre strictement positif sur I , c'est la condition donnée dans la propriété.

D'autre part, on sait que, quel que soit le nombre réel X , e^X est strictement positif.

Donc $e^{\lambda t} > 0$.

Le produit $\lambda e^{\lambda t}$ est donc strictement positif sur $\mathbb{R}$ et donc, en particulier, sur l'intervalle I .

3^e étape : Montrons que l'intégrale de f sur I est égale à 1.

Le calcul de cette intégrale se fait en deux temps :

- On commence par calculer l'intégrale de f de x à 0, $\int_x^0 \lambda e^{\lambda t} dt$, où x est un réel négatif : si on pose $u(t) = \lambda t$, on a alors $u'(t) = \lambda$.

La fonction $f : t \mapsto \lambda e^{\lambda t}$ est donc de la forme $u'(t)e^{u(t)}$ qui admet pour primitive $e^{u(t)}$.

Donc f admet pour primitive la fonction $F : t \mapsto e^{\lambda t}$.

Ainsi on a $\int_x^0 \lambda e^{\lambda t} dt = \left[e^{\lambda t} \right]_x^0 = e^{\lambda \times 0} - e^{\lambda \times x} = 1 - e^{\lambda x}$.

- On étudie ensuite la limite de cette intégrale lorsque x tend vers $+\infty$.

Comme $\lambda > 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \lambda x = -\infty$

Et on sait que : $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$.

Donc, par composition des limites, on obtient : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\lambda x} = 0$.

Donc par soustraction des limites, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - e^{\lambda x} = 1 \text{ c'est-à-dire } \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 f(t) dt = 1.$$

Exercices

calculs et automatismes

p. 209

24. Calculer des probabilités (1)

a) $p(X \geq 0) = p(X \in [0 ; 10]) = 1$

b) $p(X = 2) = 0$

c) $p(X < 8) = 1 - p(X \geq 8) = 1 - 0,1 = 0,9$

d) $p(3 \leq X \leq 8) = 1 - p(X > 8) - p(X < 3)$
 $= 1 - 0,1 - 0,2 = 0,7$

25. Calculer des probabilités (2)

a) $p(X \leq 7) = \int_1^7 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^7 f(x) dx$
 $= 0,14 + 0,48 = 0,62$

b) $p(3 < X \leq 9) = 1 - p(X \leq 3) = 1 - \int_1^3 f(x) dx$
 $= 1 - 0,14 = 0,86$

26. Densité de probabilités

Vrai. f est une densité de probabilité sur $[-1 ; 2]$. En effet, sur l'intervalle $[-1 ; 2]$, f est positive, continue et l'aire du domaine sous sa courbe est égale à 1 u.a. (ce qui correspond à 4 carreaux).

27. Densité sur un intervalle

Réponse **b**

28. Identifier une probabilité

Réponse **a**

29. Loi uniforme et simulation

1. X suit la loi uniforme sur $[0 ; 1]$.

2. $p(0,584 \leq X \leq 0,992) = 0,992 - 0,584 = 0,408$

3. $E(X) = \frac{1}{2}$

30. Loi uniforme

1. La fonction de densité associée à X est la fonction constante définie sur $[0 ; 10]$ par $f : x \mapsto \frac{1}{10}$.

2. a) $p(X > 9) = \frac{10 - 9}{10 - 0} = \frac{1}{10}$

b) $p(X \in [1 ; 4]) = \frac{4 - 1}{10 - 0} = \frac{3}{10}$

c) $p(X \leq 2) = \frac{2 - 0}{10 - 0} = \frac{1}{5}$

31. Loi uniforme et coût

Soit R le prix du repas, R est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[7 ; 9,5]$.

$$1. p(R < 8,2) = \frac{8,2 - 7}{9,5 - 7} = \frac{1,2}{2,5} = 0,48$$

$$2. p(R > 9) = \frac{9,5 - 9}{9,5 - 7} = \frac{0,5}{2,5} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$3. E(R) = \frac{7 + 9,5}{2} = 8,25.$$

En moyenne, son repas coûte 8,25 €.

32. Loi exponentielle (1)

1. λ est l'ordonnée à l'origine de la courbe et vaut donc 4.

$$2. E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}.$$

33. Loi exponentielle (2)

$$1. \lambda = \frac{1}{E(Y)} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

$$2. a) p(Y > 25) = e^{-0,05 \times 25} = e^{-1,25} \approx 0,286 5$$

$$b) p(Y \in [5 ; 15]) = e^{-0,05 \times 5} - e^{-0,05 \times 15} \\ = e^{-\frac{1}{4}} - e^{-\frac{3}{4}} \approx 0,306 4$$

$$c) p(Y \leq 20) = 1 - e^{-0,05 \times 20} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,632 1$$

34. Durée de vie d'un composant électronique

$$a) p(D > 1) = 1 - p(D \leq 1) = 1 - 0,1 = 0,9$$

$$b) p_{D>5}[D > 5 + 1] = p(D > 1) = 0,9$$

35. Loi exponentielle (3)

1. **Faux.** La fonction de densité associée à cette loi est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = 0,05e^{0,05t}.$$

En effet, $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} = 0,05e^{-0,05t}$.

2. **Vrai.** L'espérance de X est 20.

3. **Vrai.** La probabilité que X soit supérieure

à 100 est égale à $\frac{1}{e^5}$.

$$\text{En effet, } p(X > 100) = e^{-0,05 \times 100} = e^{-5} = \frac{1}{e^5}.$$

Exercices d'application

p. 210-211

Densité de probabilité et calcul de probabilité

36. 1. La fonction $f : x \mapsto 2$ est une fonction constante positive et continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur l'intervalle I . De plus :

$$\int_2^{5,5} 2dx = \left[2x \right]_2^{5,5} = 2 \times 5,5 - 2 \times 2 = 11 - 4 = 7$$

Donc la fonction f est bien une densité de probabilité sur I .

$$2. p(X \in [5,1 ; 5,3]) = \int_{5,1}^{5,3} 2dx = 2x \Big|_{5,1}^{5,3} \\ = 2 \times 5,3 - 2 \times 5,1 \\ = 10,6 - 10,2 = 0,4$$

37. 1. g est une fonction linéaire continue et positive sur $I = [0 ; \sqrt{2}]$.

$$\int_0^{\sqrt{2}} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} - 0 = 1$$

Donc g est une densité de probabilité sur I .

$$2. p(X \leq 1) = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

38. 1. h est la fonction inverse, continue et positive sur $I = [1 ; e]$.

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln x \right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1.$$

Donc h est une densité de probabilité sur I .

$$2. p(X > 2) = \int_2^e \frac{1}{x} dx = \left[\ln x \right]_2^e = \ln e - \ln 2 \\ = 1 - \ln 2 \approx 0,307$$

39. f est une fonction polynôme continue et positive sur $I = [1 ; 2]$.

$$\text{De plus, } \int_1^2 \frac{3}{7} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{7} \right]_1^2 = \frac{8}{7} - \frac{1}{7} = 1.$$

Donc f est une densité de probabilité sur I .

40. Attention : il faut lire la fonction $g(x) = x - \frac{7}{6}$.

$$1. \int_0^3 x - \frac{7}{6} dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{7}{6}x \right]_0^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{7}{2} - 0 = 1$$

2. La fonction g est négative lorsque $x < \frac{7}{6}$ donc g n'est pas une densité de probabilité sur I .

41. La courbe de la fonction f est tracée de manière continue et est située au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1 ; 3]$, donc f est continue et positive sur $[1 ; 3]$.

De plus $\int_1^3 f(x) dx$ est égale à l'aire du « triangle » sous la courbe soit 1 u.a.

Donc f est une densité de probabilité sur $[1 ; 3]$.

42. 1. Non car g est négative sur $[0 ; 1]$.

2. Oui car g est continue, positive sur $[1 ; 2]$ et $\int_1^2 g(x) dx$ est égale à l'aire du « triangle » sous la courbe soit 1 u.a.

43. 1. h est une fonction continue et positive sur $[0 ; 3]$. Le « domaine sous la courbe » est constitué de deux trapèzes de même aire égale à :

$$\frac{(0,5 + 0,25) \times 1}{2} = \frac{0,75}{2} \text{ u.a.}$$

et d'un rectangle central d'aire 0,25 u.a.

Donc l'aire du « domaine sous la courbe » est

$$\text{égale à } 2 \times \frac{0,75}{2} + 0,25 = 1 \text{ u.a.}$$

Cela signifie que : $\int_0^3 h(x) dx = 1$

$$2. p(X \leq 2) = \int_0^2 h(x) dx = \int_0^1 h(x) dx + \int_1^2 h(x) dx = 0,375 + 0,25 = 0,625$$

car $\int_0^1 h(x) dx = \text{aire du trapèze}$

et $\int_1^2 h(x) dx = \text{aire du rectangle.}$

$$44. a) p(X \geq 6) = \int_6^{12} 0,1 dx = \left[0,1x \right]_6^{12} = 1,2 - 0,6 = 0,6$$

$$b) p(X \in [3 ; 10]) = \int_3^{10} 0,1 dx = \left[0,1x \right]_3^{10} = 1 - 0,3 = 0,7$$

45. 1. F est la primitive de f qui s'annule en 0.

$$\text{Donc } F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x.$$

$$2. F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

Cela signifie que $p\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$.

46. Attention : il faut lire la fonction

$$f(x) = \frac{3}{14}(x^2 - x) \text{ sur } [1 ; 3] \text{ et } X \text{ sur } [1 ; 3].$$

1. F est la primitive de f qui s'annule en 1.

$$F(x) = \frac{3}{14} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{28}$$

2. **Attention :** il faut calculer $F(2)$.

$$F(2) = \frac{5}{28}$$

Cela signifie que $p(X \leq 2) = \frac{5}{28}$.

$$47. a) p(X \leq 1) = \int_{\frac{2}{3}}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{\frac{2}{3}}^1 = \frac{1}{2}$$

$$b) p\left(1 < X < \frac{5}{3}\right) = \int_1^{\frac{5}{3}} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5}$$

48. À l'aide des aires sous la courbe, on détermine :

$$1. p(X \in [0 ; 1]) = 0,25$$

$$2. p(X \in [1 ; 2]) = 0,75$$

$$3. p(X \in [0,5 ; 1,5]) = 0,5$$

49. Le domaine gris a une aire égale à 0,34.

Donc :

a) $p(X > 1,5) = 0,47$

b) $p(X \leq 4) = 0,87$

c) $p(1,5 \leq X \leq 4) = 0,34$

50. a) $p(X \in [0 ; 1]) = 0,375$

b) $p(X \in [1 ; 2]) = 0,25$

c) $p(X \in [2 ; 3]) = 0,375$

Espérance et variance d'une variable aléatoire

51. a) $E(X) = \int_5^{5,5} 2x dx = \left[x^2 \right]_5^{5,5} = 5,5^2 - 5^2 = 30,25 - 25 = 5,25$

$$V(X) = \int_5^{5,5} 2x^2 dx - 5,25^2 = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_5^{5,5} = \frac{2 \times 5,5^3}{3} - \frac{2 \times 5^3}{3} = \frac{1331}{12} - \frac{250}{3} = \frac{331}{12} \approx 27,6$$

b) $E(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$V(X) = \int_0^{\sqrt{2}} x^3 dx - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} - \frac{8}{9} = \frac{\sqrt{2}^4}{4} - \frac{0^4}{4} - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

c) $E(X) = \int_1^e 1 dx = [x]_1^e = e - 1$

$$V(X) = \int_1^e x dx - (e - 1)^2 = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{e^2 - 1}{2}$$

$$V(X) = \int_1^e x dx - (e - 1)^2 = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1^2}{2} - (e - 1)^2 = \frac{(e - 1)(3 - e)}{2}$$

52. $E(X) = \int_{\frac{1}{2}}^1 x \times \frac{1}{x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 2$

$$V(X) = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \times \frac{1}{x^2} dx - E^2(X) = \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx - (\ln 2)^2 = \left[x \right]_{\frac{1}{2}}^1 - (\ln 2)^2 = \frac{1}{2} - (\ln 2)^2$$

Loi uniforme

53. 1. $p(X > 0,2) = 1 - 0,2 = 0,8$

2. $p\left(\frac{1}{3} < X < \frac{4}{7}\right) = \frac{4}{7} - \frac{1}{3} = \frac{5}{21}$

3. $E(X) = \frac{1}{2}$ et $V(X) = \frac{1}{12}$

54. Soit D la variable aléatoire qui donne la distance, en km, parcourue par Wissam avant de retrouver son gant.

D suit la loi uniforme sur $[0 ; 1]$.

a) $p(0 < X < 0,5) = 0,5$

b) $p(X > 0,25) = 0,75$

55. a) $p(N = 150) = 0$

b) $p(120 < N < 125) = \frac{1}{11}$

c) $p(N < 170) = \frac{10}{11}$

56. 1. a) $p\left(T = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) = 0$

b) $p\left(T \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]\right) = \frac{1}{2}$

c) $p\left(T < \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{12}$

d) $p\left(T \geq \frac{8}{9}\right) = 0$

2. $E(T) = \frac{5}{9}$ et $V(T) = \frac{1}{27}$

57. Soit T le temps d'attente, en heures, de la mère de Julie, T est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0 ; 1]$.

$$1. p\left(T < \frac{10}{60}\right) = \frac{1}{6}$$

$$2. p(T > 0,25) = 0,75$$

3. $E(T) = 0,5$. En moyenne, sa mère attend pendant une demi-heure.

58. Soit T le temps de courses de Pierre, en minutes, T est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[70 ; 105]$. Pour qu'il ait fini ses courses avant 13 h 00, Pierre doit mettre moins de 95 min.

$$p(T < 95) = \frac{95 - 70}{105 - 70} = \frac{5}{7}.$$

Loi exponentielle

$$59. 1. a) p(Y \in [0 ; 6]) = p(Y \leq 6) = 1 - e^{-0,4 \times 6} \\ = 1 - e^{-2,4} \approx 0,909 2$$

$$b) p(Y \in [3 ; +\infty[) = p(Y \geq 3) = e^{-0,4 \times 3} \\ = e^{-1,2} \approx 0,301 2$$

$$c) p(Y \in]1 ; 2]) = e^{-0,4 \times 1} - e^{-0,4 \times 2} \\ = e^{-0,4} - e^{-0,8} \approx 0,221 0$$

$$d) p(Y \in]1 ; 2] \cup [3 ; +\infty[) = e^{-0,4} - e^{-0,8} + e^{-1,2} \\ \approx 0,522 2$$

$$2. p_{Y>5}(Y > 15) = p_{Y>5}(Y > 5 + 10) \\ = p(Y > 10) = e^{-0,4 \times 10} \\ = e^{-4} \approx 0,018 3$$

$$3. E(Y) = \frac{1}{0,4} = 2,5$$

$$60. 1. \lambda = 2$$

$$2. a) p(X \leq 0,8) = 0,80$$

$$b) p(X > 1) = 0,14$$

$$c) p(0,1 < X < 0,2) = 0,15$$

$$3. p_{X>0,5}(X \geq 2) = p(X \geq 1,5) = e^{-3} \approx 0,05$$

$$61. 1. p(T > 8) = e^{-0,09 \times 8} = e^{-0,72} \approx 0,49$$

$$2. p_{T>5}(T > 10) = p(T > 5) = e^{-0,45} \approx 0,64$$

$$3. E(T) = \frac{1}{0,09} \approx 11. \text{ La durée de vie moyenne d'un } \\ \text{appareil est d'environ 11 ans.}$$

Exercices d'entraînement

p. 212-215

Loi à densité

62. a) Vrai.

La fonction h est continue et positive sur $I = [-2 ; -1]$.

$$\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2} dx = \left[-\frac{2}{x} \right]_{-2}^{-1} = -\frac{2}{-1} + \frac{2}{-2} = 1.$$

b) Vrai.

La fonction g est continue et positive sur $J = [0 ; \ln 2]$.

$$\int_0^{\ln 2} 2e^{-x} dx = [-2e^{-x}]_0^{\ln 2} = -2e^{-\ln 2} + 2e^0 \\ = -2 \times \frac{1}{2} + 2 = 1$$

63. 1. La fonction F est dérivable sur $I =]0 ; +\infty[$ par produit et somme de fonctions dérivables sur I .

$$F'(x) = (x \times \ln x)' - (x)' \\ = (x)' \times \ln x + x \times (\ln x)' - (x)' \\ = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x = f(x)$$

Ainsi F est bien une primitive de f sur I .

2. f est continue et positive sur $[1 ; e]$.

$$\int_1^e f(x) dx = F(e) - F(1) \\ = (e \ln e - e) - (1 \times \ln 1 - 1) = 1$$

Donc f est bien une densité de probabilité sur $[1 ; e]$.

64. 2. La courbe représente une fonction f continue et positive sur $[0 ; 2]$.

Soit $\mathcal{D}$ le domaine sous la courbe entre 0 et 2. $\mathcal{D}$ est constitué de 16 carreaux d'aire :

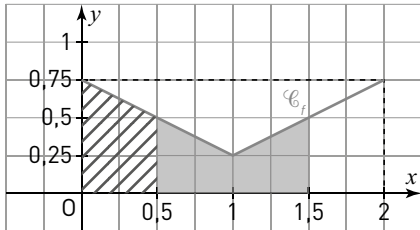
$$0,25 \times 0,25 = 0,062 5 \text{ u.a.}$$

$$\int_0^2 f(x) dx = \mathcal{A}_{\mathcal{D}} = 16 \times 0,062 5 = 1 \text{ u.a.}$$

Donc f est une densité de probabilité sur $[0 ; 2]$.

3. $p\left(X \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]\right)$ est l'aire du domaine en gris.

$p\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$ est l'aire du domaine hachuré.



4. $p\left(X \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]\right) = 0,375$ et $p\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = 0,3125$

65. 1. f est continue et positive sur I .

$$\int_2^5 \frac{x^2}{39} dx = \left[\frac{x^3}{117} \right]_2^5 = \frac{125}{117} - \frac{8}{117} = 1$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } p(X > 3) &= \int_3^5 \frac{x^2}{39} dx = \left[\frac{x^3}{117} \right]_3^5 = \frac{125}{117} - \frac{27}{117} \\ &= \frac{98}{117} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } p(3 \leq X \leq 4) &= \int_3^4 \frac{x^2}{39} dx = \left[\frac{x^3}{117} \right]_3^4 = \frac{64}{117} - \frac{27}{117} \\ &= \frac{37}{117} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. E(X) &= \int_2^5 \frac{x^3}{39} dx = \left[\frac{x^4}{156} \right]_2^5 = \frac{625}{156} - \frac{16}{156} \\ &= \frac{203}{52} \approx 3,9 \end{aligned}$$

66. 1. Comme f est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Donc $p(X \geq 0) = p(X \leq 0) = 0,5$

et $p(-1 \leq X \leq 0) = 0,5 - 0,16 = 0,34$.

2. $p(-1 \leq X \leq 2) = 2 \times 0,34 + 0,14 = 0,82$

67. Attention : $I = \left[\frac{1}{4}; \frac{25}{4}\right]$

1. f est continue et positive sur I .

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{25}{4}} \frac{1}{4\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sqrt{x}}{2} \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{25}{4}} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } p(X > 2) &= \int_2^{\frac{25}{4}} \frac{1}{4\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sqrt{x}}{2} \right]_2^{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,54 \end{aligned}$$

$$\text{b) } p(X < 1) = \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{4\sqrt{x}} dx = \left[\frac{\sqrt{x}}{2} \right]_{\frac{1}{4}}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ a) } G'(x) &= \frac{1}{6} \times \sqrt{x} + \frac{1}{6} x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{6} + \frac{x}{12\sqrt{x}} \\ &= \frac{2x}{12\sqrt{x}} + \frac{x}{12\sqrt{x}} = \frac{3x}{12\sqrt{x}} = \frac{x}{4\sqrt{x}} = g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } E(X) &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{25}{4}} x \times \frac{1}{4\sqrt{x}} dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{25}{4}} g(x) dx = G\left(\frac{25}{4}\right) - G\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{25}{4} \times \sqrt{\frac{25}{4}} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{31}{12} \end{aligned}$$

Le temps moyen passé sur les réseaux sociaux est de 2 h 35 min par jour (car $\frac{31}{12}$ h = 155 min)

Loi de probabilité sur $[a; +\infty[$ ou sur $]-\infty; a]$

68. 1. $x^a > 0$ sur $I = [1; +\infty[$.

Donc la fonction rationnelle g est continue et strictement positive sur I .

$$\text{Soit } a \in I, \int_1^a \frac{3}{x^4} dx = \left[-\frac{1}{x^3} \right]_1^a = -\frac{1}{a^3} + \frac{1}{1^3} = 1 - \frac{1}{a^3}.$$

$$\text{Or } \lim_{a \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{a^3} = 1. \text{ Donc } \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a g(x) dx = 1.$$

La fonction g est donc une densité de probabilité sur I .

$$2. E(X) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a x \times \frac{3}{x^4} dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{3}{x^3} dx$$

$$\text{Or } \int_1^a \frac{3}{x^3} dx = \left[-\frac{3}{2x^2} \right]_1^a = -\frac{3}{2a^2} + \frac{3}{2}.$$

$$\text{Et on sait que } \lim_{a \rightarrow +\infty} -\frac{3}{2a^2} = 0.$$

Donc par addition des limites, on a :

$$E(X) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{3}{x^3} dx = \frac{3}{2}.$$

69. 1. Quel que soit le réel a , la fonction h est continue et positive sur $I = [a ; +\infty[$.

$$\int_a^b e^{-0,1x} dx = \left[-10e^{-0,1x} \right]_a^b = 10(e^{-0,1a} - e^{-0,1b}).$$

$$\text{Or } \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-0,1b} = 0. \text{ Donc } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b h(x) dx = 10e^{-0,1a}.$$

$$10e^{-0,1a} = 1 \Leftrightarrow e^{-0,1a} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow -0,1a = \ln \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow a = 10 \ln 10$$

Donc h est une densité de probabilité sur $I = [10 \ln 10 ; +\infty[$.

$$2. a) G'(x) = -10 \times e^{-0,1x} + (-10x - 100) \times (-0,1) \times e^{-0,1x} \\ = e^{-0,1x}(-10 + x + 10) = g(x)$$

$$b) E(X) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{10 \ln 10}^b x e^{-0,1x} dx.$$

$$\text{Or, } \int_{10 \ln 10}^b x e^{-0,1x} dx = \int_{10 \ln 10}^b g(x) dx = G(b) - G(10 \ln 10) \\ = (-10b - 100)e^{-0,1b} - (-100 \ln 10 - 100)e^{-\ln 10} \\ = -10be^{-0,1b} - 100e^{-0,1b} + 10 \ln 10 + 10$$

On pose $X = -0,1b$.

$$\text{On a } \lim_{b \rightarrow +\infty} X = -\infty$$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} -100e^{-0,1b} = \lim_{X \rightarrow -\infty} -100e^X = 0$$

$$\text{et } \lim_{b \rightarrow +\infty} -10be^{-0,1b} = \lim_{X \rightarrow -\infty} 100Xe^X = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{10 \ln 10}^b x e^{-0,1x} dx = 10 \ln 10 + 10$$

c'est-à-dire $E(X) = 10 \ln 10 + 10$

70. 1. x^3 est négatif sur I , donc $\frac{-9}{2x^3}$ est positif sur I .

La fonction rationnelle f est donc continue et positive sur I .

$$\int_a^{\frac{-3}{2}} \frac{-9}{2x^3} dx = \left[\frac{9}{4x^2} \right]_a^{\frac{-3}{2}} = 1 - \frac{9}{4a^2} \text{ Donc } \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\frac{-3}{2}} f(x) dx = 1.$$

$$2. E(X) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{\frac{-3}{2}} x f(x) dx$$

$$\text{Or } \int_a^{\frac{-3}{2}} -\frac{9}{2x^2} dx = \left[\frac{9}{2x} \right]_a^{\frac{-3}{2}} = -3 - \frac{9}{2a}.$$

Donc $E(X) = -3$.

Loi uniforme

$$71. 1. p(D < 30) = \frac{30 - 10}{80 - 10} = \frac{2}{7}.$$

2. $E(D) = 45$. Donc, en moyenne, les trois amis sont réunis à 16 h 45.

72. 1. C'est la fonction constante définie sur $[-\pi ; \pi]$ par $f(x) = \frac{1}{2\pi}$.

$$2. p(X \leq 0) = \frac{0 - (-\pi)}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$p\left(X \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]\right) = \frac{\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2\pi} = \frac{\frac{7\pi}{12}}{2\pi} = \frac{7}{24}$$

$$3. E(X) = 0 \text{ et } V(X) = \frac{\pi^2}{3}.$$

73. 1. L'instruction **ALEA()** donne un nombre au hasard entre 0 et 1.

Soit x un tel nombre, alors $X = 5x - 1$.

$$\text{Or } 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 5x \leq 5$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 5x - 1 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq X \leq 4.$$

X suit la loi uniforme sur $[-1 ; 4]$.

$$2. a) p(X < 3) = \frac{4}{5}$$

$$b) p(0 \leq X \leq 2) = \frac{2}{5}$$

$$74. 1. p_{T \geq 15}(T \geq 15 + 10) = \frac{p([T \geq 15] \cap [T \geq 25])}{p(T \geq 15)}$$

$$= \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$2. a) p(X \leq t) = \frac{t - 10}{20}$$

$$b) \frac{t - 10}{20} \geq 0,90 \Leftrightarrow t \geq 28$$

Donc $t \in [28 ; 30]$.

75. 1. H suit la loi uniforme sur $[16 ; 17]$.

$$2. p(H > 16 \text{ h } 40) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

$$3. p_{H < 16 \text{ h } 30}(H < 16 \text{ h } 20) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Paramètres a et b d'une loi uniforme

$$76. p(X \leq 2) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{2 - 1}{b - 1} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2b - 2 = 5$$

$$\Leftrightarrow b = 3,5$$

$$77. \begin{cases} \frac{a+b}{2} = 12 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 24 \\ (b-a)^2 = 12^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+a = 24 \\ b-a = 12 \end{cases} \text{ car } b > a$$

En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient alors $2b = 36$, soit $b = 18$ et on en déduit $a = 6$.

78. a) Vrai

b) Faux, car a et b peuvent prendre d'autres valeurs.

c) Faux. $E(X) = 3,5$.

d) Vrai

Loi exponentielle

79. X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.

$$a) p(X \leq 1,5) = 1 - e^{-0,5 \times 1,5}$$

$$= 1 - e^{-\frac{3}{4}} \approx 0,53$$

$$b) p(1,5 \leq X \leq 4) = e^{-0,5 \times 1,5} - e^{-0,5 \times 4}$$

$$= e^{-\frac{3}{4}} - e^{-2} \approx 0,34$$

$$c) p(X \geq 4) = e^{-2} \approx 0,135$$

$$80. p(D \geq 4) = 0,8 \Leftrightarrow e^{-4\lambda} = 0,8$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,8}{4} \approx 0,056$$

$$p(D \geq x) = 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 0,5 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 0,5}{-\lambda}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 0,5}{\frac{\ln 0,8}{4}} = \frac{4 \ln 0,5}{\ln 0,8} \approx 12,4$$

81. 1. X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$.

2. $E(X) = 20$. Donc l'âge moyen est 20 ans.

$$3. p(20 \leq X \leq 30) = e^{-0,05 \times 20} - e^{-0,05 \times 30}$$

$$\approx 0,145$$

Paramètre λ d'une loi exponentielle

$$82. p(X \geq 10) = 0,1 \Leftrightarrow e^{-10\lambda} = 0,1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,1}{10} = \frac{\ln 10}{10} \approx 0,23$$

$$83. 1. p(X < 5\,730) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-5\,730\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-5\,730\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{5\,730} \approx 0,000\,12$$

$$2. p(X < 2\,000) = 1 - e^{-12 \times 10^{-5} \times 2\,000} \approx 0,213$$

$$3. p(X \geq 11\,460) = e^{-12 \times 10^{-5} \times 11\,460} \approx 0,253$$

$$4. p(X > x) = 0,01 \Leftrightarrow e^{-12 \times 10^{-5} x} = 0,01$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln 0,01}{-12 \times 10^{-5}} \approx 38\,376$$

La probabilité qu'un atome de carbone 14 se désintègre après 38 376 ans est égale à 1 %.

84. 1. Si on pose $X = e^{-\lambda}$ alors

$$e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = 0,16 \Leftrightarrow X - X^2 = 0,16$$

$$\Leftrightarrow X^2 - X + 0,16 = 0$$

Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 0,36$.

Il admet donc deux racines : $X_1 = 0,2$ et $X_2 = 0,8$.

Donc $e^{-\lambda} = 0,2 \Leftrightarrow \lambda = -\ln 0,2 = \ln 5 \approx 1,6$

$$\text{ou } e^{-\lambda} = 0,8 \Leftrightarrow \lambda = -\ln 0,8 = \ln \frac{5}{4} \approx 0,22.$$

$$2. p(1 < X < 2) = 0,16 \Leftrightarrow e^{-\lambda} - e^{-2\lambda} = 0,16$$

D'après la question précédente, on en déduit que

$$\lambda = \ln \frac{5}{4}. \text{ Donc } p(X \leq 1) = 1 - e^{\ln 0,8} = 1 - 0,8 = 0,2$$

Simulation avec les lois continues

85. 1. L'instruction **random.random()** donne un nombre au hasard entre 0 et 1.

Soit x un tel nombre, alors $Q = 3x + 6$.

$$\text{Or } 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 3x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq 3x + 6 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq Q \leq 9.$$

Q suit la loi uniforme sur $[6 ; 9]$.

$$2. a) p(Q < 6,54) = \frac{0,54}{3} = 0,18$$

b) Attention : Il faut calculer la probabilité que Q soit comprise entre 7,261 et 8,641.

$$p(7,261 \leq X \leq 8,641) = \frac{1,38}{3} = 0,46$$

$$86. 1. E(X) = 2,5.$$

2. Cet algorithme calcule la moyenne de 10 000 valeurs de x obtenues aléatoirement entre 0 et 5.

3. On peut prévoir que ce résultat sera proche de $E(X) = 2,5$.

87. 1. `exponF(k, x)` correspond à la fonction de répartition F de la loi exponentielle de paramètre k , définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 1 - e^{-kx}$.

2. Elle donne la liste des 10 valeurs $F(i)$ de la fonction de répartition F , pour i entier de 1 à 10.

3. `loiexpo(0.5)>loiexpo(0.2)`

Plus le paramètre k est grand, plus les valeurs de la fonction de répartition sont élevées.

Utiliser plusieurs lois de probabilité

$$88. E(T) = 4 \Leftrightarrow \lambda = 0,25$$

$$1. p(T < 1) = 1 - e^{-0,25}.$$

2. a) X suit la loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 1 - e^{-0,25}$.

$$b) p(X = 1) = \binom{5}{1} [1 - e^{-0,25}] [e^{-0,25}]^4 \approx 0,4069$$

$$c) p(X \geq 2) = 1 - p(X \leq 1) \\ = 1 - (0,2865 + 0,4069) \\ \approx 0,3066$$

$$3. p(X \leq 4) \approx 0,9995$$

Donc l'affirmation est vraie.

$$89. p(D \geq 300) = e^{-0,005 \times 300} = e^{-1,5}.$$

X suit la loi binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = e^{-1,5}$.

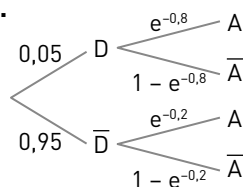
$$p(X \geq 6) = 1 - p(X \leq 5) \approx 1 - 0,9977 \approx 0,0023.$$

$$90. 1. p_D(A) = p(X_2 > 2000)$$

$$= e^{-0,0004 \times 2000} = e^{-0,8}$$

$$p_{\bar{D}}(A) = p(X_1 > 2000) = e^{-0,0001 \times 2000} = e^{-0,2}$$

2.



$$3. p(A) = p(D \cap A) + p(\bar{D} \cap A)$$

$$= 0,05 \times e^{-0,8} + 0,95 \times e^{-0,2}$$

$$\approx 0,80026$$

$$4. p_A(D) = \frac{p(A \cap D)}{p(A)} = \frac{0,05 \times e^{-0,8}}{0,80026} \approx 0,02807$$

$$91. A \blacktriangleright 1. E(T) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = 2$$

$$2. p\left(T < \frac{1}{2}\right) = 1 - e^{-2 \times \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,63$$

$$3. p(T > 1) = e^{-2} \approx 0,135$$

B ► 1. $p\left(T > \frac{1}{2}\right) = 1 - 1 + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \approx 0,37$

2. a) La variable aléatoire N suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = \frac{1}{e}$.

b) $E(N) = 30 \times \frac{1}{e} = \frac{30}{e} \approx 11$

C ► 1. $C = 26N + 17(30 - N) = 9N + 510$.

2. $E(C) = 9 \times E(N) + 510 \approx 609$.

La dépense moyenne pour les trajets-retours sera d'environ 609 €, donc l'artisan risque de dépenser un peu plus que ce qu'il a facturé.

92. 1. a) Cette probabilité est nulle car il n'y a qu'un nombre fini de cas possibles (100).

b) Étant donné qu'il y a une borne tous les 2 km, il est sûr et certain de tomber en panne à moins de 1 km (dans un sens ou dans l'autre).

La probabilité est donc égale à 1.

c) $p(120 \leq X \leq 160) = \frac{40}{200} = 0,2$

2. a) $E(T) = \frac{1}{0,04} = 25$.

Donc il peut espérer obtenir son correspondant au bout de 25 secondes.

b) $p(T < 10) = 1 - e^{-0,4} \approx 0,33$.

c) $p(T > 60) = e^{-2,4} \approx 0,09$.

Exercices bilan

p. 216

93. Probabilité sur le poids des cartables

1. f est une fonction affine continue et positive sur $I = [2 ; 6]$.

(En effet, on a $2 \leq x \leq 6 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{8}x - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$).

$$\int_2^6 \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{4} \right) dx = \left[\frac{x^2}{16} - \frac{x}{4} \right]_2^6 = \left(\frac{6^2}{16} - \frac{6}{4} \right) - \left(\frac{2^2}{16} - \frac{2}{4} \right) = 1$$

2. a) $p(3 < P < 4) = \int_3^4 \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{4} \right) dx = \left[\frac{x^2}{16} - \frac{x}{4} \right]_3^4$

$$= \left(\frac{4^2}{16} - \frac{4}{4} \right) - \left(\frac{3^2}{16} - \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{16}$$

b) $E(P) = \int_2^6 \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x \right) dx = \left[\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{8} \right]_2^6$

$$= \left(\frac{6^3}{24} - \frac{6^2}{8} \right) - \left(\frac{2^3}{24} - \frac{2^2}{8} \right) = \frac{14}{3} \approx 4,7$$

Le poids moyen du cartable d'un enfant de CP est d'environ 4,7 kg.

94. Temps d'attente pour accorder un piano

1. Si le temps d'attente H est exprimé en minutes alors la fonction h définie sur $[0 ; 120]$ par $h(x) = \frac{1}{120}$ est la fonction de densité de la loi suivie par H .

2. $p(H > 30) = \frac{120 - 30}{120} = \frac{3}{4}$

3. Attention : il s'agit de calculer la probabilité qu'Antoine arrive.

a) $p(H = 60) = 0$

b) $p(H < 15) = \frac{1}{8}$

c) $p(30 < H < 60) = \frac{1}{4}$

d) $p(H > 80) = \frac{1}{3}$

4. $p_{H \geq 75}(H > 80) = \frac{p(H > 80)}{p(H \geq 75)} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$

5. $p_{H \geq 90}(H \leq 110) = \frac{p(90 \leq H \leq 110)}{p(H \geq 90)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

6. $E(H) = 60$. Donc le temps moyen d'attente d'un client est de 60 minutes, c'est-à-dire 1 h.

95. Durée de vie d'un spectromètre

1. $p(X \geq 8) = 0,42 \Leftrightarrow e^{-8\lambda} = 0,42$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,42}{8} \approx 0,11$$

2. $p(X \leq 10) = 1 - e^{-1,1} \approx 0,67$

La probabilité que le spectromètre ait une durée de vie inférieure à 10 ans est d'environ 67 %.

3. $p(X \geq 8) = 0,42$

Donc il y a 42 % de chances que le spectromètre fonctionne encore en septembre 2020.

4. $p(10 \leq X \leq 12) = e^{-1,1} - e^{-1,32} \approx 0,07$

5. $p_{X \geq 8}(X \geq 8 + 0,5) = p(X \geq 0,5) = e^{-0,11 \times 0,5} \approx 0,95$

La probabilité est très élevée, c'est plutôt rassurant.

6. $E(X) = \frac{1}{0,11} \approx 9$

En moyenne un spectromètre dure 9 ans.

96. Utilisation et durée de vie d'une console

A ► 1. $a = 0,5$ et $\frac{a+b}{2} = 2$, donc $b = 4,5$.

Ainsi l'intervalle est $[0,5 ; 4,5]$

2. a) $p(T > 3) = \frac{4,5 - 3}{4,5 - 0,5} = \frac{1,5}{4} = \frac{3}{8}$

b) $p(T \in [2 - x ; 2 + x]) = \frac{2 + x - (2 - x)}{4} = \frac{x}{2}$

$\frac{x}{2} = 0,90 \Leftrightarrow x = 1,8$.

L'intervalle cherché est donc $[0,2 ; 3,8]$.

Cela signifie que la probabilité que Gaby joue entre 0,2 h (c'est-à-dire 12 min) et 3,8 h (c'est-à-dire 3 h 48 min) est égale à 90 %.

B ► 1. $E(\lambda) = 5,5 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{5,5} = \frac{2}{11}$

2. $p(D \leq 4) = 1 - e^{-\frac{8}{11}} \approx 0,52$

La probabilité que la console dure moins de 4 ans est d'environ 52 %.

3. $p_{D \geq 2}(D \geq 2 + 1) = p(D \geq 1) = e^{-\frac{2}{11}} \approx 0,834$

Exercices Préparer le BAC

Je me teste

p. 218

97. **B**

98. **D**

99. **A**

100. **A**

101. **B**

102. **B**

103. **C**

104. **D**

105. **C**

106. **C**

107. **B**

Exercices Préparer le BAC

Je révise

p.219

108. Probabilité et astronomie

1. $p(T < 3) = 1 - e^{-0,2 \times 3} = 1 - e^{-0,6} \approx 0,451$

2. On cherche le plus petit réel t tel que

$p(T < t) > 0,95$ c'est-à-dire :

$1 - e^{-0,2t} > 0,95 \Leftrightarrow e^{-0,2t} < 0,05$

$\Leftrightarrow -0,2t < \ln 0,05$

$\Leftrightarrow t > \frac{\ln 0,05}{-0,2}$

Or $\frac{\ln 0,05}{-0,2} \approx 15$.

Donc le temps d'attente minimal est 15 minutes.

3. $E(T) = \frac{1}{0,2} = 5$.

Donc, en moyenne, le temps d'attente entre deux étoiles filantes est de 5 minutes.

En 2 heures, le groupe pourra donc observer 24 étoiles filantes car $24 \times 5 \text{ min} = 120 \text{ min} = 2 \text{ h}$.

109. Représentation graphique d'une loi à densité

A ► La fonction g est positive et continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $I = [0 ; +\infty[$.

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{e^{-0,5t}}{2} dt &= \left[-e^{-0,5t} \right]_0^x \\ &= -e^{-0,5x} - (-e^{-0,5 \times 0}) \\ &= 1 - e^{-0,5x} \end{aligned}$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,5x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Donc par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,5x} = 0$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-0,5x} = 1$.

Ce qui signifie que $\int_I g(t) dt = 1$.

Donc g est une densité de probabilité.

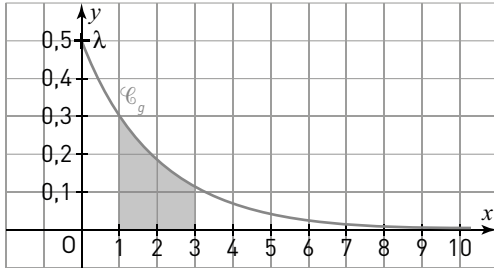
B ► 1. $E(X) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$

Donc la densité de probabilité de la variable aléatoire X est la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par

$$t \mapsto \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Or cette fonction est la fonction g de la partie **A**.

2. a) et b)



La valeur de λ est bien 0,5 car c'est l'ordonnée à l'origine de la courbe de la fonction g .

3) $p(1 \leq X \leq 3) = e^{-0,5 \times 1} - e^{-0,5 \times 3}$
 $= e^{-0,5} - e^{-1,5} \approx 0,383\ 4$

4) $p_{X>3}(X \geq 4) = p(X \geq 1) = e^{-0,5}$
 $\approx 0,606\ 5$

110. Démontrer une propriété

A ► 1. Voir le cours.

2. $p(X < 2) = 0,05 \Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 0,05$
 $\Leftrightarrow e^{-2\lambda} = 0,95$
 $\Leftrightarrow -2\lambda = \ln 0,95$
 $\Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln 0,95}{-2} \approx 0,026$

3. $E(X) = \frac{1}{0,026} \approx 38,5$

B ► 1. $p(30 \leq X \leq 50) = e^{-0,025 \times 30} - e^{-0,025 \times 50}$
 $\approx 0,186.$

2. $p(X > 60) = e^{-0,025 \times 60} \approx 0,223$

111. De la bonne utilisation d'un vélo

A ► 1) Soit D la durée du trajet :

$$E(D) = \frac{12 + 28}{2} = 20.$$

Son trajet dure 20 minutes en moyenne.

2) Elle arrive en retard au lycée si son trajet dure plus de 25 minutes.

$$\text{Or } p(D > 25) = \frac{28 - 25}{28 - 12} = \frac{3}{16}.$$

Donc la probabilité qu'elle arrive en retard au lycée est $\frac{3}{16}$.

3. On admet que Martha arrive pile à l'heure.

a) Loïse ne fera pas attendre Martha si son trajet dure 15 minutes maximum.

$$\text{Or } p(D < 15) = \frac{15 - 12}{28 - 12} = \frac{3}{16}.$$

b) Loïse attendra Martha plus de deux minutes si elle met moins de 13 minutes pour arriver au lycée. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a

$$p_{D < 15}(D < 13) = \frac{p(D < 13)}{p(D < 15)} = \frac{13 - 12}{15 - 12} = \frac{1}{3}$$

B ► 1) D'après l'énoncé $p(X \geq 100) = 0,8$.

$$\text{Donc } e^{-100\lambda} = 0,8 \Leftrightarrow -100\lambda = \ln 0,8$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,8}{100}$$

La valeur approchée de λ est 0,002.

2) $p_{X>150}(X > 300) = p(X > 150)$
 $= e^{-0,002 \times 150}$
 $= e^{-0,3} \approx 0,740\ 8$

CHAPITRE 9 Statistiques à deux variables

Manuel p. 220-245

I. Introduction

Commentaires pédagogiques

L'étude de séries statistiques à deux variables permet de conjecturer des relations – affines, exponentielles, ou autres – entre deux quantités économiques, physiques, biologiques ou autres.

Elle s'appuie donc sur une bonne connaissance des fonctions usuelles et de leur représentation graphique. L'outil numérique, en particulier les calculatrices du lycée, mais aussi les tableurs et grapheurs, sont mis en avant pour obtenir des résultats rapides qu'il convient ensuite d'analyser.

Ainsi, nous avons fait le choix d'activités et d'exercices présentant les différentes méthodes de représentation graphique d'un nuage de points : « à la main », « sur tableur », « sur grapheur ».

De la même façon, les différents outils et méthodes, permettant d'obtenir le meilleur ajustement possible d'un nuage de points, jalonnent les exercices et permettent de varier les techniques de résolution de problème.

Objectifs

- Représenter un nuage de points
- Calculer les coordonnées d'un point moyen
- Déterminer une droite de régression, à l'aide de la calculatrice, d'un logiciel ou par calcul
- Utiliser un ajustement pour interpoler, extrapoler, dans le cadre d'une résolution de problème

II. Corrigés des activités et des exercices

Pour prendre un bon départ p. 221

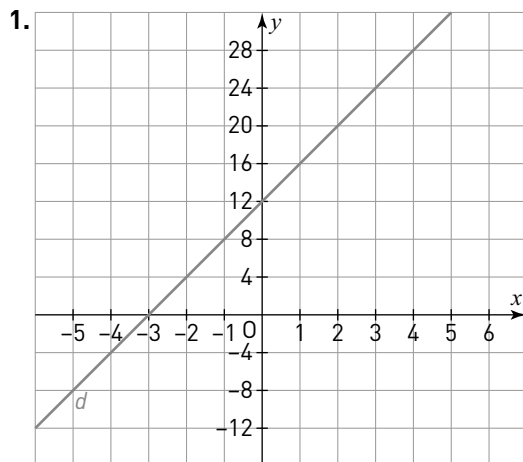
1. Calculer les caractéristiques d'une série statistique à une variable (1)

$$1. \bar{x} = \frac{25 + 37 + 54 + 62 + 71 + 78}{6} = \frac{327}{6} = 54,5$$
$$Me = \frac{54 + 72}{2} = 58$$
$$var(x) = \frac{25^2 + 37^2 + 54^2 + 62^2 + 71^2 + 78^2}{6} - 54,5^2$$
$$= \frac{19\,879}{6} - 54,5^2 \approx 342,9$$
$$\sigma(x) \approx \sqrt{342,9} \approx 18,5$$

2. Calculer les caractéristiques d'une série statistique à une variable (2)

STATISTIQUES	
Données	Stats
Effectif total	32
Minimum	36
Maximum	45
Etendue	9
Moyenne	39.84375
Ecart type	2.237596
Variance	5.006836
Premier quartile	38
Troisième quartile	41
Médiane	39.5

3. Tracer une droite



2. Si on remplace x par 11 dans l'équation de d , on obtient $y = 56$.

Donc le point $M(11 ; 66)$ n'appartient pas à la droite.

3. $y = 4 \times 25 + 12 = 112$

4. $204 = 4x + 12 \Leftrightarrow 4x = 192 \Leftrightarrow x = 48$

4. Déterminer l'équation d'une droite donnée

L'équation réduite de la droite (AB) est de la forme

$$y = mx + p \text{ avec } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Donc $m = \frac{1 - 11}{5 + 2} = -\frac{10}{7}$.

De plus les coordonnées de B (ou de A) doivent vérifier l'équation :

$$y_B = -\frac{10}{7}x_B + p \Leftrightarrow 1 = -\frac{10}{7} \times 5 + p$$

$$\Leftrightarrow 1 = -\frac{50}{7} + p$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{50}{7} = p$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{57}{7}.$$

L'équation de (AB) est $y = -\frac{10}{7}x + \frac{57}{7}$.

5. Étudier une fonction exponentielle

2. $f(2) = e^{0,5 \times 2 + 6} = e^7 \approx 1\,096,6$

3. $e^{0,5x+6} = 2\,500 \Leftrightarrow 0,5x + 6 = \ln 2\,500$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= \frac{\ln(2\,500) - 6}{0,5} \\ &= 4\ln(50) - 12 \\ &\approx 3,648 \end{aligned}$$

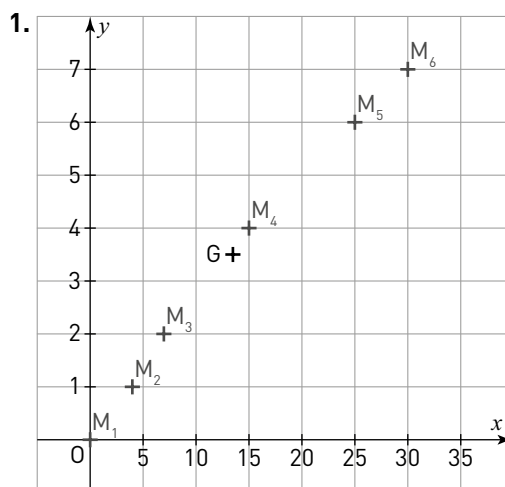
Activités

p. 222-223

1. Nuage de points, point moyen – (Thème 9)

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Représenter graphiquement une série statistique à deux variables.

A ► Loi d'ohm

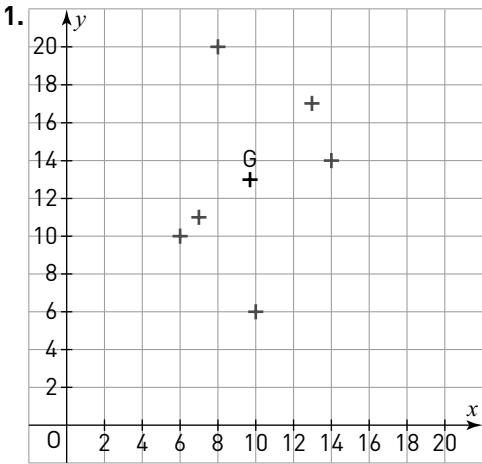


2. $\bar{x} = \frac{4 + 7 + 15 + 25 + 30}{6} = \frac{81}{6} = 13,5$

$$\bar{y} = \frac{1 + 2 + 4 + 6 + 7}{6} = \frac{20}{6} = 3,3$$

3. Les points semblent presque alignés selon une droite.

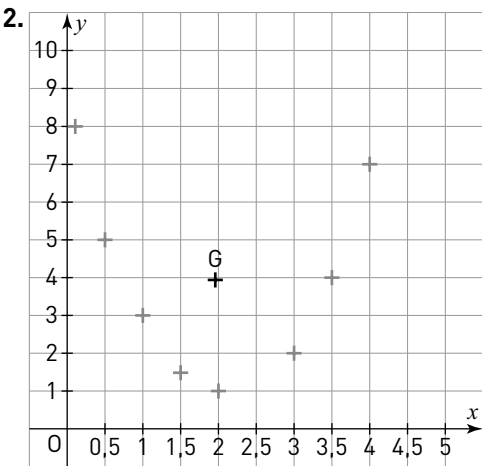
B ► D’autres statistiques à deux variables



Soit G le point moyen de coordonnées :

$$\bar{x} = \frac{13 + 8 + 14 + 10 + 7 + 6}{6} = \frac{29}{3} \approx 9,7 \text{ et}$$
$$\bar{y} = \frac{17 + 20 + 14 + 6 + 11 + 10}{6} = \frac{78}{6} = 13.$$

Le nuage de points n’a aucune forme repérable.



Soit G le point moyen de coordonnées :

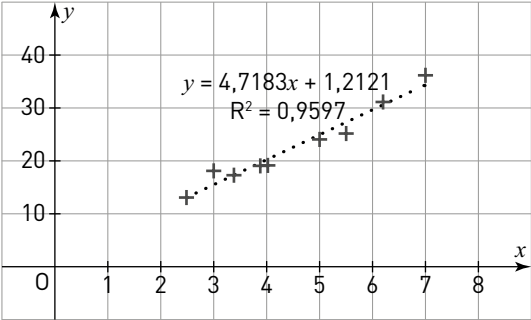
$$\bar{x} = \frac{15,6}{8} = 1,95 \text{ et } \bar{y} = \frac{31,5}{8} = 3,9375.$$

Le nuage de points a une forme de parabole.

2. Ajustement affine avec un tableur

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Découvrir l’ajustement d’un nuage de points et utiliser un tableur.

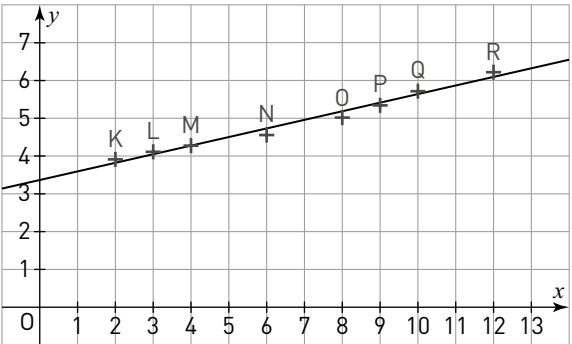
1. et 3.



2. On peut dire de ces points qu’ils sont presque alignés.

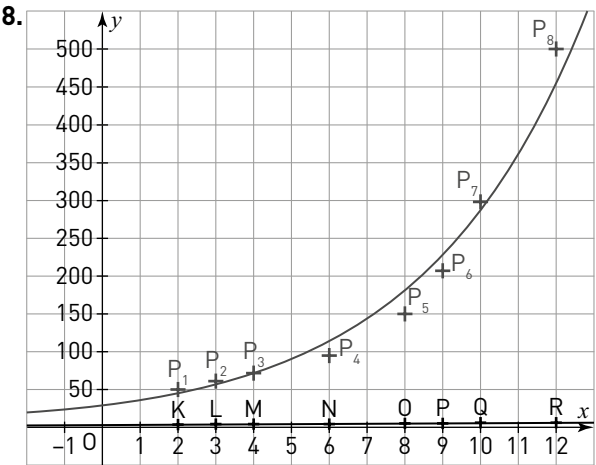
3. Ajustement exponentiel avec GeoGebra

- **Durée estimée :** 20 min
 - **Objectif :** Découvrir l’ajustement exponentiel et utiliser un logiciel de géométrie dynamique.
2. Le nuage de points présente une forme de courbe de fonction exponentielle croissante.
3. Entrer la formule : $C1=\ln(B1)$, puis étirer vers le bas.
4. et 5.



Les points sont presque alignés.

6. $y = 0,23x + 3,36$
7. $\ln(n) = 0,23x + 3,36 \Leftrightarrow n = e^{0,23x+3,36}$

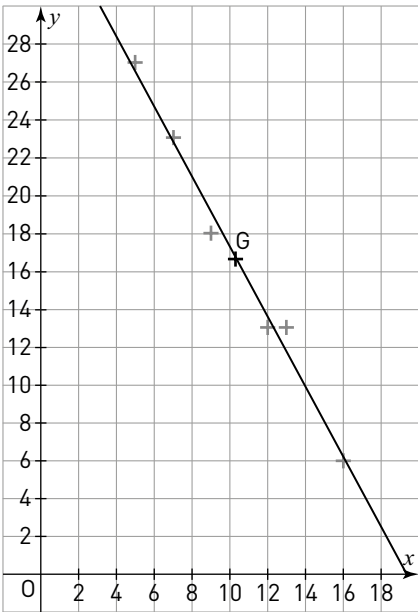


4. Interpolation et extrapolation

- **Durée estimée :** 5 min
 - **Objectif :** Réaliser une estimation à l'aide d'un ajustement.
1. $n = e^{0,23 \times 11 + 3,36} \approx 361$
On peut estimer à 361 le nombre d'abonnés.
2. Janvier 2025 est le mois de rang 64 par rapport à septembre 2019.
Donc $n = e^{0,23 \times 64 + 3,36} \approx 7,1 \times 10^7$.
Elle peut espérer avoir 71 millions d'abonnés en janvier 2025.

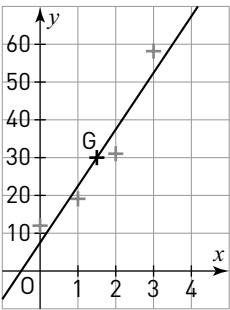
À vous de jouer ! p. 236

1. 1. et 4.



2. Soit G le point moyen de coordonnées :
- $$\bar{x} = \frac{5 + 7 + 9 + 12 + 13 + 16}{6} = \frac{62}{6} \approx 10,3 \text{ et } \bar{y} = \frac{27 + 23 + 18 + 13 + 13 + 6}{6} = \frac{100}{6} \approx 16,7.$$
3. On observe une forme rectiligne : les points sont presque alignés.

2. 1. et 4.



2. Soit G le point moyen de coordonnées : $\bar{x} = 1,5$ et $\bar{y} = 30$.
3. Le nuage de points a une forme rectiligne.
3. L'équation de la droite d'ajustement est : $y = -1,852x + 35,804$.
Le coefficient de corrélation linéaire est $r \approx 0,9939$.

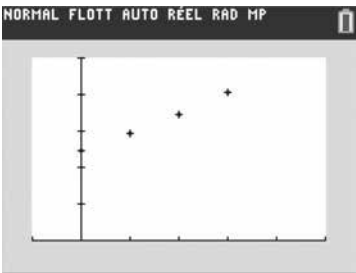
deg REGRESSIONS		
Données	Graphique	Stats
Covariance		27.372
$\sum xy$		535.9
Régression		$y = a \cdot x + b$
a		0.3118961
b		-0.7246126
r		0.9980624
r^2		0.9961285

- L'équation de la droite d'ajustement est : $y \approx 0,312x - 0,725$.
Le coefficient de corrélation linéaire est : $r \approx 0,998$.

5. 1.

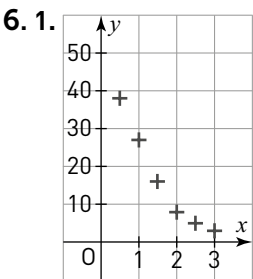
x_i	0	1	2	3
$y'_i = \ln(y_i)$	2,48	2,94	3,43	4,06

2. On voit sur le graphique ci-après que le nuage de points $\{x_i ; y'_i\}$ présente une forme pouvant être ajustée par une droite.



3. L'équation est $y' = 0,522x + 2,449$.

4. $y' = \ln(y) \Leftrightarrow \ln(y) \approx 0,522x + 2,449$
 $\Leftrightarrow y \approx e^{0,522x+2,449}$



2.

y_i	50	38	27	16
$z_i = \ln(y_i)$	3,91	3,64	3,3	2,77
y_i	8	5	3	
$z_i = \ln(y_i)$	2,08	1,61	1,1	

3. $z \approx -0,979x + 4,099$

4. $\ln(y) \approx -0,979x + 4,099$
 $\Leftrightarrow y \approx e^{-0,979x+4,099}$

7. 1. Sur le graphique, on peut lire que le point de la droite d'ajustement d'abscisse 4 (correspondant à 2014) a pour ordonnée 21,2 environ.

On peut donc estimer qu'en 2014 le cinéma a totalisé 21 200 entrées environ.

2. On constate que la droite atteint l'ordonnée 24 pour $x = 14$.

Cela correspond à l'année 2024.

8. 1. $y \approx -12,547x + 204,143$
 $r \approx -0,944$

2. r est assez proche de -1 , donc l'ajustement affine peut être un bon choix.

3. L'année 2021 est de rang 7, donc :

$$y \approx -12,547 \times 7 + 204,143 \approx 116,314.$$

On peut prévoir qu'environ 116 livres seront empruntées à la bibliothèque.

4. $65 \approx -12,547x + 204,143$

$$\Leftrightarrow x \approx \frac{65 - 204,143}{-12,547} \approx 11$$

Cela correspond à l'année 2025.

9. 1. On calcule d'abord $\bar{x} = 9,8$ et $\bar{y} = 17,4$.

x_i	5	7	9
y_i	27	23	18
$x_i - \bar{x}$	-4,8	-2,8	-0,8
$y_i - \bar{y}$	9,6	5,6	0,6
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	-46,08	-15,68	-0,48

x_i	12	16
y_i	13	6
$x_i - \bar{x}$	2,2	6,2
$y_i - \bar{y}$	-4,4	-11,4
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	-9,68	-70,68

La covariance est la moyenne des produits des écarts :

$$\begin{aligned} \text{cov}(x, y) &= \frac{-46,08 - 15,68 - 0,48 - 9,68 - 70,68}{5} \\ &= \frac{-142,6}{5} = -28,52 \end{aligned}$$

La variance de x est la moyenne des carrés des écarts $(x_i - \bar{x})^2$:

$$\begin{aligned} \text{var}(x) &= \frac{(-4,8)^2 + (-2,8)^2 + (-0,8)^2 + 2,2^2 + 6,2^2}{5} \\ &= \frac{74,8}{5} = 14,96 \end{aligned}$$

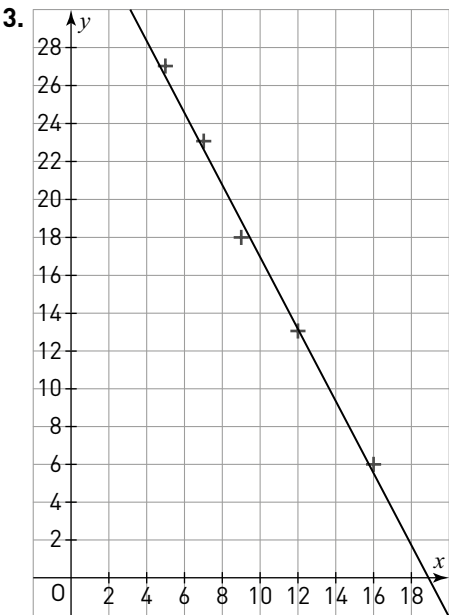
2. On en déduit que le coefficient directeur de la droite de régression de y en x est :

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)} = \frac{-28,52}{14,96} \approx -1,9064$$

et l'ordonnée à l'origine est :

$$b \approx 17,4 + 1,9064 \times 9,8 \approx 36,08.$$

Donc l'équation de la droite de régression de y en x est $y = -1,9064x + 36,08$.



10. 1. On commence par calculer les valeurs des moyennes $\bar{x}$ et $\bar{y}$:

$$\bar{x} = \frac{-45 - 20 + 30}{4} = -8,75 \text{ et}$$
$$\bar{y} = \frac{12,2 + 12,9 + 13,4 + 14,1}{4} = 13,15$$

Puis on s'aide d'un tableau pour détailler les étapes du calcul :

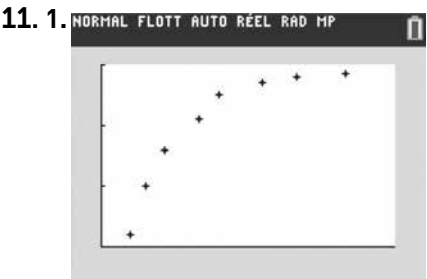
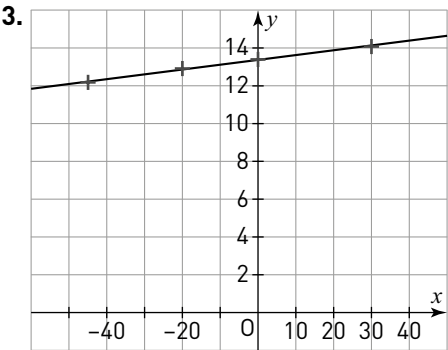
x_i	-45	-20
y_i	12,2	12,9
$x_i - \bar{x}$	-36,25	-11,25
$y_i - \bar{y}$	-0,95	-0,25
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	34,437 5	2,812 5
x_i	0	30
y_i	13,4	14,1
$x_i - \bar{x}$	8,75	38,75
$y_i - \bar{y}$	0,25	0,95
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	2,187 5	36,812 5

$$\text{cov}(x, y) = \frac{34,437 5 + 2,812 5 + 2,187 5 + 36,812 5}{4}$$
$$= 19,062 5$$

$$\text{var}(x) = \frac{[-36,25]^2 + [-11,25]^2 + 8,75^2 + 38,75^2}{4}$$
$$= 754,687 5$$

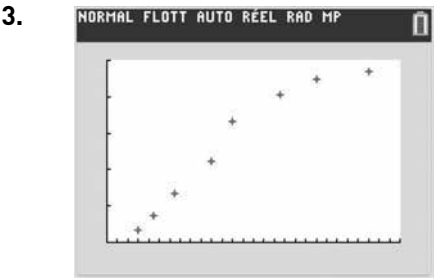
2. $y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)} \approx 0,025$
et $b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 13,15 - 0,025 \times (-8,75)$
 $\approx 13,37$.

L'équation est donc $y \approx 0,025x + 13,37$.



2.

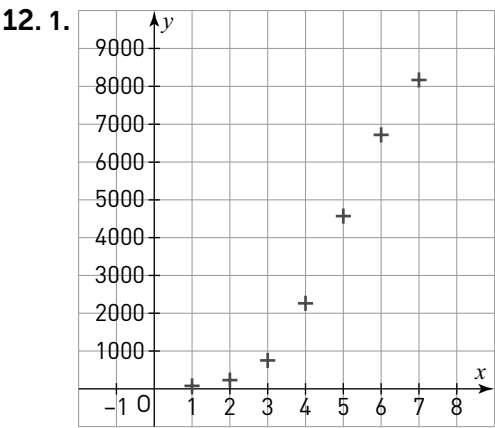
x_i	30	45	65	100
$y'_i = e^{y_i}$	3,32	7,38	13,46	22,2
x_i	120	165	200	250
$y'_i = e^{y_i}$	33,12	40,45	44,7	46,99



4. L'équation de la droite de régression de y' en x est $y' = 0,213 7x + 0,408 3$.

Comme $y' = e^y$, alors $y = \ln(y')$.

Donc on a : $y = \ln(0,213 7x + 0,408 3)$.



2.

y'_i	9,7	14,8	27,4	47,5	67,6	81,9	90,3
--------	-----	------	------	------	------	------	------

3. $\approx 0,99$

Donc l'ajustement affine du nuage de points $(x; y')$ est tout à fait pertinent.

4. $y' \approx 14,87x - 11,02$.

Donc $y' = \sqrt{y} \Leftrightarrow y = y'^2$
 $\Leftrightarrow y \approx (14,87x - 11,02)^2$

Exercices
apprendre à démontrer p. 234

Pour s'entraîner

Soit a la valeur manquante du tableau et soit G le point moyen du nuage.

Alors on a :

$$x_G = \frac{4 + 5 + a + 8}{4} = 4,25 + \frac{a}{4}$$

$$y_G = \frac{-1 - 2 - 5 - 5}{4} = -3,25$$

Comme la droite des moindres carrés passe par le point moyen du nuage alors on doit avoir : $y_G = -1,1x_G + 3,35$ c'est-à-dire :

$$-3,25 = -1,1 \times \left(4,25 + \frac{a}{4} \right) + 3,35$$

ce qui donne : $-3,25 = -4,675 - \frac{1,1a}{4} + 3,35$

$$\Leftrightarrow \frac{1,1a}{4} = 1,925 \Leftrightarrow a = 7$$

Exercices
calculs et automatismes p.235

13. Valeurs et point moyen d'une série statistique
1.

z_i	4	8	10	14	16	20	22	24
t_i	12	8	20	36	20	28	32	36

2.

$$x_G = \frac{4 + 8 + 10 + 14 + 16 + 20 + 22 + 24}{8} = \frac{118}{8} = 14,75$$
$$\text{et } y_G = \frac{12 + 8 + 20 + 36 + 20 + 28 + 32 + 36}{8} = \frac{192}{8} = 24$$

Le point moyen est $G(14,75 ; 24)$.

14. Équation réduite
et coefficient de corrélation linéaire

1. $y = 0,6x + 8,5$

2. $r \approx 0,4$

15. Covariance, corrélation et ajustement affine
1. Vrai

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 6 + 8}{4} = \frac{18}{4} = 4,5 \text{ et}$$

$$\bar{y} = \frac{5 + 1 + 7 + 2}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$$

x_i	1	3
y_i	5	1
$x_i - \bar{x}$	-3,5	-1,5
$y_i - \bar{y}$	1,25	-2,75
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	-4,375	4,125
x_i	6	8
y_i	7	2
$x_i - \bar{x}$	1,5	3,5
$y_i - \bar{y}$	3,25	-1,75
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	4,875	-6,125

$$\sigma_{xy} = \frac{-4,375 + 4,125 + 4,875 - 6,125}{4} = \frac{-1,5}{4} = -0,375$$

2. Faux

$$\sigma_x = \sqrt{\text{var}(x)}$$

$$\text{Or } \text{var}(x) = \frac{(-3,5)^2 + (-1,5)^2 + 1,5^2 + 3,5^2}{4} = \frac{29}{4} = 7,25$$

$$\text{Donc } \sigma_x = \sqrt{7,25} \approx 2,7.$$

$$\sigma_y = \sqrt{\text{var}(y)}$$

$$\text{Or } \text{var}(y) = \frac{1,25^2 + (-2,75)^2 + 3,25^2 + (-1,75)^2}{4} = \frac{22,75}{4} = 5,6875$$

$$\text{Donc } \sigma_y = \sqrt{5,6875} \approx 2,4. \text{ Donc } \sigma_x < \sigma_y.$$

3. Faux

Le coefficient de corrélation linéaire r a le même signe que la covariance σ_{xy} , donc r est négatif.

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} \approx \frac{-0,375}{2,7 \times 2,4} \approx -0,058$$

4. Faux

$r \approx -0,058$ est proche de 0, donc la corrélation linéaire n'est absolument pas vérifiée. L'ajustement affine n'est donc pas pertinent.

16. Droite de régression et ajustement exponentiel

1. Attention : Il faut lire la proposition **c**

$$y' = 0,4x + 3,9.$$

Réponse **c**

2. Attention : Il faut lire la proposition **a**

$$y = 49,4e^{0,4x}.$$

Réponse **a**

$$\text{Car } y' = 0,4x + 3,9 \Leftrightarrow \ln(y) = 0,4x + 3,9$$

$$\Leftrightarrow y = e^{0,4x+3,9}$$

$$\Leftrightarrow y = e^{0,4x} \times e^{3,9}$$

$$\Leftrightarrow y \approx 49,4e^{0,4x}.$$

3. Attention : Il faut lire la proposition **b** 365.

Réponse **b**

Car l'année 2020 est de rang $x = 5$

$$\text{Et donc } y \approx 49,4e^{0,4 \times 5} \approx 365.$$

17. Évolution d'un élevage de gardons

a) 2018 correspond à l'année de rang 8.

Donc, d'après le graphique, on peut estimer qu'il y aura environ 4 000 gardons dans l'étang.

b) La droite d'ajustement est en-dessous de 3 000 à partir de l'année de rang 13.

Donc on peut estimer que c'est en 2023 que l'étang contiendra moins de 3 000 gardons.

Exercices d'application

p. 236-268

Nuage de points, ajustement

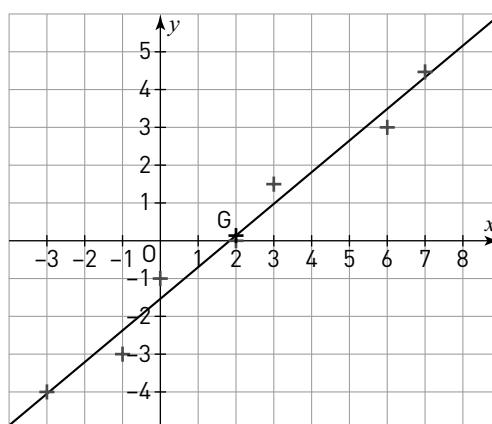
18. Le graphique ① peut être ajusté par une parabole, le graphique ③ par une courbe exponentielle, le graphique ④ par une droite.

Le graphique ② ne présente aucune forme reconnaissable.

19. 1. Le point moyen semble être le point O.

2. Le nuage de points n'a pas de forme particulière, il ne semble donc pas y avoir de corrélation entre les variables x et y .

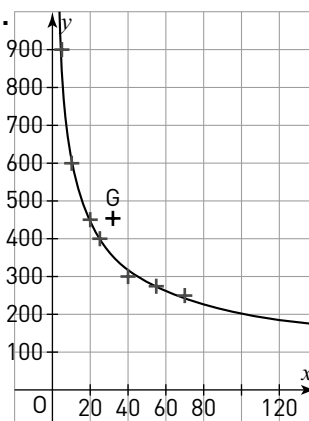
20. 1. et 3.



$$\text{2. } \bar{x} = 2 \text{ et } \bar{y} \approx 0,14$$

3. Ce nuage de points peut être « approché » par une droite.

21. 1.



$$\text{2. } \bar{x} = 32,1 \text{ et } \bar{y} \approx 453,6$$

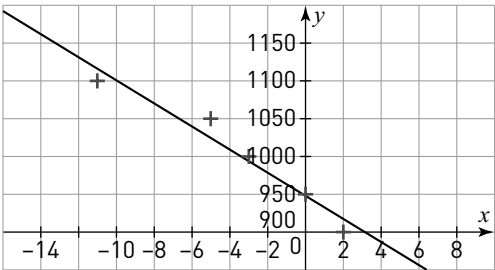
3. Le nuage de points semble former une branche d'hyperbole.

**Droite de regression,
coefficient de corrélation linéaire**

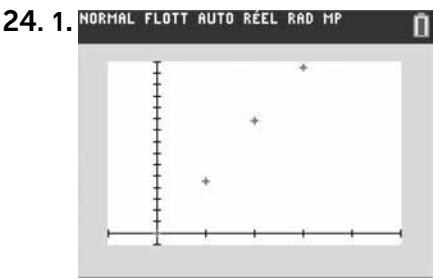
22. 1. Le nuage de points présente une forme rectiligne « montante », on peut donc l'ajuster par une droite.

2. Avec la calculatrice, on trouve
 $y = 0,055\ 6x - 4,150\ 8$ et $r \approx 0,944$.

23. 1. et 3.



2. $y \approx -15,32x + 971,92$
 $r \approx -0,97$



Les points semblent presque alignés, donc le nuage peut être ajusté par une droite.

2. $y = 4,87x - 0,8$ et $r \approx 0,999\ 7$.

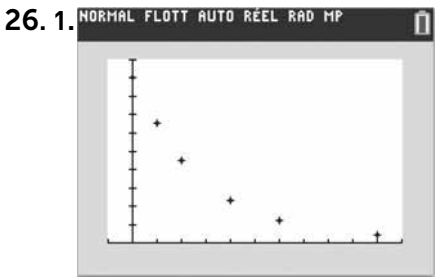
3. Pour la tracer, on peut utiliser les points (10 ; 48) et (30 ; 145).

25. 1. G(2,5 ; 10,5)

2. $y \approx -0,4x + 11,5$ et $r \approx -0,986$.

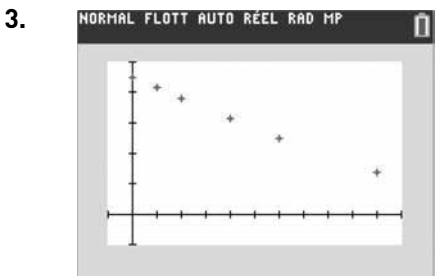
3. Oui (voir la propriété p. 234 du manuel de l'élève).
De plus ses coordonnées vérifient l'équation de d :
 $-0,4 \times 2,5 + 11,5 = 10,5$

Ajustement exponentiel



2.

x_i	0	1	2	4	6	10
$y'_i = \ln(y_i)$	4,5	4,17	3,8	3,14	2,48	1,39



4. L'équation de la droite de régression est :
 $y' = -0,31x + 4,45$.

5. $y' = \ln(y) \Leftrightarrow y = e^{y'} \Leftrightarrow y = e^{-0,31x+4,45}$

27. 1.

x_i	0	0,2	0,5	0,7	1,5	2,5	4
y_i	31	20	15	8	4	3	1
y'_i	3,4	3	2,7	2,1	1,4	1,1	0

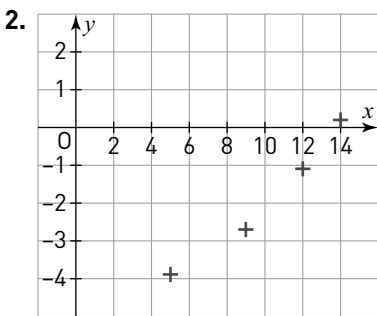
2. $y' \approx -0,8x + 3$ et $r \approx -0,967$

3. $y' = \ln(y) \Leftrightarrow y = e^{y'}$

Donc on a : $y = e^{-0,8x+3}$.

28. 1.

y'_i	-3,9	-2,7	-1,1	0,2
--------	------	------	------	-----



Le nuage (x, y') peut être ajusté par une droite.

3. $y' \approx 0,45x - 6,4$

4. $y' = \ln(y) \Leftrightarrow y = e^{y'}$

Donc on a : $y = e^{0,45x-6,4}$.

Interpolation, extrapolation

29. 1. Vrai

$$y = 5,3 \times 1\,500 - 5\,900 = 2\,050.$$

Cela signifie que le chiffre d'affaires est égal à 2 050 000 euros, soit 2,05 millions d'euros.

2. Faux

10 millions = 10 000 milliers d'euros.

Donc on résout l'équation :

$$10\,000 = 5,3x - 5\,900.$$

$$\text{Ce qui donne } x = \frac{15\,900}{5,3} = 3\,000.$$

Le salaire moyen devrait être égal à 3 000 €.

30. 1. a) Environ 215 personnes.

b) Environ 315 personnes.

2. 193 €.

31. 1. L'année 2016 est l'année de rang 7 :

$$y = 10,67e^{0,224 \times 7} \approx 51,2.$$

Donc on peut estimer que le revenu de l'entreprise en 2016 est d'environ 51,2 millions d'euros.

$$\begin{aligned} 2. 100 &= 10,67e^{0,224x} \Leftrightarrow e^{0,224x} = \frac{100}{10,67} \\ &\Leftrightarrow 0,224x = \ln\left(\frac{100}{10,67}\right) \\ &\Leftrightarrow x \approx 10 \end{aligned}$$

C'est donc en 2019 (année de rang 10) que le revenu pourrait dépasser 100 millions d'euros.

32. 1. Le coefficient de corrélation linéaire r est assez proche de -1 .

Donc d est un bon modèle d'ajustement du nuage.

$$2. a) y = -0,54 \times 7 + 6,95 = 3,17.$$

Environ 3,2 % des malades ont contracté une maladie nosocomiale dans cet hôpital en 2019.

$$b) -0,54x + 6,95 < 1,5 \Leftrightarrow x > 10$$

Donc, en 2022 (année de rang 10), le pourcentage pourrait être inférieur à 1,5 %.

$$33. 1. y \approx -6,4x + 90,8$$

$$2. y \approx -6,4 \times 10 + 90,8 = 26,8$$

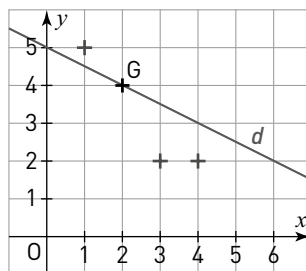
Donc les ventes annuelles pourraient être autour de 26,8 milliards de cigarettes si le prix du paquet atteignait 10 €.

Exercices d'entraînement

p. 239-241

Ajustement affine d'un nuage de points

34. 1. et 3. b)



2. G(2 ; 4)

$$3. a) d : y = -\frac{1}{2}x + p$$

$$G(2 ; 4) \in d \Leftrightarrow 4 = -\frac{1}{2} \times 2 + p \Leftrightarrow p = 5.$$

$$\text{Donc l'équation de } d \text{ est : } y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

c) d ne semble pas être la droite qui passe « au plus près » des points du nuage. Donc ce n'est pas un bon modèle d'ajustement de ce nuage.

35.	x	1	3	5	7	9	12
	y	1 600	1 750	1 800	1 900	2 000	2 050

1. Vrai

2. Vrai

$$3. \text{ Vrai. } r_1 \approx 0,981$$

$$4. \text{ Faux. } r_2 \approx 0,982 \text{ donc } r_2 > r_1.$$

5. Faux. La droite des moindres carrés passe toujours par le point moyen.

36. Attention : Il faut lire l'équation

$$y = -13,5x + 937,5.$$

$$1. G\left(\frac{205}{6}; \frac{1450}{3}\right) \approx (34,2; 483,3)$$

$$2. -13,5 \times 25 + 937,5 = 600$$

Donc d passe par le point (25 ; 600).

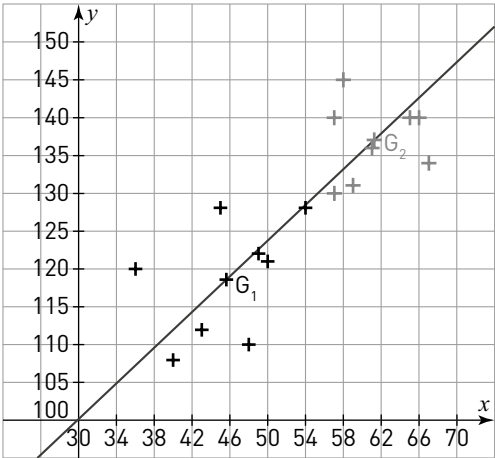
$$-13,5 \times 40 + 937,5 = 397,5 \neq 400$$

Donc d ne passe pas exactement par le point (40 ; 400).

$$3. -13,5 \times \frac{205}{6} + 937,5 = 476,25 \neq \frac{1450}{3}$$

Donc d ne passe pas par le point moyen G.

37. 1. et 2. c)



2. a) $G_1(45,625 ; 118,625)$

b) $G_2(61,25 ; 137)$

3. $m = \frac{137 - 118,625}{61,25 - 45,625} = 1,176$

L'équation de la droite est donc : $y = 1,176x + p$.

Comme $G_2 \in (G_1, G_2)$ alors :

$137 = 1,176 \times 61,25 + p \Leftrightarrow p = 64,97$

L'équation de la droite de Mayer est donc :

$y = 1,176x + 64,97$

**Droite des moindres carrés
et corrélation linéaire**

38. $\bar{x} = 2,5$ et $\bar{y} \approx 8,5$

x_i	0	1	2
y_i	7,8	8,1	8
$x_i - \bar{x}$	-2,5	-1,5	-0,5
$y_i - \bar{y}$	-0,7	-0,4	-0,5
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	1,75	0,6	0,25
x_i	3	4	5
y_i	8,7	9	9,2
$x_i - \bar{x}$	0,5	1,5	2,5
$y_i - \bar{y}$	0,2	0,5	0,7
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	0,1	0,75	1,75

1. $\text{var}(x) = \frac{[-2,5]^2 + [-1,5]^2 + [-0,5]^2 + 0,5^2 + 1,5^2 + 2,5^2}{6}$

$= \frac{17,5}{6} \approx 2,92$

Donc $\sigma_x = \sqrt{2,92} \approx 1,71$.

2. $\text{var}(y) \approx \frac{[-0,7]^2 + [-0,4]^2 + [-0,5]^2 + 0,2^2 + 0,5^2 + 0,7^2}{6}$

$\approx \frac{1,68}{6} \approx 0,28$

Donc $\sigma_y \approx \sqrt{0,28} \approx 0,53$.

3. $\sigma_{xy} \approx \frac{1,75 + 0,6 + 0,25 + 0,1 + 0,75 + 1,75}{6} \approx 0,87$

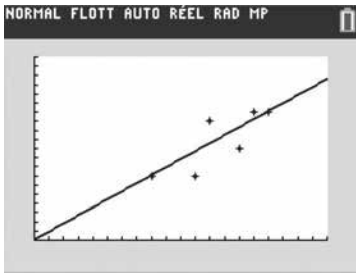
4. $a = \frac{\sigma_{xy}}{\text{var}(x)} \approx 0,3$ et $b = \bar{y} - a\bar{x} \approx 7,7$

Donc l'équation de la droite de régression est :

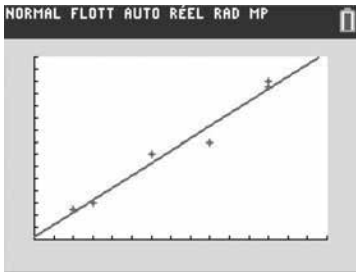
$y \approx 0,3x + 7,7$

$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \approx 0,96$

39. 1. Pour la série statistique (x, y) :



Pour la série statistique (x', y') :



2. Pour le nuage (x, y) : $y = 0,879x + 0,092$

Pour le nuage (x', y') : $y' = 1,014x + 0,231$

3. $r_1 \approx 0,757$ et $r_2 \approx 0,985$

4. La corrélation entre y' et x' est meilleure que celle entre x et y car r_2 est plus proche de 1.

Donc les écarts entre les températures réelles y'_i et les températures prévues x'_i ne sont pas très importants.

Cela signifie que les prévisions sont meilleures pour le lundi 9 mars que pour toute la semaine du 9 mars.

Cela confirme l'affirmation.

40. $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{75}{\sqrt{124 \times 236}} \approx 0,438$

Le coefficient de corrélation linéaire est plus proche de 0 que de 1, donc il ne semble pas y avoir de corrélation linéaire entre les variables y et x .

41. $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{-105}{\sqrt{112 \times 109}} \approx -0,95$

Le coefficient de corrélation linéaire est assez proche de -1 , donc on peut ajuster le nuage de points par une droite.

La droite des moindres carrés a pour coefficient directeur :

$a = \frac{\sigma_{xy}}{\text{var}\{x\}} = \frac{-105}{112} = -\frac{15}{16}$.

Ajustements, extrapolation et interpolation

42. 1.

x	0	2	4	6
y	34	34,9	35,4	35,9

2. L'équation de la droite d'ajustement affine obtenue avec la méthode des moindres carrés est : $y = 0,3x + 34,1$

3. 2022 est l'année de rang 10.

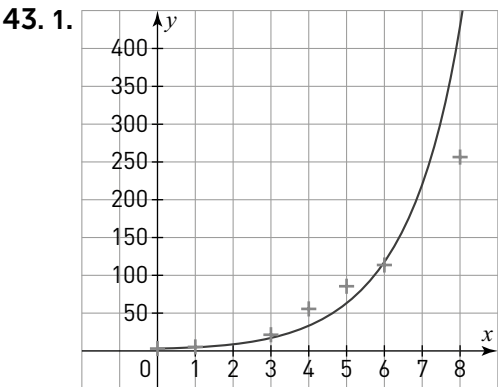
Donc $y = 0,3 \times 10 + 34,1 = 37,1$.

Ainsi l'âge moyen du premier mariage pour une femme, en France, pourrait être 37,1 ans en 2022.

4. $40 = 0,3x + 34,1 \Leftrightarrow x \approx 20$

L'année de rang 20 est l'année 2032.

Donc si cette tendance se poursuit, l'âge moyen pourrait être 40 ans en 2032.



2. On pose $y'_i = \ln(y_i)$ pour tout entier i entre 1 et 7.

x_i	0	1	3	4
y'_i	0,405	1,609	2,996	4,007
x_i	5	6	8	
y'_i	4,443	4,736	5,545	

D'après la calculatrice, la droite de régression de y' en x a pour équation : $y' \approx 0,641x + 0,919$.

Or $y' = \ln(y)$ donc

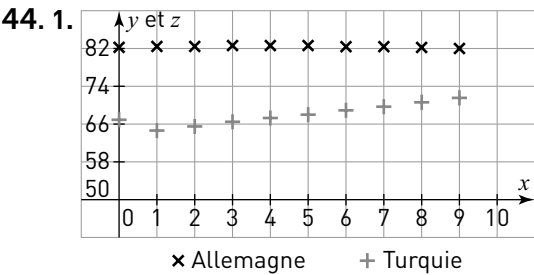
$\ln(y) \approx 0,641x + 0,919 \Leftrightarrow y \approx e^{0,641x+0,919}$

$\Leftrightarrow y \approx e^{0,641x} \times e^{0,919}$

$\Leftrightarrow y \approx 2,5e^{0,641x}$

3. $2,5e^{0,641 \times 2} \approx 9$ et $2,5e^{0,641 \times 7} \approx 222$.

Ainsi on peut estimer que les ventes en 2009 étaient de 9 millions de smartphones, et en 2014 de 222 millions.



2. a) $y = -0,02x + 82,42$

b) $z = 0,68x + 64,88$

3. $0,68x + 64,88 \geq -0,02x + 82,42$

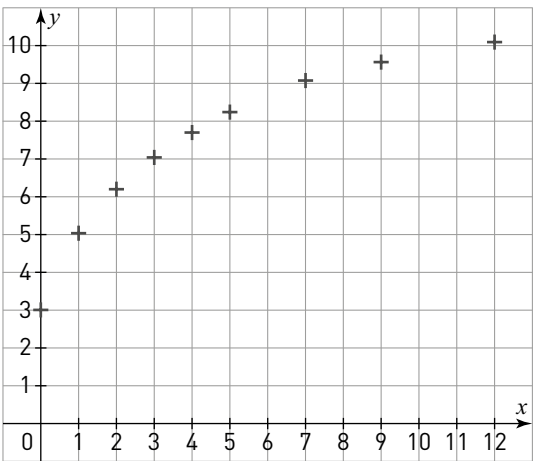
$\Leftrightarrow 0,70x \geq 17,54 \Leftrightarrow x \geq 25,06$

L'année de rang 25 est l'année 2025.

Donc on peut prévoir que, si l'évolution se poursuit ainsi, la population turque dépassera la population allemande en 2025.

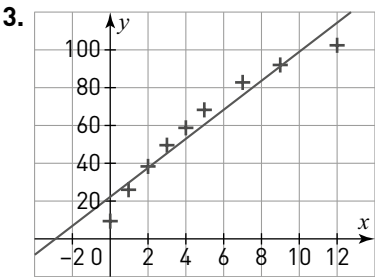
Autres ajustements

45. 1. Le nuage de points a une forme courbée non rectiligne, donc l'ajustement affine ne semble pas être le plus pertinent.



2. Attention : Il faut lire l'équation $y'_i = y^2$.

x	0	1	2	3	4
y'	9,06	25,4	38,69	49,84	59,44
x	5	7	9	12	
y'	68,06	82,63	92,35	102,41	



Le coefficient de corrélation linéaire r est environ égal à 0,97.

Donc un ajustement affine du nuage (x, y') semble mieux convenir.

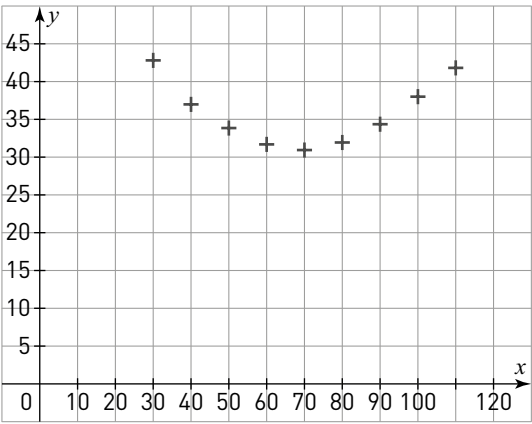
4. $y' = 7,66x + 22,04$

$y' = y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{y'} \Leftrightarrow y = \sqrt{7,66x + 22,04}$

5. $y = \sqrt{7,66 \times 18 + 22,04} \approx 12,65$

Ce nourrisson pourrait peser 12,65 kg à l'âge de 18 mois.

46. 1.



2. Ce nuage de points a la forme d'un arc de parabole convexe dont le sommet semble situé au niveau du point M_5 .

Donc une parabole convexe de sommet (70 ; 31) semble être un bon modèle d'ajustement du nuage.

3. a) $f(x)$ est une expression du second degré, écrite sous forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = 70$ et $\beta = 31$ et $a > 0$.

Donc sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est une parabole convexe de sommet (70 ; 31).

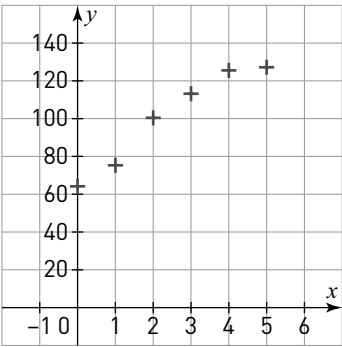
Cela correspond au modèle d'ajustement choisi à la question 2.

b) Attention : il s'agit du point $M_4(60 ; 31,8)$.

$M_4 \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow f(60) = 31,8$
 $\Leftrightarrow a(60 - 70)^2 + 31 = 31,8$
 $\Leftrightarrow 100a + 31 = 31,8$
 $\Leftrightarrow a = \frac{0,8}{100} = \frac{1}{125}$

4. $f(20) = 51$ donc il faut prévoir une consommation de 51 L pour une vitesse de 20 km · h⁻¹.

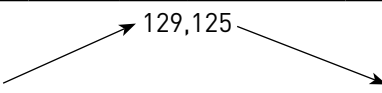
47. 1. a) et 2. b)



b) G(2,5 ; 100,7)

2. a) $f'(x) = -4x + 23$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -4x + 23 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{23}{4}$. Donc :

x	0	5,75	6
$f'(x)$	+	0	-
f			

c) **Attention** : On cherche le bénéfice fait en 2018. 2018 est l'année de rang 6. Or $f(6) = 129$. Donc on peut prévoir un bénéfice de 129 000 € en 2018.

Exercices bilan

p. 242

48. Ajustement et recettes

1. $r \approx -0,983$. Ce résultat étant proche de -1 , on peut ajuster le nuage de points par une droite.

2. $y = -4x + 224$

3. a) $R(x) = x \cdot y$.

Donc $R(x) = x(-4x + 224) = -4x^2 + 224x$

b) $R(x)$ est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$, avec $a = -4$, $b = 224$ et $c = 0$. Sa représentation graphique est une parabole concave de sommet

$S(\alpha ; \beta)$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{224}{-8} = -28$. Donc $R(x)$ est

maximale lorsque $x = 28$. Donc pour un prix de vente de 28 €, la recette serait maximale.

49. Quel ajustement choisir ?

1. a) $r_1 \approx 0,995$

b) $r_2 \approx 0,995$

c) Les deux coefficients de corrélation linéaire sont presque identiques, donc l'ajustement exponentiel ne semble pas plus approprié que l'ajustement affine. Donc on ne peut pas affirmer que la progression soit exponentielle.

2. Si on rajoute le point (5 ; 44) dans le nuage on constate que l'ajustement exponentiel est un peu meilleur : $r'_2 \approx 0,996$ 3 alors que $r'_1 \approx 0,987$ 3.

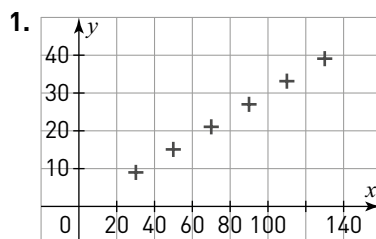
En posant $y' = \ln(y)$ on obtient une série statistique (x, y') que l'on peut ajuster par une droite d'équation $y' = 0,39x + 1,87$.

Ce qui donne $y = e^{0,39x+1,87}$. En 2020, année de rang 6, le nombre d'adhérents pourraient être d'environ $y = e^{0,39 \times 6 + 1,87} \approx 67$.

Donc l'affirmation est vraie.

50. Distance d'arrêt

A ► Étude de la série statistique à deux variables : vitesse x et distance de réaction y



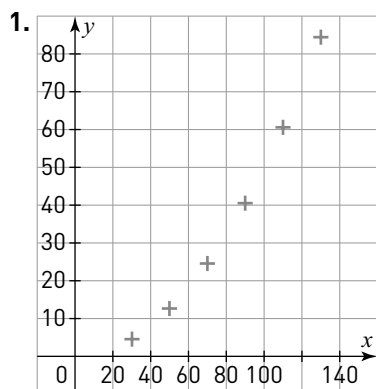
2. $y = 0,3x$

3. a) $y = 0,3 \times 140 = 42$. Donc on peut estimer que la distance de réaction à $140 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ est 42 m.

b) $0,3x < 3 \Leftrightarrow x < 10$.

Donc pour que la distance de réaction soit inférieure à 3 m, il faudrait rouler à moins de $10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

B ► Étude de la série statistique à deux variables : vitesse x et distance de freinage y'



y'	4,5	12,5	24,5	40,5	60,5	60,5
$z = \sqrt{y'}$	2,12	3,54	4,95	6,36	7,78	7,78

b) $z = ax + b$ avec $a \approx 0,070$ 710 68 et $b \approx 6,2 \times 10^{-15}$. Donc, en arrondissant les coefficients, on a bien $z \approx 0,071x$.

c) On en déduit que $\sqrt{y'} = 0,071x$.

Et donc $y' = (0,071x)^2 \approx 0,005x^2$.

3. a) $f(140) = \frac{140^2}{200} = 98$.

La distance de freinage est 98 m pour un véhicule roulant à $140 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

b) D'après les questions précédentes, la distance d'arrêt pour un véhicule roulant à $140 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ est égale à $98 + 42 = 140$ m.

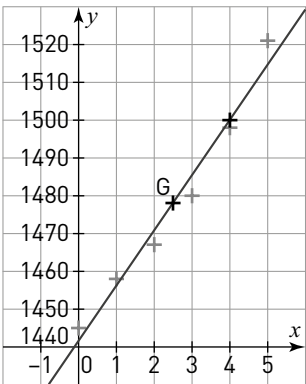
Exercices Préparer le BAC
Je me teste p.244

- 51. B
- 52. D
- 53. D
- 54. B

Exercices Préparer le BAC
Je révise p. 245

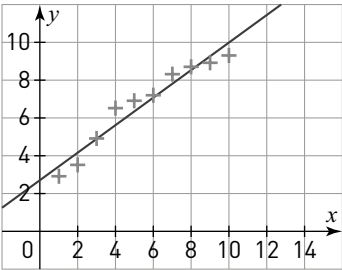
55. Salaire mensuel

1. et 3. b)



- 2. G(2,5 ; 1 478)
- 3. a) $y = 14,657x + 1\,441,524$
- 4) a) 2023 est l'année de rang 9.
Donc en utilisant l'équation de la droite d'ajuste-
ment on a :
 $y = 14,657 \times 9 + 1\,441,524 = 1\,573,437$
Ainsi on peut estimer qu'en 2023 le SMIC brut
mensuel sera d'environ 1 573 €.
- b) $14,657x + 1\,441,524 > 1\,700$
 $\Leftrightarrow 14,657x > 258,476$
 $\Leftrightarrow x > 17,6$
Donc le SMIC brut mensuel pourrait dépasser 1 700 €
l'année de rang 18, c'est-à-dire en 2014 + 18 = 2032.

56. Boisson énergisante
A ► Modélisation par un ajustement affine
1. et 2. b)



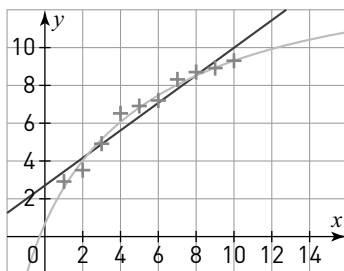
- 2. a) Avec la calculatrice on trouve l'équation
de la droite des moindres carrés : $y = 0,73x + 2,71$.
L'année 2023 correspond au rang 14.
On peut lire sur le graphique ou calculer :
 $y = 0,73 \times 14 + 2,71 = 12,93$.
Ainsi en 2023 l'entreprise pourrait vendre environ
12,9 millions de boissons.

B ► Modélisation par une fonction rationnelle
1. a)

x	1	2	3	4	5
f(x)	2,61	4,04	5,17	6,09	6,86
x	6	7	8	9	10
f(x)	7,5	8,05	8,52	8,94	9,3

- b) La fonction semble strictement croissante sur
[1 ; 20].
- c) $f(x) = 15 - 285 \times \frac{1}{3x + 20}$
Or la fonction $x \mapsto \frac{1}{3x + 20}$ est de la forme $\frac{1}{v}$ avec
 $v(x) = 3x + 20$ fonction affine non nulle et dérivable
sur [1 ; 20] telle que $v'(x) = 3$.
Ainsi la fonction f est dérivable sur [1 ; 20] :
 $f'(x) = 0 - 285 \times \frac{-3}{(3x + 20)^2} = \frac{855}{(3x + 20)^2}$
- d) $f'(x)$ est le quotient du nombre positif 855 par
 $(3x + 20)^2$ qui est un « carré » donc toujours positif.
Ainsi pour tout réel x de [1 ; 20], $f'(x) > 0$.
On peut en déduire que la fonction f est stricte-
ment croissante sur [1 ; 20].

e)



2. a) $f(14) = 10,4$.

Donc selon ce modèle, en 2023 on peut prévoir 10,4 millions de boissons vendues.

b) D'après le graphique, on remarque que la courbe de la fonction atteint 10,8 en ordonnée lorsque $x = 16$.

On en déduit que la quantité de boissons vendues sera supérieure à 10,8 millions en 2025 (année de rang 16).

THÈME 1 Modèles définis par une fonction d'une variable

Manuel p. 247-251

I. Introduction

L'objectif de ces exercices est de permettre à travers des problèmes issus de différents domaines (SVT, Sciences Physiques, Économique, sécurité routière,...) de donner une vision élargie de l'emploi des mathématiques en dehors du champ lui-même.

C'est également l'occasion de réinvestir les connaissances abordées en classe de Seconde et de Première, notamment l'étude des variations et des extremums, ainsi que celles introduites pendant l'année de Terminale notamment les notions de convexité, de limite d'une fonction ou l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires.

II. Corrigés des TP et des problèmes thématiques

1. Alcool au volant

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Déterminer la durée minimale nécessaire, après absorption d'alcool pour reprendre le volant.

A ► Observation graphique

1. Lorsque l'alcool est absorbé à jeun, le taux est maximal au bout de 1 h et est égal à environ 1,45 g/L.

Lorsque l'alcool est absorbé après ingestion des aliments, le taux est maximal au bout de 1,5 h et est égal à environ 0,55 g/L.

2. Au bout de trois heures, lorsque l'alcool est absorbé à jeun, le taux est d'environ 0,6 g/L. Donc le conducteur n'aura pas respecté la législation.

Au bout de trois heures, lorsque l'alcool est absorbé après ingestion des aliments, le taux est de 0,4 g/L.

Donc le conducteur respectera la législation.

3. Lorsque l'alcool est absorbé à jeun, le conducteur peut reprendre le volant au bout de 5 h.

Dans le deuxième cas, il peut reprendre le volant au bout de 4 h 45 min.

B ► Modélisation

1. a) $f_2'(t) = abte^{bt} + ae^{bt} = ae^{bt}(bt + 1)$

$$b) f_2'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow ae^{b \times \frac{3}{2}} \left(b \times \frac{3}{2} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow ae^{b \times \frac{3}{2}} = 0 \text{ ou } b \times \frac{3}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ (impossible) ou } b = -\frac{2}{3}$$

$$2. f_2(3) = 0,4 \Leftrightarrow a \times 3e^{-\frac{2}{3} \times 3} = 0,4$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{2}{15}e^2 \approx 0,985$$

$$3. f_1'(t) = 4e^{-t}(1 - t)$$

Ainsi, f_1 admet un maximum pour $t = 1$ et sa valeur est $f_1(1) = 4e^{-1} \approx 1,5$ g/L.

$$f_1(t) = 0,985te^{\frac{2}{3}t} \Leftrightarrow \frac{4}{0,985} = e^{-\frac{2}{3}t+t}$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{4}{0,985}\right) = -\frac{2}{3}t + t$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{4}{0,985}\right) = \frac{1}{3}t$$

$$\Leftrightarrow t = 3\ln\left(\frac{4}{0,985}\right)$$

$$\Leftrightarrow t \approx 4,2$$

Cela signifie qu'au bout d'environ 4,2 h soit 4 h 12 min, le taux d'alcoolémie est identique que l'on ait absorbé l'alcool à jeun ou après ingestion des aliments.

2. Satellites dans l'espace

- **Durée estimée** : 20 min
- **Objectif** : Déterminer le temps restant avant la rentrée atmosphérique d'un satellite.

A ► Étude d'un premier satellite

1. Graphiquement, l'altitude minimale est d'environ 490 jours.

2. Il est d'environ 1 500 jours.

3. Sur le graphique, on voit qu'approximativement $T(500) = 1\,400$

Soit $K \times 0,012e^{0,025(500-150)} = 1\,400$

$$\Leftrightarrow Ke^{8,75} = \frac{1\,400}{0,012} \Leftrightarrow K = \frac{1\,400}{0,012} e^{-8,75} \approx 18,5$$

B ► Étude d'un satellite Hubble

1. $T(575) = 0,132e^{0,025(575-150)}$
 $\approx 5\,431,91$ jours

2. On a $\lim_{h \rightarrow +\infty} e^{0,025(h-150)} = +\infty$

Donc $\lim_{h \rightarrow +\infty} T(h) = +\infty$.

3. a) $T'(h) = 0,025 \times 0,0132 e^{0,025(h-150)}$
 $= 0,000\,33e^{0,025(h-150)}$

b) On sait que quel que soit le réel h , $e^{0,025(h-150)} > 0$ donc $T'(h) > 0$.

La fonction T est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

c) Cela signifie que, plus l'orbite du satellite Hubble est éloignée de la Terre, plus le nombre de jours avant la rentrée atmosphérique est importante.

4. a) $T(h+10) = 0,132e^{0,025(h+10-150)}$
 $= 0,132e^{0,025(h-150+0,025 \times 10)}$
 $= 0,132e^{0,025(h-150)} \times e^{0,25}$
 $= T(h) \times e^{0,25}$

b) Or $e^{0,25} \approx 1,284$.

Cela revient donc à multiplier le temps restant par environ 1,28 qui correspond à une augmentation de 28 %.

3. Aire maximale d'un trapèze

- **Durée estimée** : 35 min
- **Objectif** : Déterminer l'aire maximale d'un trapèze inscrit à l'intérieur d'une parabole.

A ► Recherche de f

1. $f(0) = 5$; $f(-2) = 0$ et $f(6) = 0$

D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} c = 5 \\ a \times (-2)^2 + b(-2) + c = 0 \\ a \times 6^2 + b \times 6 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ b = \frac{5}{3} \\ a = -\frac{5}{12} \end{cases}$$

$$2. f(x) = -\frac{5}{12}x^2 + \frac{5}{3}x + 5$$

$$f'(x) = -\frac{5}{6}x + \frac{5}{3} \text{ et } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

f est donc croissante sur $[-2; 2]$ puis décroissante sur $[2; 6]$.

Son axe de symétrie est la droite d'équation $x = 2$.
 (on a $f(x+2) = f(2-x)$)

B ► Optimisation d'une aire

1. $DC = 2(x-2)$

$$2. \mathcal{A}(x) = \frac{(8+2(x-2)) \times f(x)}{2}$$

$$= -\frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{3}x^2 + \frac{50}{3}x + 20$$

$$3. \mathcal{A}'(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{50}{3}$$

$$\Delta = \frac{1600}{9}, x_1 = -2 \text{ et } x_2 = \frac{10}{3}$$

$\mathcal{A}$ est croissante sur $\left[-2; \frac{10}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{10}{3}; 6\right]$.

4. L'aire est donc maximale pour $x = \frac{10}{3}$ et est

égale à $\frac{5\,120}{81} \approx 63,2$ u.a.

4. Coût minimal moyen

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Déterminer le minimum d'un coût moyen de la production d'un article.

1. $C(x) = 1,5x^2 - 9x + 24$

$C'(x) = 3x - 9$

2. a) $C'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 3$

Ainsi C est décroissante sur $[1 ; 3]$ et croissante sur $[3 ; 7]$.

b) Le coût moyen est donc minimal pour 3 000 articles produits c'est-à-dire pour 3 milliers.

5. Étude de marché

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Déterminer un bénéfice maximal.

A ► Coût marginal

1. $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$

$$= -\frac{1}{12}x^3 + \frac{13}{16}x^2 + \frac{41}{48}x + \frac{239}{48}$$

2. a) $C'(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{15}{16}x^2 + 5$

3. Ces deux courbes sont très proches l'une de l'autre.

B ► Variation du coût marginal

1. $C_m(6) = C'(6) = 20,75$

Le coût marginal pour 600 paniers vendus est donc de 20,75 euros.

2. a) $C''(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{8}x$

b) La fonction C est convexe sur un intervalle si et seulement si C'' est positive sur un intervalle.

$C''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 7,5$

Donc C est convexe sur $[0 ; 7,5]$.

c) En $x = 7,5$, C'' s'annule et change de signe donc le point d'abscisse 7,5 est un point d'inflexion de la courbe représentative de C .

Ainsi, pour $x > 7,5$, $C''(x) < 0$ donc le coût marginal C' diminue.

C ► Bénéfice maximal

1. $R(x) = 20x$

2. $B(x) = R(x) - C(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{5}{16}x^3 + 15x - 10$

3. $B'(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{15}{16}x^2 + 15$

4. a) $B''(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{15}{8}x = \frac{1}{4}x\left(x - \frac{15}{2}\right)$

$B''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{15}{2}$

Donc B'' est positive sur $\left[\frac{15}{2}; 10\right]$ et négative sur $\left[0; \frac{15}{2}\right]$.

b) Ainsi B' est croissante sur $\left[\frac{15}{2}; 10\right]$ et décroissante sur $\left[0; \frac{15}{2}\right]$.

c) B' est strictement décroissante sur $\left[0; \frac{15}{2}\right]$ avec $B'(0) = 15$ et $B'(7,5) = -\frac{165}{64}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0 ; 7,5]$.

De même, B' est strictement croissante sur $\left[\frac{15}{2}; 10\right]$ avec $B'(7,5) = -\frac{165}{64}$ et $B'(10) = \frac{55}{12}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in [7,5 ; 10]$.

d) $\alpha \approx 5,69$ et $\beta \approx 9,05$.

e) $B'(x)$ est positive sur $[0 ; \alpha]$ et sur $[\beta ; 10]$ et négative sur $[\alpha ; \beta]$.

5. Ainsi, B est croissante sur $[0 ; \alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha ; \beta]$ et croissante sur $[\beta ; 10]$.

Le bénéfice est maximal pour $x = \alpha$ et vaut environ 39,6 centaines d'euros.

6. Évolution d'une population

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Déterminer si une espèce est en voie de disparition.

1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,053x} = 0$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b) Ainsi la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

c) À long terme, la population de hérissons européens au Royaume-Uni disparaîtra.

2. a) $f'(x) = -1,855e^{-0,053x}$

b)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
Variations de f	35	0

$f(0) = 35$

3. $f(67) = 35e^{-0,053 \times 67} \approx 1,004$

Ainsi, en 2017, la population de hérissons européens au Royaume-Uni est d'environ un million.

4. a) $f(x) < 10 \Leftrightarrow 35e^{-0,053x} < 10$

$$\Leftrightarrow -0,053x < \ln\left(\frac{10}{35}\right) \Leftrightarrow x > \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{-0,053}$$

avec $\frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{-0,053} \approx 23,637$. L'ensemble des solutions

de l'inéquation est $\left[\frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{-0,053}; +\infty \right[$ soit en arrondissant

à l'unité $[24; +\infty[$.

b) Cela signifie qu'à partir de l'année 1974, la population de hérissons européens au Royaume-Uni est strictement inférieure à 10 millions.

5. Trois générations correspondent à 15 ans.

$f(15) \approx 15,8$ et donc $\frac{15,8 - 35}{35} \approx -0,548$

Il y a donc eu une baisse d'environ 54,8 % de la population de hérissons européens en 15 ans.

En effectuant le même type de calcul, on trouve une baisse d'environ 55 % entre 1965 et 1980, et d'environ 73,24 % entre 1980 et 2005.

Donc la population de hérissons européens est considérée comme étant en danger au Royaume-Uni.

THÈME 2 Modèles d'évolution

Manuel p. 252-257

I. Introduction

L'objectif principal de ce thème est d'étudier divers modèles d'évolutions (conformément au programme) dans des cadres variés : amortissement d'une dette, décroissance radioactive, vitesse dans un milieu avec frottements et évolutions de populations.

Différents objets mathématiques y sont mobilisés puisqu'on utilisera aussi bien les suites dans les modèles discrets, que les fonctions, données a priori ou par une équation différentielle, dans les modèles continus. À ce titre, le passage du discret au continu est un des enjeux majeurs de ce thème.

Une attention particulière a été apportée aux évolutions de populations : les TP 4, 5 et 6 sont en particulier étroitement liés et offrent une progression du modèle de Malthus au modèle de Verhulst continu (en passant par le modèle de Verhulst discret), présentant leurs atouts et limites.

Il est enfin à noter que nous avons souhaité conserver le formalisme et les notations utilisés par les spécialistes de ces évolutions, les élèves pratiquant l'option mathématiques complémentaires ayant vocation à utiliser les mathématiques appliquées dans leurs futures études.

II. Corrigés des TP et des problèmes thématiques

1. TP Amortissement d'une dette par annuités constantes

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Utiliser les suites pour modéliser un problème : le remboursement d'un emprunt par annuités constantes.

1. $u_1 = 50\,000 \times 0,015 = 750$,

$v_1 = 3\,000 - 750 = 2\,250$ et

$w_2 = 50\,000 - 2\,250 = 47\,750$.

2. $v_n = 3\,000 - u_n$

3. $w_{n+1} = w_n - v_n$

5. On écrit la valeur 3 000 dans chaque cellule de la colonne E.

6. a) $=B2*0,015$

b) $=E2-D2$ ou $=3000-D2$

c) $=B2-C2$

8. On obtient :

	A	B	C	D	E
1	Année	Montant dû (w_n)	Amortissement (v_n)	Intérêts (u_n)	Annuité
2	1	50000	2250	750	3000
3	2	47750	228375	716,25	3000
4	3	45466,25	2318,01	681,99	3000
5	4	43148,24	2352,78	647,22	3000
6	5	40795,47	2318,01	611,93	3000
7	6	38407,40	2388,07	576,11	3000
8	7	35983,51	2423,89	539,75	3000
9	8	33523,26	2460,25	502,85	3000
10	9	31026,11	2534,61	465,39	3000
11	10	28491,50	2572,63	427,37	3000
12	11	25918,88	2611,22	388,78	3000
13	12	23307,66	2650,39	349,61	3000
14	13	20657,27	2690,14	309,86	3000
15	14	17967,13	2730,49	269,51	3000
16	15	15236,64	2771,45	228,55	3000
17	16	12465,19	2813,02	186,98	3000
18	17	9652,17	2855,22	144,78	3000
19	18	6796,95	2898,05	101,95	3000
20	19	3898,90	2941,52	58,48	3000
21	20	957,39	2985,64	14,36	3000

Donc le prêt sera remboursé durant l'année n° 20.

2. Décroissance radioactive

- **Durée estimée :** 20 min
- **Objectif :** Utiliser les suites pour modéliser un problème : déterminer la demi-vie de l'iode 131.

1. $u_0 = 0$ mg et $u_1 = 0,01$ mg
2. Pour tout entier $n > 0$, $u_{n+1} = u_n \times 0,82$.
3. Pour tout entier $n > 0$, $u_n = 0,01 \times 0,82^{[n-1]}$
4. $0,01 \times 0,82^{[n-1]} < 0,001 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,1}{\ln 0,82} + 1$

$$\text{Or } \frac{\ln 0,1}{\ln 0,82} + 1 \approx 12,6$$

Il faut donc 13 jours pour que la masse d'iode 131 soit inférieure à 0,001 mg.

5. $t_1 \approx 8$ jours.

3. TP Déplacement d'un solide dans un liquide visqueux

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Déterminer la vitesse limite ou l'angle d'un lancer avec les fonctions.

Remarque : En collège, les élèves étudient la chute d'une bille dans l'air et montrent que la bille ne peut dépasser une vitesse. Ils étudient également divers mouvements.

L'objectif de ce TP est d'étudier le mouvement de la bille dans un autre milieu, un milieu qui la ralentit avec donc une force de frottement. Il pourrait être intéressant de comparer les deux modèles.

Dans une première partie, on étudie la chute sans vitesse initiale ce qui permet de montrer que la vitesse limite existe toujours.

Dans une deuxième partie, on étudie la trajectoire d'une bille. La question 1 consiste à définir les limites du modèle proposée. Dans les questions 2 et 3, on étudie la fonction pour définir comment lancer la bille pour qu'elle atteigne une hauteur maximale.

A ► Chute sans vitesse initiale

1. Cette équation différentielle est de la forme $y' = ay + b$ (dont les solutions sont les fonctions

$$x \mapsto Ce^{at} - \frac{b}{a} \text{ avec } a = -\frac{k}{m} \text{ et } b = \alpha g).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } v(t) &= Ce^{-\frac{k}{m}t} - \frac{\alpha g}{-\frac{k}{m}} \\ &= Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{\alpha mg}{k} \end{aligned}$$

après simplification.

Comme, de plus, la vitesse initiale est nulle, on a :

$$v(0) = 0 \Leftrightarrow Ce^{-\frac{k}{m} \times 0} + \frac{\alpha mg}{k} = 0$$

$$\Leftrightarrow C = -\frac{\alpha mg}{k}$$

$$\text{Donc } v(t) = -\frac{\alpha mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{\alpha mg}{k} = \frac{\alpha mg}{k} \left(-e^{-\frac{k}{m}t} + 1 \right)$$

2. La fonction v est dérivable et :

$$v'(t) = \frac{\alpha mg}{k} \left(\frac{k}{m} e^{-\frac{k}{m}t} \right) = \alpha g e^{-\frac{k}{m}t} > 0$$

d'après les conditions sur α et g .

On en déduit :

t	0	$+\infty$
$v'(t)$		+
Variations de v		

avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{k}{m}t = -\infty$ (car $k > 0$ et $m > 0$) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\text{Donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\frac{k}{m}t} = 0 \text{ par composition puis } \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{\alpha mg}{k}$$

Donc la bille ne pourra pas dépasser la vitesse limite de $\frac{\alpha mg}{k}$.

B ► Chute avec vitesse initiale

1. b) La distance maximale semble être de 1 m car la courbe coupe toujours l'axe des abscisses avant 1.

c) Quand $b \leq 2$, il semble que $f(x)$ soit négatif donc que la trajectoire ne soit pas définie.

e) Pour $b \approx 5,69$ la hauteur maximale est environ 1,6 m.

2. a) $b > 2$

b) La fonction f est définie et dérivable sur $[0 ; 1[$ et

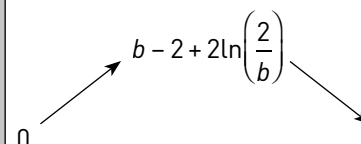
$$f'(x) = b + 2 \frac{-1}{1-x} = \frac{b(1-x)}{1-x} - \frac{2}{1-x} = \frac{-bx + b - 2}{1-x}.$$

De plus :

- pour $0 \leq x < 1$, on a $0 \geq -x > -1$ puis $1 \geq 1-x > 0$
- $-bx + b - 2 > 0 \Leftrightarrow -bx > 2 - b$

$$\Leftrightarrow x < \frac{2-b}{-b} \Leftrightarrow x < 1 - \frac{2}{b}$$

On a donc :

x	0	$1 - \frac{2}{b}$	1
$f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

$$\text{où } f\left(1 - \frac{2}{b}\right) = b\left(1 - \frac{2}{b}\right) + 2\ln\left(1 - \left(1 - \frac{2}{b}\right)\right) = b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$$

c) On considère la fonction :

$$g : b \mapsto b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right) \text{ avec } b \in]2 ; 10].$$

$$\text{On a } g(b) = b - 2 + 2\ln(2) - 2\ln(b)$$

$$\text{Donc } g'(b) = 1 - \frac{2}{b} = \frac{b-2}{b} > 0 \text{ sur } [2 ; 10] \text{ sauf en } 2$$

où elle s'annule. Donc, on a :

b	2	10
$g'(b)$	0	+
Variation de b		

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 1,6$.

Donc, pour tout $b \leq \alpha$, le maximum de f est inférieur ou égal à 1,6 c'est-à-dire que la bille a une hauteur maximale inférieure ou égale à 1,6 m.

La calculatrice donne $\alpha \approx 5,69$.

3. a) Cette équation est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\text{Soit } y = (b - 2)x = 3,65x.$$

b) $OA = 1$ et $AB = 3,65$.

D'après le théorème de Pythagore :

$$OB = \sqrt{1^2 + 3,65^2} = \sqrt{14,3225}$$

$$\text{c) } \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{14,3225}}$$

$$\text{d) } \theta \approx 74,7^\circ$$

4. Dynamique des populations : modèle de Malthus

• **Durée estimée :** 55 min

• **Objectif :** Comprendre la modélisation d'un phénomène biologique, l'appliquer et étudier ses limites.

Remarque : Malthus est un pasteur confronté à la misère de la population entre 1794 et 1800 car les récoltes ont été mauvaises.

Il souhaite démontrer que la population croît de manière exponentielle (le coefficient de croissance de la population est constant) et que cette croissance est freinée par le milieu naturel.

La première partie permet d'établir le modèle de Malthus en partant de l'hypothèse initiale.

La deuxième partie est l'étude de la population de la levure de bière sur un temps court.

Le modèle de Malthus correspond à la croissance observée sur un temps réduit.

En agronomie, on recherche les levures pour lesquelles les croissances sont le plus rapide possible.

Elles sont ensuite commercialisées pour la fabrication du pain et de la bière.

Il s'agit de montrer, dans la troisième partie, que le modèle ne peut s'appliquer que si le milieu naturel constitue une limite à la croissance d'une population.

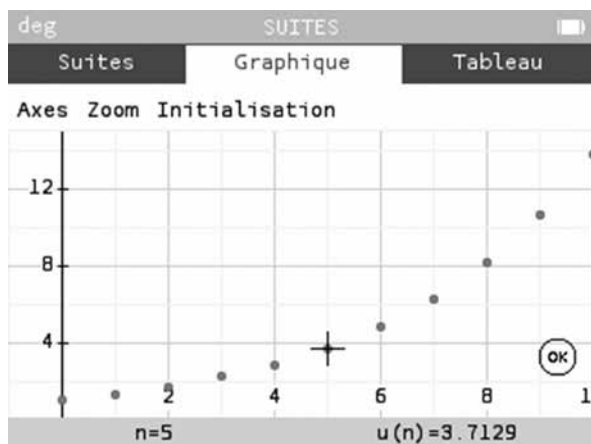
A ► Étude discrète

$$1. P_{n+1} = P_n + t_{\text{nat}} P_n - t_{\text{mor}} P_n \\ = P_n(1 + t_{\text{nat}} - t_{\text{mor}}) = P_n(1 + r)$$

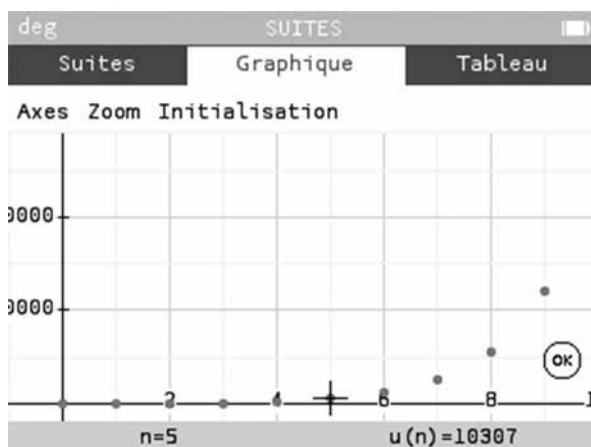
2. (P_n) est géométrique de raison $1 + r$ donc

$$P_n = P_0 \times (1 + r)^n.$$

3. • Pour $P_0 = 1$ et $r = 0,3$:



• Pour $P_0 = 200$ et $r = 1,2$:



Remarque : les deux graphiques semblent proches mais bien faire attention aux unités en ordonnées.

4. On a $P_n = P_0(1 + r)^n = P_0 e^{\ln(1+r)n}$ donc l'évolution est exponentielle par rapport à la variable n .

B ► Une application : population de la levure de bière

1. Les points semblent quasi alignés.

2. Graphiquement, on trouve $y = 0,0067t - 3$.

3. On a $\ln(N(t)) = 0,0067t - 3$

$$\text{Soit } N(t) = e^{0,0067t-3} = e^{-3} e^{0,0067t}$$

ce qui correspond bien à un modèle exponentiel.

C ► Les limites du modèle

1. P_{13} correspond à la population en $1944 + 13 = 1957$ soit 1 350 d'après l'énoncé.

2. On sait que $P_{13} = P_0(1 + r)^{13}$

$$\text{Soit } 1\,350 = 29(1 + r)^{13} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \ln(1 + r) = \frac{\ln\left(\frac{1350}{29}\right)}{13}$$

$$\Leftrightarrow r = e^{\frac{\ln\left(\frac{1350}{29}\right)}{13}} - 1 \approx 0,344$$

On a donc $P_n = 29 \times 1,344^n$

3. La population en 1963 est $P_{19} = 29 \times 1,344^{19} \approx 7\,980$ d'après le modèle ce qui est certes assez loin des 6 000 effectifs mais néanmoins dans le même ordre de grandeur.

4. On peut penser que les rennes sont trop nombreux sur l'île par rapport aux ressources alimentaires présentes ce qui a entraîné une augmentation rapide du taux de mortalité.

Remarque : l'étude biologique montre que les rennes sont morts en un hiver très rigoureux, celui de 64. Ils n'avaient plus accès à leur nourriture sous la neige et pas de possibilité de migration. Le milieu naturel d'une population est donc bien un élément important qui n'est pas modélisé avec le modèle de Malthus.

5. Dans ce cas, la progression de la population est exponentielle d'après le modèle mais si les ressources n'augmentent pas dans « les mêmes proportions », cela entraîne un manque de ressources pour chaque individu.

5. TP Dynamique des populations : modèle de Verhulst discret

• **Durée estimée :** 30 min

• **Objectif :** Étudier le modèle de Verhulst et son application.

Remarque : Idéalement, ce TP est la suite du TP4 où l'on montre que la croissance d'une population dépend également de son milieu naturel.

Malthus reprend donc le principe du modèle de Verhulst en modélisant les limites du milieu naturel. La première partie consiste à étudier comment l'équation logistique prend en compte le milieu naturel.

La deuxième partie consiste à l'étudier.

La troisième partie est un exemple de l'évolution d'une population suivant le modèle de Verhulst.

A ► Comprendre l'équation logistique

$$1. r \left(1 - \frac{P_n}{K} \right) = r \left(1 - P_n \times \frac{b}{r} \right) = r - bP_n$$

$$2. \lim_{P_n \rightarrow 0} (r - bP_n) = r$$

Donc r représente la différence entre les taux de natalité et mortalité quand l'effectif de la population est faible. En biologie, c'est ce que l'on appelle la croissance intrinsèque.

$$3. \lim_{P_n \rightarrow K} (r - bP_n) = r - b \times K = r - b \times \frac{r}{b} = 0$$

Donc K représente une valeur de l'effectif qui induit une stabilisation de la population.

En biologie, c'est ce que l'on appelle la capacité biotique ou capacité d'accueil.

$$4. P_{n+1} - P_n = P_n + P_n \times (r - bP_n) - P_n = P_n \times (r - bP_n) \\ = P_n \left(r - \frac{r}{K} P_n \right) = rP_n \left(1 - \frac{P_n}{K} \right)$$

B ► Exemple de suites

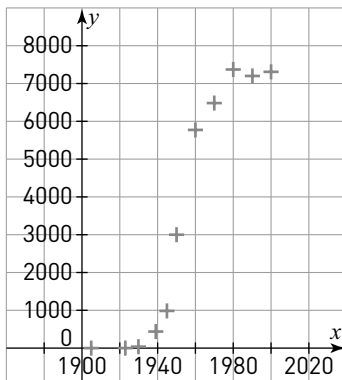
$$1. a) \boxed{=B3}$$

$$b) \boxed{=D2+D2*B\$2*(1-D2/B\$1)}$$

3. a) Elle se stabilise vers 15 individus.
b) Elle se stabilise vers 15 individus.
c) Elle oscille entre les valeurs 10 et 18 individus.

C ► Évolution d'une population d'éléphants

1. On trouve :



2. En jouant avec les coefficients, on donne $K = 7400$ et $P_0 = 10$ puis on joue sur le coefficient r . $r = 0,145$ donne un résultat plutôt satisfaisant à partir de 1950.

6. TP Modèle de Verhulst continu

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Utiliser l'équation différentielle logistique issue du modèle de Verhulst en économie.

A ► Du discret au continu

$$1. \frac{N(t+h) - N(t)}{h} \text{ tend vers } N'(t) \text{ quand } h \text{ tend vers } 0$$

en admettant que N est dérivable.

Attention : par la phrase : « On suppose que les taux de naissances (noté α) et de décès (noté β) sont proportionnels à la taille de la population » de l'énoncé, les scientifiques entendent : « On suppose que les taux de naissances et de décès d'une seconde à la suivante sont constants ».

Dans la suite, on gardera les notations α et β pour désigner ces taux d'évolution d'une seconde à l'autre bien qu'ils ne désignent pas la même chose que ceux de l'énoncé.

$$2. \text{ Dans ce cas, } \frac{N(t+h) - N(t)}{h} \text{ est toujours égal à}$$

$$N(t+1) - N(t) \text{ donc } N'(t) = N(t+1) - N(t)$$

$$\text{On a donc } N'(t) = N(t+1) - N(t) = (\alpha - \beta)N(t)$$

$$\text{Puis } N(t) = N(0) e^{(\alpha-\beta)t}.$$

3. On reconnaît le modèle de Malthus.

4. Dans le modèle de Verhulst, on a :

$$N(n+1) - N(n) = rN(n) \left(1 - \frac{N(n)}{K} \right).$$

$$\text{Soit } N(t+1) - N(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

en passant au continu donc, avec les mêmes hypothèses qu'au départ sur l'accroissement constant, on obtient :

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) \text{ comme équation logistique.}$$

B ► En économie

1. On considère l'équation :

$$N'(t) = 0,4N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{1000} \right) \\ = 0,4N(t) - \frac{0,4N^2(t)}{1000}$$

2. $P'(t) = -\frac{N'(t)}{N^2(t)}$ d'après le cours sur la dérivation.

Pour $N(t) \neq 0$ pour tout t , l'équation de la question 1 est équivalente à :

$$-\frac{N'(t)}{N^2(t)} = -0,4 \frac{1}{N(t)} + \frac{0,4}{1000} \Leftrightarrow P'(t) = -0,4P(t) + 0,0004$$

$$\text{On a donc } P(t) = Ke^{-0,4t} - \frac{0,0004}{-0,4} = Ke^{-0,4t} + 0,001$$

$$\text{Soit } \frac{1}{N(t)} = Ke^{-0,4t} + 0,001 \text{ puis } N(t) = \frac{1}{Ke^{-0,4t} + 0,001}$$

De plus, $N(0) = 100$ donc :

$$\frac{1}{K + 0,001} = 100 \Leftrightarrow K = \frac{1}{100} - 0,001 = 0,009$$

$$\text{Soit } N(t) = \frac{1}{0,009e^{-0,4t} + 0,001} = \frac{1000}{9e^{-0,4t} + 1}$$

$$3. N(t) > 500 \Leftrightarrow \frac{1000}{9e^{-0,4t} + 1} > 500$$

$$\Leftrightarrow 9e^{-0,4t} + 1 < 2$$

$$\Leftrightarrow 9e^{-0,4t} < 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,4t} < \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow -0,4t < -\ln(9)$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{\ln(9)}{0,4} \approx 5,5$$

C ► Comportement des fonctions logistiques

1. Attention, dans cette question, il faut lire :

$$K \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}} \text{ et non } K \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

$$\text{D'une part : } f'(t) = -K \frac{-r \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}{\left(1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}\right)^2}$$

$$= Kr \frac{\left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}{\left(1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}\right)^2}$$

$$\text{D'autre part : } r f(t) \left(1 - \frac{f(t)}{K}\right)$$

$$= rK \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}} \times \left(1 - \frac{K \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}}{K}\right)$$

$$= rK \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}} \times \left(1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}\right)$$

$$= rK \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}} \times \left(\frac{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}} - \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}\right)$$

$$= rK \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}} \times \left(\frac{\left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}\right)$$

$$= Kr \frac{\left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}}{\left(1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-rt}\right)^2}$$

$$\text{Ainsi : } f'(t) = r f(t) \left(1 - \frac{f(t)}{K}\right)$$

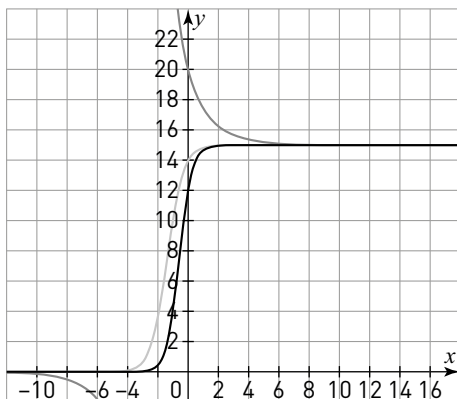
$$\text{Comme de plus } f(0) = K \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)e^{-r \times 0}}$$

$$= K \frac{1}{1 + \left(\frac{K}{y_0} - 1\right)}$$

$$= K \frac{y_0}{K} = y_0$$

f est bien solution de l'équation différentielle cherchée.

2. Dans tous les cas, on observe une stabilisation vers 15 quand t tend vers $+\infty$ de la fonction solution de l'équation logistique.



7. TP Modèle proie prédateur

- **Durée estimée :** 50 min
- **Objectif :** Établir un modèle proie prédateur à partir des données observées puis l'appliquer.

A ► Évolution d'une population de lapins sans prédateur

1. **Attention :** il est bien important de comprendre que le premier couple engendre un deuxième couple au début du 3^e mois c'est-à-dire après deux mois.

- Le temps de gestation est d'un mois puisque chaque couple engendre un nouveau couple chaque mois.
- Comme le premier couple en engendre un deuxième après deux mois avec une période de gestation de un mois cela veut dire qu'il est fertile après un mois.

2. a) $L_1 = 1$: au début du premier mois, il y a un couple.

$L_2 = 1$: au début du deuxième mois, il y a un couple.

$L_3 = 2$: au début du troisième mois, il y a deux couples.

b) $L_4 = 3$ (le premier couple en engendre un mais pas le second)

$L_5 = 5$ (le premier couple en engendre un, de même que le second)

$L_6 = 3 + 5 = 8$ (les trois couples de L_4 engendrent chacun un couple plus les 5 couples de L_5 déjà présents)

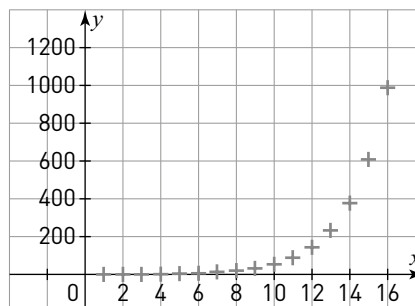
$L_7 = 5 + 8 = 13$ (les cinq couples de L_5 engendrent chacun un couple plus les 8 couples de L_6 déjà présents)

$L_8 = 8 + 13 = 21$ (les huit couples de L_6 engendrent chacun un couple plus les treize couples de L_7 déjà présents)

3. On comprend qu'au rang $n + 2$, les L_n couples du rang n engendrent un couple plus les L_{n+1} couples du rang $n + 1$ déjà présents ce qui donne donc :

$$L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$$

4. On obtient :



Ce qui ressemble à une croissance exponentielle.

B ► Évolution de la population du lièvre et du lynx dans la baie de Hudson

1. On constate que quand la population de lièvres augmente, celle de lynx suit jusqu'à diminution de celle des lièvres (probablement chassés par des lynx de plus en plus nombreux) ce qui induit une baisse de la population de lynx (qui manquent probablement de plus en plus de lièvres à manger), etc.

2. $v_{n+1} = (1 + a)v_n$

3. $u_{n+1} = (1 - c)u_n$

4. • Soit t_1 le taux de mortalité des lièvres.

Comme t_1 est proportionnel à la population de lynx, il peut s'écrire $t_1 = bu_n$.

• Soit t_2 le taux de natalité des lynx.

Comme t_2 est proportionnel à la population de lièvres, il peut s'écrire $t_2 = dv_n$.

5. Ce système découle immédiatement des questions précédentes.

En effet, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1 - c)u_n + t_2 u_n \\ &= (1 - c)u_n + dv_n v_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (1 + a)v_n - t_1 v_n \\ &= (1 + a)v_n - bu_n v_n \end{aligned}$$

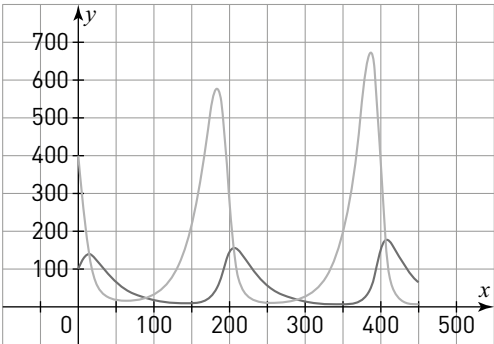
6. Attention : il faut prendre $u_0=100$ et $v_0=400$.

n	u_n	v_n
0	100	400
1	105	380
2	110	359
3	114	338
4	119	316
5	123	294
6	126	273
7	129	252
8	132	232

avec $\boxed{=(1-0,03)*A2+0,0002*B2*A2}$ en A3

et $\boxed{=(1+0,05)*B2-0,001*B2*A2}$ en B3.

7. On trouve bien le même type d'évolution.



THÈME 3 Approche historique de la fonction logarithme

Manuel p. 258-262

I. Introduction

Il s'agit de montrer qu'un objet mathématique, ici la fonction logarithme népérien, peut être étudié selon divers points de vue.

Le thème décrit comment elle a été introduite historiquement, avec ses deux aspects fondamentaux : l'équation fonctionnelle et la quadrature de l'hyperbole.

Les problèmes traités pour ce thème apparaissent essentiellement dans cette partie du manuel mais aussi dans les activités du chapitre 4 : fonction logarithme népérien.

Les objectifs de ces problèmes reposant sur :

- le développement des besoins pratiques de calcul, notamment pour l'astronomie ou la navigation conduit à la recherche de méthodes facilitant multiplication, division, extraction de racine,
- le lien entre suites arithmétiques et géométriques et la construction de tables d'intérêt,
- les travaux de Neper et le passage du discret au continu,
- la vision fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$.

II. Corrigés des TP et des problèmes thématiques

1. Tables d'intérêt

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Déterminer une méthode rapide pour trouver le nombre d'années permettant de multiplier par k un capital donné.

A ▶ 1. a) Soit $h(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$

$$h'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x) - 1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x}$$

b) Pour tout $x \geq 0$, on a $1+x > 0$ et $-x^2 \leq 0$

Donc $h'(x) \leq 0$.

La fonction h est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

c) Pour tout $x \geq 0$, on a $h(x) \leq h(0)$ d'où $h(x) \leq 0$.

2. a) Soit $g(x) = x - \ln(1+x)$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

b) Pour tout $x \geq 0$, on a $g'(x) \geq 0$.

La fonction g est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

c) Pour tout $x \geq 0$, on a $g(x) \geq g(0)$ d'où $g(x) \geq 0$

3. D'après la question 1. c), on en déduit que pour tout $x \in]-1; +\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x) \leq 0 \Leftrightarrow x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

D'après la question 2. c) on en déduit que pour tout $x \in]-1; +\infty[$:

$$x - \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x.$$

$$\text{Donc } x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

4. On a $C_n = C \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n$ et on veut :

$$C_n \geq 3C \Leftrightarrow C \times \left(1 + \frac{t}{100}\right)^n \geq 3C$$

$$\Leftrightarrow n \ln \left(1 + \frac{t}{100}\right) \geq \ln 3 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3}{\ln \left(1 + \frac{t}{100}\right)}$$

Or pour de petites valeurs de t on peut considérer :

$$\ln \left(1 + \frac{t}{100}\right) \approx \frac{t}{100} \text{ d'où } n \geq \frac{\ln 3}{\frac{t}{100}} \text{ soit } n \geq \frac{100 \ln 3}{t}$$

$$\text{Soit environ } n \geq \frac{110}{t}.$$

B ► 1. Placement en composition annuelle, au bout d'un an :

$$1\,500 \times 1,05 = 1\,575.$$

Placement en composition mensuelle, au bout d'un an :

$$1\,500 \times \left(1 + \frac{\frac{5}{12}}{100}\right)^{12} \approx 1\,576,74.$$

Le 2^e placement est meilleur avec ces conditions initiales.

$$2. \text{ a) } C \times \left(1 + \frac{\frac{t}{m}}{100}\right)^m = C \times \left(1 + \frac{\frac{t}{100}}{m}\right)^m$$

$$\text{Puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\text{alors } \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\frac{t}{100}}{m}\right)^m = e^{\frac{t}{100}}$$

$$\text{Ainsi } \lim_{m \rightarrow +\infty} C \times \left(1 + \frac{\frac{t}{m}}{100}\right)^m = C e^{\frac{t}{100}}.$$

b) On veut déterminer t tel que :

$$\begin{aligned} C e^{\frac{t}{100}} &= 2C \Leftrightarrow e^{\frac{t}{100}} = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{100} = \ln 2 \\ &\Leftrightarrow t = 100 \ln 2. \end{aligned}$$

Il faudrait un pourcentage d'environ 69,31 %.

c) On veut déterminer t tel que :

$$\begin{aligned} C e^{\frac{t}{100}} &= kC \Leftrightarrow e^{\frac{t}{100}} = k \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{100} = \ln k \\ &\Leftrightarrow t = 100 \ln k \end{aligned}$$

Au bout de 5 ans, le capital aura été multiplié par :

$$C \left(e^{\frac{t}{100}}\right)^5 = C e^{\frac{t}{20}}$$

Et on veut que :

$$\begin{aligned} C e^{\frac{t}{20}} &= 1,7C \Leftrightarrow e^{\frac{t}{20}} = 1,7 \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{20} = \ln 1,7 \\ &\Leftrightarrow t = 20 \ln 1,7 \approx 10,61 \%. \end{aligned}$$

2. Relation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$

• **Durée estimée :** 45 min

• **Objectif :** Découvrir une autre approche de la fonction $\ln$.

A ► Recherche de solutions particulières

a) Soit f est la fonction nulle.

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $f(y) = 0$ et

$$f(xy) = 0 = f(x) + f(y).$$

Donc la fonction nulle vérifie l'équation fonctionnelle.

b. Soit f la fonction linéaire définie par $f(x) = x$, on a alors $f(y) = y$ et $f(xy) = xy$.

$$\text{Or } f(x) + f(y) = x + y \neq xy.$$

Donc la fonction linéaire f ne vérifie pas l'équation fonctionnelle.

c. Soit f la fonction carrée, on a $f(x) = x^2$ et $f(y) = y^2$, $f(xy) = (xy)^2 = x^2 y^2$.

Or $f(x) + f(y) = x^2 + y^2 \neq x^2 y^2$ par conséquent la fonction carrée ne vérifie pas cette équation fonctionnelle.

B ► Recherches de quelques propriétés

1. $f(0) = f(0 \times 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

On aurait alors :

$$f(x) = f(x) + 0 = f(x) + f(0) = f(x \times 0) \text{ soit } f(0) = 0.$$

Ce qui signifierait qu'il s'agirait nécessairement de la fonction nulle.

2. $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$.

3. Si f est une fonction paire alors $f(-1) = f(1)$.

Or $f(1) = 0$, on aurait alors nécessairement $f(-1) = 0$.

$$f(-x) = f(-1 \times x) = f(-1) + f(x) = f(x)$$

$$4. \text{ a) } f(1) = f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Or } f(1) = 0 \text{ donc } f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

b) Pour tout $0 < y < 1$, on a $\frac{1}{y} > 1$.

Donc par hypothèse $f\left(\frac{1}{y}\right) > 0$.

Or vu la question **4. a)**, $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$ d'où $f(y) < 0$.

Puisque la fonction est paire, on aurait alors : pour tout $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$, $f(x) < 0$,

et pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, $f(x) > 0$.

5. $f(x^2) = f(x \times x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$.

C ► Cas particuliers des fonctions continues

$$1. f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \times \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$$2. \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) - f(x)}{\frac{h}{x} \times x}$$

$$= \frac{f(x) + f\left(1+\frac{h}{x}\right) - f(x)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x} \text{ car } f(1) = 0.$$

$$3. f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f\left(1+\frac{h}{x}\right) - f(1)}{\frac{h}{x}} \right) \times \frac{1}{x}$$

$$= f'(1) \times \frac{1}{x}$$

D ► Cas particulier de la fonction continue sur $]0; +\infty[$ vérifiant $f'(1) = 1$

$$1. f'(x) = \frac{1}{x} \text{ pour tout } x \in]0; +\infty[, \frac{1}{x} > 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2. Puisque $f(1) = 0$ et que la fonction est strictement croissante, cela signifie que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $f(x) > 0$ et pour tout $x \in]0; 1[$, $f(x) < 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(2^n) = nf(2)$ d'après la partie B.

Or pour tout $x > 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x > 2^n$.

Puisque la fonction f est croissante alors $f(x) > f(2^n)$ soit $f(x) > nf(2)$.

De plus $f(2) > 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nf(2) = +\infty$.

Donc par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = -\infty$

soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

3. TP Approximation de $\ln 2$ par dichotomie

• **Durée estimée** : 45 min

• **Objectif** : Déterminer une valeur approchée de $\ln 2$ à une précision 10^{-p} près, $p \in \mathbb{N}$.

```
1. def f(x):
    return (exp(x)-2)
```

```
2. a) from math import *
def f(x):
    return (exp(x)-2)
def Dichotomie(a,b,f,n):
    while b-a > 10**(-n):
        m = (a+b)/2
        if f(m) < 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return (m)
```

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 2$$

c) La console affiche :

```
>>>
0.6931533813476562
```

```
3. a) from math import *
def f(x):
    return (exp(x)-2)
def Dichotomie(a,b,f,n):
    while b-a > 10**(-n):
        m = (a+b)/2
        if f(a)*f(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return (m)
```

b) On retrouve une valeur approchée à 10^{-5} près de $\ln 2$, soit 0,693 15.

4. TP Algorithme de Briggs

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Découvrir une approche historique des logarithmes décimaux.

A ► Explication de la méthode de Briggs par Euler

1.

A = 1,000 000	IA = 0,000 000 0	soit	C = $\sqrt{AB}$
B = 10,000 000	IB = 1,000 000 0		D = $\sqrt{BC}$
C = 3,162 277	IC = 0,500 000 0		E = $\sqrt{CD}$
D = 5,623 413	ID = 0,750 000 0		F = $\sqrt{DE}$
E = 4,216 964	IE = 0,625 000 0		G = $\sqrt{DF}$
F = 4,869 674	IF = 0,687 500 0		H = $\sqrt{FG}$
G = 5,232 991	IG = 0,718 750 0		I = $\sqrt{FH}$
H = 5,048 065	IH = 0,703 125 0		K = $\sqrt{HI}$
I = 4,958 069	II = 0,695 312 5		L = $\sqrt{IK}$
K = 5,002 865	IK = 0,699 218 7		M = $\sqrt{KL}$
L = 4,980 416	IL = 0,697 265 6		N = $\sqrt{KM}$
M = 4,991 627	IM = 0,698 242 1		O = $\sqrt{KN}$
N = 4,997 242	IN = 0,698 730 4		P = $\sqrt{NO}$
O = 5,000 052	IO = 0,698 974 5		Q = $\sqrt{OP}$
P = 4,998 647	IP = 0,698 852 5		R = $\sqrt{OQ}$
Q = 4,999 350	IQ = 0,698 913 5		S = $\sqrt{OR}$
R = 4,999 701	IR = 0,698 944 0		T = $\sqrt{OS}$
S = 4,999 876	IS = 0,698 959 2		V = $\sqrt{OT}$
T = 4,999 963	IT = 0,698 966 8		W = $\sqrt{TV}$
V = 5,000 008	IV = 0,698 970 7		X = $\sqrt{WV}$
W = 4,999 984	IW = 0,698 968 7		Y = $\sqrt{VX}$
X = 4,999 997	IX = 0,698 969 7		Z = $\sqrt{XY}$
Y = 5,000 003	IY = 0,698 970 2		
Z = 5,000 000	IZ = 0,698 970 0		

$$2. D = \sqrt{BC} = \sqrt{10 \times \sqrt{10}} \text{ et } ID = \frac{IB + IC}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

On retrouve bien les valeurs approchées comme celles données dans la table téléchargée.

3. À partir de G le calcul diffère car E et F sont tous deux inférieurs à 5, et il faut à chaque fois deux nombres qui encadrent 5.

$$4. \log 5 = \frac{\ln 5}{\ln 10} \text{ et } \ln \left(10^{\frac{69\,897}{100\,000}} \right) = \frac{69\,897}{100\,000} \ln 10$$

$$\text{Soit } \frac{\ln \left(10^{\frac{69\,897}{100\,000}} \right)}{\ln 10} = \frac{69\,897}{100\,000} \approx \log 5 \text{ d'où } 10^{\frac{69\,897}{100\,000}} \approx 5$$

B ► Construction de la table à l'aide d'un algorithme

1. $x = 5$ et $p = 5$.

2.

```
from math import *
A = 1
B = 10
IA = 0
IB = 1
while B-5 > 10**-5 :
    if sqrt(A*B) <= 5 :
        A = sqrt(A*B)
        IA = (IA+IB)/2
    else :
        B = sqrt(A*B)
        IB = (IA+IB)/2
print (IB)
```

>>>

0.6989707946777344

5. TP Raréfaction des nombres premiers

- **Durée estimée :** 45 min
- **Objectif :** Faire une approche entre la raréfaction des nombres premiers et la fonction ln.

1. a) Dans la cellule B2 doit figurer le nombre de nombres premiers inférieurs à 10, or il s'agit des nombres : 2, 3, 5, 7.

Il y en a donc bien quatre.

b)

```
from math import *
def test_premier (N) :
    b = 0
    if N==1 :
        b = 1
    else :
        for i in range (2,int(sqrt(N))+1) :
            if N%i==0 :
                b = 1
    return (b)
def nombre_nombreiers (M) :
    compteur = 0
    for i in range (2,M+1) :
        n = test_premier(i)
        if n==0 :
            compteur = compteur + 1
    return (compteur)
```

2. a) $\boxed{=A2/B2}$

b) $\boxed{=C3-C2}$

c) Comme la différence de deux termes successifs de la suite $E(n)$ semble tendre à être égale à environ 2,3, cela signifie que le comportement de la suite $E(n)$ se rapproche de celui d'une suite arithmétique de raison $r \approx 2,3$.

d) (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 10$.

e) La raison de la suite (u_n) serait $r = \ln q = \ln 10$.

f) $\ln 10 \approx 2,3$

La conjecture semble vérifiée sur le tableur.

3. À l'aide du tableur, on constate que $E(n) \approx \ln n$.

Or $E(n) = \frac{n}{\pi(n)}$, on aurait donc $\frac{n}{\pi(n)} \approx \ln n$ soit $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}$

THÈME 4 Calculs d'aires

Manuel p. 263-267

I. Introduction

Dans ce thème, nous allons aborder différents problèmes de calculs d'aires. Nous verrons différentes approches : des méthodes historiques d'approximation d'aires, la méthode des rectangles et une méthode probabiliste.

Nous traiterons cinq problèmes :

- la quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède,
- la quadrature de l'hyperbole,
- l'approximation de l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle,
- l'estimation de l'aire sous la courbe par la méthode de Monte-Carlo,
- l'approximation de π par les aires.

Pour aborder ces cinq problèmes, nous utiliserons des notions de suites, d'intégrales et de primitives, de trigonométrie, de probabilités et d'algorithmes.

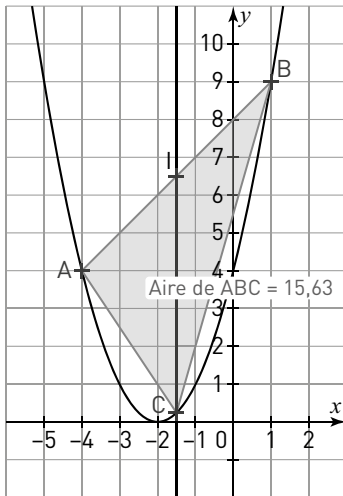
II. Corrigés des TP et des problèmes thématiques

1. TP Quadrature de la parabole par la méthode d'Archimède

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Comprendre l'algorithme qui approche l'aire du secteur parabolique à l'aide de triangles. Démontrer la formule à l'aide des suites géométriques.

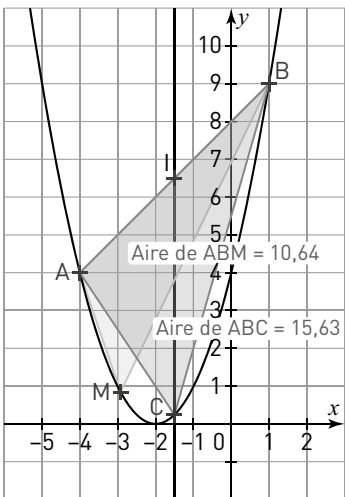
A ► Construction du triangle de base [AB] d'aire maximale

1. et 2.



On a $a_0 \approx 15,63$

3.



En faisant varier le point M, on vérifie bien que ABC est le triangle de base [AB] d'aire maximale.

B ► Démonstration de l'égalité $\mathcal{A} = \frac{4}{3} \mathcal{A}_{[ABC]}$

1. a) On a $\mathcal{A}_{[ACD]} = \mathcal{A}_{[CBE]} \approx 1,95$

b) $a_1 = \mathcal{A}_{[ACD]} + \mathcal{A}_{[CBE]} \approx 3,9$ et on a $a_0 \approx 15,63$

En utilisant GeoGebra, on a :

$$\frac{\mathcal{A}_{[ACD]} + \mathcal{A}_{[CBE]}}{\mathcal{A}_{[ABC]}} = 0,25 \text{ donc } \frac{a_1}{a_0} = 0,25$$

Donc on a bien $a_1 = \frac{1}{4} a_0$

c) Chaque triangle a pour aire 0,24.

Donc $a_2 \approx 4 \times 0,24 \approx 0,96$.

En utilisant GeoGebra, on a :

$$\frac{t_2 + t_3}{t_4 + t_5 + t_6 + t_7} = 4 \text{ donc } \frac{a_1}{a_2} = 4$$

d) La suite (a_n) semble être une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

e) $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ représente la somme des aires des triangles construits entre l'étape 0 et l'étape n .

2. a) (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

b) Notons $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 + a_0 q + a_0 q^2 + \dots + a_0 q^n \\ &= a_0 \times (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \\ &= a_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = a_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{4}{3} a_0 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

c) $0 < \frac{1}{4} < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{4}{3} a_0$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \mathcal{A}$ donc $\mathcal{A} = \frac{4}{3} a_0$

2. TP Quadrature de l'hyperbole par la méthode d'Archimède

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Étudier des algorithmes permettant de calculer l'intégrale de la fonction inverse.

A ► Méthode de Grégoire de Saint-Vincent

$$1. \ell(t) = \int_1^t f(x) dx = \int_1^t \frac{1}{x} dx$$

$$\text{Donc } \ell(t) = \left[\ln(x) \right]_1^t = \ln(t) - \ln(1) = \ln(t)$$

2. a) Pour tout $n \geq 1$, on a $t_n = t_0 \times 2^n = 1 \times 2^n = 2^n$

$$\begin{aligned} \text{b) } \ell(t_{n+1}) &= \ln(t_{n+1}) = \ln(t_n \times 2) \\ &= \ln(t_n) + \ln(2) = \ell(t_n) + \ln(2) \end{aligned}$$

La suite $\ell(t_n)$ est une suite arithmétique de raison $\ln(2)$.

c) La suite (t_n) est une suite géométrique alors que la suite $\ell(t_n)$ est une suite arithmétique.

Donc l'aire sous la courbe de la fonction f entre 1 et t_n est une suite arithmétique.

Donc si les abscisses croissent en progression géométrique, alors les aires des surfaces sous la courbe croissent en progression arithmétique.

B ► Calcul d'une valeur approchée de $\ln 2$ par la méthode de Brouncker

1. a) Il faudrait construire 4 nouveaux rectangles.

$$\text{b) } \mathcal{A}_{(ABCD)} = 1 \times 0,5 = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{A}_{(DEFG)} = 0,5 \times \left(\frac{1}{1,5} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12}$$

$$\mathcal{A}_{(GIJL)} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1,25} - \frac{1}{1,5} \right) = \frac{1}{30}$$

$$\mathcal{A}_{(EMNO)} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{1,75} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{56}$$

$$\text{c) } \mathcal{A}_{(ABCD)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2i \times (2i - 1)} \text{ avec } i = 1$$

$$\mathcal{A}_{(DEFG)} = \frac{1}{12} = \frac{1}{2i \times (2i - 1)} \text{ avec } i = 2$$

$$\mathcal{A}_{(GIJL)} = \frac{1}{30} = \frac{1}{2i \times (2i - 1)} \text{ avec } i = 3$$

$$\mathcal{A}_{(EMNO)} = \frac{1}{56} = \frac{1}{2i \times (2i - 1)} \text{ avec } i = 4$$

$$\text{d) } \ln(2) \approx \mathcal{A}_{(ABCD)} + \mathcal{A}_{(DEFG)} + \mathcal{A}_{(GIJL)} + \mathcal{A}_{(EMNO)}$$

Donc $\ln(2) \approx 0,6345$.

Remarque : il faudrait construire et calculer l'aire de davantage de rectangles pour avoir une estimation plus précise.

2. a)

```
def f(n):
    s=0
    for i in range(1, n+1):
        s=s+1/(2*i*(2*i-1))
    print(s)
```

$$\text{b) } f(100) \approx 0,6907$$

On obtient une estimation plus précise de $\ln(2)$.

3. TP Approximation de l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Approcher l'aire sous la courbe de la fonction exponentielle.

1. a) Chaque rectangle a pour largeur $\frac{1}{10}$.

b) Le premier rectangle a pour longueur $f(0) = e^0 = 1$.

Le deuxième rectangle a pour longueur $f(0,1) = e^{0,1}$.

$$\text{c) } U_{10} = \frac{1}{10}f(0) + \frac{1}{10}f(0,1) + \frac{1}{10}f(0,2) + \dots + \frac{1}{10}f(0,8) + \frac{1}{10}f(0,9)$$

Donc $U_{10} \approx 1,63$.

$$\text{2. a) } U_n = \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n}f\left(\frac{(n-1)}{n}\right)$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) $\{u_n\}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{\frac{1}{n}}$ et de premier terme 1.

$$\text{c) } u_0 + u_1 + \dots + u_9 = u_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = \frac{\left(1 - \left(e^{\frac{1}{10}}\right)^{10}\right)}{1 - e^{\frac{1}{10}}}$$

$$U_{10} = \frac{1}{10} \times (e^0 + e^{0,1} + e^{0,2} + \dots + e^{0,9})$$

Donc en prenant $n = 10$, on a :

$$U_{10} = \frac{1}{10} \times (u_0 + u_1 + \dots + u_9) = \frac{1}{10} \times \frac{1 - e^{\frac{1}{10}}}{1 - e^{\frac{1}{10}}}$$

$$\text{d) } U_n = \frac{1}{n} \times \left(e^0 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right)$$

$$\text{Donc } U_n = \frac{1}{n} \times (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1})$$

$$= \frac{1}{n} \times u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{n} \times 1 \times \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$\text{3. a) } V_{10} = \frac{1}{10}f(0,1) + \frac{1}{10}f(0,2) + \frac{1}{10}f(0,3) + \dots + \frac{1}{10}f(0,9) + \frac{1}{10}f(1)$$

$$\text{Donc } V_{10} = U_{10} - \frac{1}{10}f(0) + \frac{1}{10}f(1) \approx 1,81.$$

b) La suite $\{U_n\}$ est strictement croissante.

La suite $\{V_n\}$ est strictement décroissante.

Remarque : on peut démontrer que la suite $\{U_n\}$ est strictement croissante en étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} \times \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$

$$\text{c) } V_n = U_n - \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{n}f(1)$$

$$\text{Donc } V_n - U_n = -\frac{1}{n}e^0 + \frac{1}{n}e^1 = \frac{1}{n}(e - 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n - U_n = 0$$

$$\text{4. a) } \mathcal{A} = \int_0^1 e^x dx = \left[e^x \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$E_{10} = \mathcal{A} - U_{10} \approx 0,084$$

$$F_{10} = V_{10} - \mathcal{A} \approx 0,087$$

$$\text{b) } E_n = \mathcal{A} - U_n$$

En utilisant la calculatrice, et en tabulant la suite $\{E_n\}$, on en déduit qu'il faut choisir $n = 86$.

$$\text{c) } F_n = V_n - \mathcal{A}$$

En utilisant la calculatrice, et en tabulant la suite $\{F_n\}$, on en déduit qu'il faut choisir $n = 87$.

Remarque : on a $E_n < V_n - U_n$ et $F_n < V_n - U_n$

On peut donc également déterminer un rang n en résolvant $\frac{1}{n}(e - 1) < 0,01$.

La valeur obtenue n'est pas optimale, mais peut se déterminer en résolvant une inéquation simple.

$$\begin{aligned} \text{d) } W_n &= \frac{U_n + V_n}{2} = \frac{U_n + U_n + \frac{1}{n}(e - 1)}{2} \\ &= U_n + \frac{1}{2n}(e - 1) \end{aligned}$$

Pour que l'erreur de mesure soit inférieure à 10^{-2} , il faut choisir $n = 4$.

4. TP Estimation de l'aire sous la courbe par la méthode de Monte-Carlo

- **Durée estimée** : 45 min
- **Objectif** : Estimer l'aire sous la courbe de la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

A ► Interprétation de la situation

- a) $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$
- b) $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$
2. a) Les issues sont les points de coordonnées $(x ; y)$ du repère avec $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.
- b) En admettant l'hypothèse d'équiprobabilité des différents points du carré, la probabilité d'être dans un ensemble est proportionnelle à son aire.

Donc ici $p = \frac{\text{Aire}(\mathcal{D})}{\text{Aire}(\mathcal{C})}$

c) $\text{Aire}(\mathcal{C}) = 1 \times 1 = 1$ donc $p = \text{Aire}(\mathcal{D}) = \int_0^1 e^{-x^2} dx$

3. a) $f = \frac{N}{n}$

b) Plus n est grand, plus f se rapproche de p . Lorsque n tend vers $+\infty$, f tend vers p .

B ► Simulation

a) Les deux lignes à compléter sont :

Pour i allant de 1 à n
Si $y = \exp(-x^2)$

b) Cet algorithme affiche en sortie la fréquence f de l'événement : « M appartient au domaine $\mathcal{D}$ », pour une répétition de n expériences aléatoires.

2. a)

```

from math import *
from random import *
n = int(input("n="))
s = 0
for i in range(n):
    x = random()
    y = random()
    if y <= exp(-x**2):
        s = s+1
resultat = s/n
print(resultat)
    
```

b) Pour $n = 1\,000$, on obtient par exemple 0,732.

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,732$$

c) Après plusieurs essais, on obtient des valeurs différentes. Cela est normal, c'est la fluctuation d'échantillonnage.

En effet, on étudie une fréquence sur une répétition de 1 000 expériences.

La fréquence va donc fluctuer d'une série de 1 000 expériences à une autre.

Pour avoir moins de fluctuation, il faut augmenter le nombre d'expériences.

d) On peut choisir $n = 1\,000\,000$.

5. Approximation de π par les aires

- **Durée estimée** : 40 min
- **Objectif** : Effectuer une approximation de l'aire du cercle par des polygones inscrits et exinscrits.

A ► Entre deux carrés

1. OAB est rectangle en O.

D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$\text{Donc } AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

2. $\mathcal{A}_{(ABCD)} = AB^2 = 2$

$$\mathcal{A}_{(EFGH)} = EF^2 = 2^2 = 4$$

$$\text{Or } A_c = \pi \times 1^2 = \pi \text{ donc } 2 < \pi < 4$$

B ► Entre deux hexagones réguliers

1. Le triangle OAB est équilatéral.

La hauteur (OH) est également la bissectrice de AOB.

$$\text{Donc } \widehat{AOB} = \frac{\pi}{3} \text{ rad et } \widehat{AOH} = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$$

Dans le triangle AOH rectangle en H, on a :

$$\cos(\widehat{AOH}) = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{1} \text{ donc } OH = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Et } \sin(\widehat{AOH}) = \frac{AH}{OA} = \frac{AH}{1} \text{ donc } AH = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{(OAB)} = \frac{1}{2} \times AB \times OH$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\mathcal{A}_{(ABCDEF)} = 6 \times \mathcal{A}_{(OAB)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

2. Dans le triangle OAI rectangle en A, on a :

$$\tan(\widehat{AOI}) = \frac{AI}{OA} = \frac{AI}{1}$$

$$\text{Donc } AI = \tan(\widehat{AOI}) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\mathcal{A}_{(NOI)} = \frac{1}{2} \times OA \times IN = \frac{1}{2} \times 1 \times 2AI = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Or } \mathcal{A}_{(IJKLMN)} = 6 \times \mathcal{A}_{(NOI)} \text{ donc } \mathcal{A}_{(IJKLMN)} = 2\sqrt{3}$$

$$3. \frac{3\sqrt{3}}{2} < \pi < 2\sqrt{3}$$

C ► Généralisations

avec deux polygones réguliers à n côtés

$$1. \cos(\beta) = \frac{OH}{OA} = \frac{OH}{1} \text{ donc } OH = \cos(\beta)$$

$$\text{et } \sin(\beta) = \frac{AH}{OA} = \frac{AH}{1} \text{ donc } AH = \sin(\beta)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(OAB)} &= \frac{1}{2} \times OH \times AB = \frac{1}{2} \times OH \times (2AH) \\ &= \cos(\beta) \times \sin(\beta) \end{aligned}$$

$$2. \tan(\beta) = \frac{AI}{OA} = \frac{AI}{1} \text{ donc } AI = \tan(\beta)$$

$$\mathcal{A}_{(OIN)} = \frac{1}{2} \times OA \times IN = \frac{1}{2} \times 1 \times (2AI) = \tan(\beta)$$

$$3. \text{ On a donc } n \times \mathcal{A}_{(OAB)} \leq \pi \leq n \times \mathcal{A}_{(OIN)}$$

$$n \times \cos(\beta) \times \sin(\beta) \leq \pi \leq n \times \tan(\beta)$$

$$\text{Or } \beta = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n}$$

$$\text{Donc } n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \pi \leq n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$4. \text{ Pour } n = 96, \text{ on obtient } 3,139\,3 \leq \pi \leq 3,142\,8$$

En faisant la moyenne des deux bornes, on obtient $\pi \approx 3,141\,0$.

THÈME 5 Répartition des richesses, inégalités

Manuel p. 263-267

I. Introduction

Dans ce chapitre sont étudiés certains problèmes relatifs à la répartition de richesses dans la population d'un pays, comme le revenu, le patrimoine, la distribution hommes/femmes des salaires. Sont comparés également deux zones mondiales en ce qui concerne l'accès à l'éducation pour les enfants en âge d'être scolarisés.

Ces problèmes réinvestissent les contenus de statistique descriptive (moyenne, médiane, déciles). Ils proposent aussi de nouveaux indicateurs de comparaison, la courbe de Lorenz et le coefficient de Gini qui sollicitent les connaissances sur la convexité et le calcul intégral.

L'utilisation du tableur y prend une part incontournable, à la fois dans le traitement et organisation des données mais aussi pour le calcul des indicateurs.

Les objectifs sont de :

- savoir calculer une moyenne, les déciles, l'écart interdéciles d'une série statistique,
- savoir présenter et interpréter une courbe de Lorenz,
- savoir modéliser une courbe de Lorenz par une fonction continue, croissante, convexe sur l'intervalle $[0 ; 1]$ et ayant 0 et 1 comme points fixes,
- savoir calculer un indice de Gini et l'interpréter comme mesure du degré d'inégalité d'une répartition.

II. Corrigés des TP et des problèmes thématiques

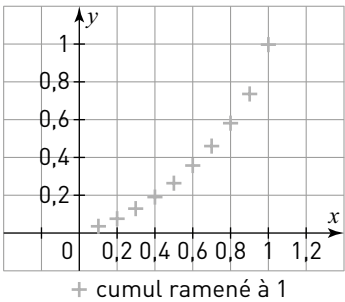
1. TP Courbe de Lorenz

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Obtenir une courbe de Lorenz pour évaluer des inégalités.

A ► Exemple 1 : revenu disponible par ménage selon la tranche de revenu

1 et 2.

	A	B	C	D	E
1	décile	revenu annuel moyen	pourcentage de la masse totale	cumul du pourcentage	cumul ramené à 1
2	0,1	10030	2,76316152	2,76316152	0,02763162
3	0,2	15630	4,305903744	7,069065264	0,07069065
4	0,3	19280	5,311441087	12,38050635	0,12380506
5	0,4	23210	6,39411554	18,77462189	0,18774622
6	0,5	27680	7,625554423	26,40017631	0,26400176
7	0,6	32470	8,945150004	35,34532632	0,35345326
8	0,7	38080	10,49064713	45,83597344	0,45835973
9	0,8	45070	12,41632001	58,25229345	0,58252293
10	0,9	55300	15,23457946	73,48687292	0,73486873
11	1	96240	26,51312708	100	1
12		Total			
13		362990			



3. a) La diagonale correspond à une situation égalitaire de répartition.

b) Plus on s'éloigne de la diagonale plus la situation souligne des inégalités de répartition.

4. En prenant le tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ on constate une cohérence avec les pourcentages cumulés (ramenés à 1).

La fonction f est croissante (sa dérivée est positive) sur $[0 ; 1]$.

$$f(x) - x = 0,92x(x - 1) \leq 0 \text{ sur } [0 ; 1]$$

Donc $f(x) \leq x$ sur $[0 ; 1]$.

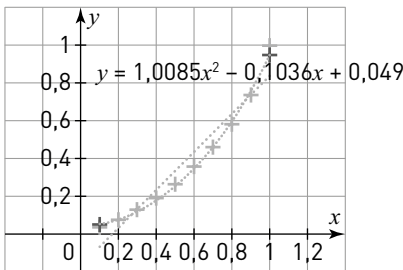
Elle est convexe (sa dérivée seconde est positive) sur $[0 ; 1]$, et $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Donc la fonction f correspond bien aux conditions de la courbe de Lorenz.

5. Fonctions d'ajustement :

- de tendance polynomiale :

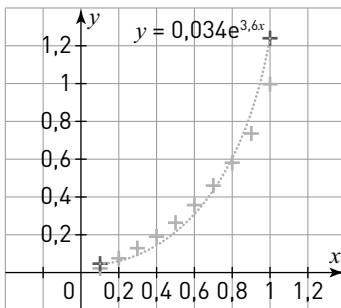
$f(x) = 1,008x^2 - 0,1036x + 0,049$



+ cumul ramené à 1
..... Linéaire (cumul ramené à 1)
..... Poly. (cumul ramené à 1)

- de tendance exponentielle :

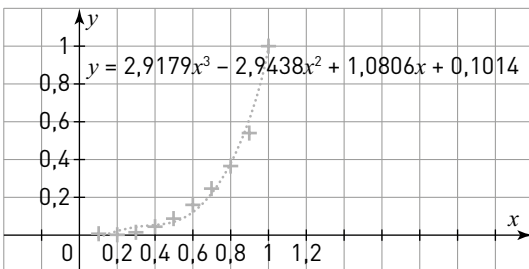
$f(x) = 0,034e^{3,6x}$



+ cumul ramené à 1
..... Expon. (cumul ramené à 1)

B ► Exemple 2 : répartition du patrimoine
1 et 2.

	A	B	C	D
1	décile	Patrimoine brut	en %	cumul ramené à 1
2	0,1	2	0,07435497	0,00074355
3	0,2	7,8	0,28998439	0,003643394
4	0,3	21,7	0,80675143	0,011710908
5	0,4	61,3	2,27897985	0,034500706
6	0,5	128,5	4,77730686	0,082273775
7	0,6	186,5	6,93360101	0,151609785
8	0,7	245,1	9,11220165	0,242731802
9	0,8	319,1	11,8633356	0,361365157
10	0,9	463,8	17,2429177	0,533794334
11	1	1254	46,6205666	1
12		Total		
13		2689,8		

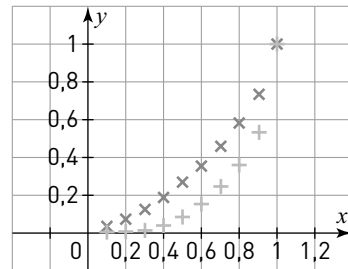


+ cumul ramené à 1
..... Poly. (cumul ramené à 1)

3. Courbe de tendance polynomiale d'ordre 3 :

$f(x) = 2,9x^3 - 2,94x^2 + 1,08x - 0,1$

4. Le graphique suivant regroupe les deux répartitions, celle qui est en dessous est celle du patrimoine elle est la plus inégalitaire :



x cumul revenus ramené à 1
+ cumul patrimoine ramené à 1

2. TP Un indicateur d'inégalités :
le coefficient de Gini

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Définir et calculer un coefficient de Gini.

A ► Définition et calcul

L'aire de la concentration est plus forte dans l'entreprise 1, elle est donc plus inégalitaire.

B ► Comparaison de salaires dans deux entreprises

1. $f(x) = ax^3$ avec a positif ($f''(x) > 0$).

De plus, $f(1) = 1$ donc $a = 1$.

2. a) $g'(x) = -e$

$$\begin{aligned} &= (2 - e)x - 1 + (2 - e)(1 - x) + 1 \\ &= g(x) + (2 - e)(1 - x) + 1 \end{aligned}$$

Donc g est solution de (E).

- b) On sait que :

$$g'(x) = g(x) + (2 - e)(1 - x) + 1$$

$$\text{alors } y' = y + (2 - e)(1 - x) + 1 \Leftrightarrow (y - g)' = y - g$$

- c) $f(x) - g(x) = Ke^x$

$$\text{Ainsi } f(x) = g(x) + Ke^x \text{ avec } f(0) = 0$$

$$\text{On obtient } f(0) = -1 + k \text{ d'où } f(x) = e^x + (2 - e)x - 1$$

$$3. \mathcal{A}_{OAB} = \frac{1}{2}$$

Entreprise 1 : coefficient de Gini

$$\frac{\frac{1}{2} - \int_0^1 x^3 dx}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Entreprise 2 : coefficient de Gini

$$\frac{\frac{1}{2} - \int_0^1 (e^x + (2 - e)x - 1)dx}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}e - 1\right)}{\frac{1}{2}} \approx 0,28$$

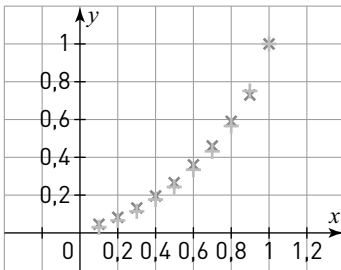
C'est donc l'entreprise 1 la plus inégalitaire.

C ► Comparaison de revenus des ménages

1. a) $f''(x) = 18x^2 - 12x + 2,8 > 0$

Donc f est convexe.

b) Lorsqu'on rajoute cette fonction sur le graphique des revenus il y a un bon ajustement.



x cumul revenus ramenés à 1
+ Lorentz

2. $\int_0^1 (1,5x^4 - 2x^3 + 1,4x^2 + 0,1x)dx$

$$= \frac{1,5}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1,4}{3} + \frac{0,1}{2} = \frac{19}{60}$$

Coefficient de Gini :

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{19}{60}}{\frac{1}{2}} = \frac{11}{30}$$

3. Mesurer des inégalités : avec des pourcentages et des indicateurs de dispersion

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Calculer un rapport interdécile.

1. a) $1\,938 \times \left(1 - \frac{24}{100}\right) \approx 1\,473$ soit proche de 1 478.

b) $1\,478 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) = 1\,938$, on obtient $t \approx 31\%$.

2. Hommes :

- étendue : 2 683
- IDR $\approx 3,13$

Femmes :

- étendue : 1 936
- IDR $\approx 2,66$

Ensemble :

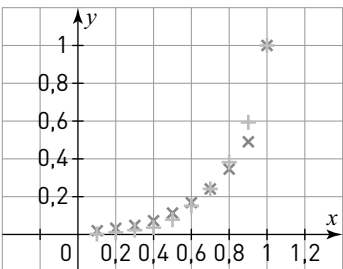
- étendue : 2 393
- IDR $\approx 2,98$

4. Des inégalités au niveau mondial

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Traduire des inégalités par le calcul d'indicateurs.

1 et 2.

	A	B	C	D	E	F
1	déciles	QENS pays UE	fréquences. Cumulés UE		QENS pays ASS	fréquences cumulées ASS
2	0,1	1	0,007633588		7	0,001429739
3	0,2	2	0,022900763		45	0,010620915
4	0,3	2,5	0,041984733		66	0,024101307
5	0,4	4	0,072519084		79	0,040236928
6	0,5	5	0,110687023		193	0,079656863
7	0,6	6,5	0,160305344		357	0,152573529
8	0,7	10,5	0,240458015		449	0,244281046
9	0,8	14,5	0,351145038		678	0,382761438
10	0,9	18	0,488549618		1022	0,591503268
11	1	67	1		2000	1
12		Total			Total	
13		131			4896	



x fréquences cumulées UE
+ fréquences cumulées ASS

3. $IDR_{(pays UE)} = 67$

$IDR_{(pays ASS)} \approx 285,7$

4. Le rapport interdécile est celui qui traduit le mieux les inégalités.

Il est plus de quatre fois plus élevé dans les pays de l'ASS que dans les pays de l'UE alors que les courbes de Lorenz, elles, sont proches.

THÈME 6 Inférence bayésienne

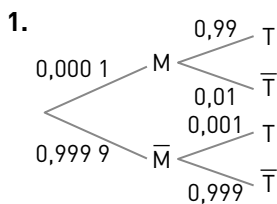
I. Introduction

Ce thème permet d'approfondir la notion de probabilité conditionnelle en étudiant ce qu'on appelle l'inversement d'une condition. La formule de Bayes a longtemps été appelée formule de probabilité des causes. Elle permet en effet de remonter le temps, c'est-à-dire de calculer la probabilité d'une cause sachant celle de sa conséquence. On approfondira aussi des notions propres à la médecine telles que celles de spécificité et sensibilité, ainsi que les vrais/faux positifs/négatifs.

II. Corrigés des TP et des problèmes thématiques

1. Test de dépistage d'une maladie

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Découvrir la formule de Bayes.



2. $p(M) = 0,000\ 1$, $p_M(T) = 0,99$ et $p_{\bar{M}}(T) = 0,001$

3. D'après les probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(M) \times p_M(T) + p(\bar{M}) \times p_{\bar{M}}(T) \\ &= 0,000\ 1 \times 0,99 + 0,999\ 9 \times 0,001 \\ &= 0,001\ 098\ 9 \end{aligned}$$

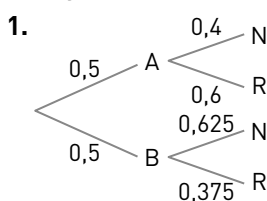
4. On a : $p_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)}$

5. $p_T(M) = \frac{0,000\ 1 \times 0,99}{0,001\ 098\ 9} = 0,090\ 09$

6. Non, il ne faut pas commercialiser ce test car il n'est pas assez fiable.

2. De quelle urne vient la boule ?

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** Utiliser la formule de Bayes.



2. D'après les probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(R) &= p(A) \times p_A(R) + p(B) \times p_B(R) \\ &= 0,5 \times 0,6 + 0,5 \times 0,375 \\ &= 0,487\ 5 \end{aligned}$$

3. $p_R(A) = \frac{p(A) \times p_A(R)}{p(R)} = \frac{0,5 \times 0,6}{0,487\ 5} = 0,615$

3. Mails indésirables

- **Durée estimée :** 25 min
- **Objectif :** Utiliser la formule de Bayes.

A ► Premier exemple

On commence par nommer les événements et reformuler les hypothèses de l'énoncé.

On choisit au hasard un mail dans le courrier reçu. On note les événements suivants.

F : « Le mail est frauduleux. »

U : « Le mail contient le mot "urgent". »

On a par hypothèse :

$$p(F) = 0,5, \quad p_F(U) = 0,9, \quad p_{\bar{F}}(U) = 0,1$$

On détermine une probabilité conditionnelle pour répondre à la question.

$$p_U(\bar{F}) = \frac{p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(U)}{p(U)}$$

Les événements F et $\bar{F}$ forment un système complet de l'univers, on peut donc appliquer la formule de la probabilité totale dans le calcul de $p(U)$.

On obtient :

$$p_U(\bar{F}) = \frac{p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(U)}{0,5p_F(U) + 0,5p_{\bar{F}}(U)} = 0,1$$

Il y a encore une quantité non négligeable de mails qui ne sont pas frauduleux et pourtant placés dans la catégorie indésirable.

B ► Second exemple

On suppose ici que les événements forment un système complet de l'univers.

1. On peut alors compléter le tableau.

Collègues	Amis	Publicité
0,4	0,1	0,5
Inf. 150	Entre 150 et 330	Sup. 330
0,01	0,44	0,55

2. a) On a :

$$p(\text{« connu »} \cap \text{« pub »}) = \frac{199}{200} \times 0,5 = 0,4975$$

b) Il s'agit de comparer 0,5 à la probabilité de que le mail, sachant qu'il est connu, soit indésirable et compris entre 50 et 130 caractères.

Cette dernière probabilité se calcule en utilisant la loi de probabilité conditionnelle de l'événement : « Le mail est connu ».

Aux vues des données de l'énoncé, il nous faut avancer une hypothèse d'indépendance.

Cette probabilité est donc inférieure à 5×10^{-5} .

Il est donc beaucoup plus probable de recevoir un mail publicitaire.

3. On considère un mail pris au hasard. On note :
 U l'événement : « Le mail contient le mot "urgent". »
 I l'événement : « Le mail est indésirable ».

a) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(U) &= p(U \cap I) + p(U \cap \bar{I}) \\ &= \frac{1}{800} \times 0,6 + 0,2 \\ &= 0,20075 \approx 0,2 \end{aligned}$$

b) Ainsi, on obtient :

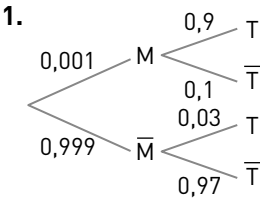
$$p_U(I) = \frac{p(U \cap I)}{p(U)} \approx 0,0037$$

Si le mail contient le mot "urgent", il est très peu probable qu'il soit indésirable.

4. Chez le médecin

• **Durée estimée :** 25 min

• **Objectif :** Découvrir les notions de spécificité et sensibilité.



2.
$$\begin{aligned} p(T) &= p(M) \times p_M(T) + p(\bar{M}) \times p_{\bar{M}}(T) \\ &= 0,001 \times 0,9 + 0,999 \times 0,03 = 0,03087 \end{aligned}$$

3.
$$p_T(M) = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)} = \frac{0,001 \times 0,9}{0,03087} \approx 0,029$$

4. Il n'y a que peu de chance que le test soit positif.

5.

	T	$\bar{T}$	Total
M	9	1	10
$\bar{M}$	300	9 690	9 990
Total	309	9 691	10 000

6. La probabilité est : $\frac{9}{309} = 0,029$

7. a) La sensibilité est $p_M(T)$.

b) Plus un test est sensible, moins il comporte de faux négatifs, et mieux il permet d'exclure la maladie.

c) Ici $p_M(T) = \frac{9}{10} = 0,9$

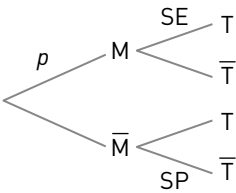
8. a) La spécificité est : $p_{\bar{M}}(\bar{T})$.

b) Plus un test est spécifique, moins il occasionne de faux positifs, et mieux il permet d'affirmer la maladie.

c) Ici $p_{\bar{M}}(\bar{T}) = \frac{9\,690}{9\,990} = 0,97$

9. Ces deux valeurs sont interdépendantes : l'augmentation de l'une se fait toujours au détriment de l'autre.

10. On a, en fait, l'arbre :



a) $VPP = p_{T|M} = \frac{p(M) \times p_M(T)}{p(T)}$

$$= \frac{p \times SE}{p \times SE + (1-p) \times (1-SP)}$$

et $VPN = p_{T|\bar{M}} = \frac{p(\bar{M}) \times p_{\bar{M}}(\bar{T})}{p(\bar{T})}$

$$= \frac{(1-p) \times SP}{p \times (1-SE) + (1-p) \times SP}$$

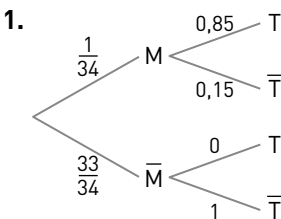
b) $VPP = \frac{9}{309} = 0,029$

et $VPN = \frac{9\,690}{9\,691} = 0,999\,897$

5. D'autres maladies

- **Durée estimée :** 15 min
- **Objectif :** utiliser le TP 4.

A ► La mucoviscidose



2. $p_{T|\bar{M}} = \frac{p(M) \times p_M(\bar{T})}{p(\bar{T})} = \frac{\frac{1}{34} \times 0,15}{\frac{1}{34} \times 0,15 + \frac{33}{34} \times 1} = 0,004\,5$

B ► L'appendicite

1.

	Appendicite	Pas d'appendicite	Total
Échographie positive	235	20	255
Échographie négative	75	510	585
Total	310	530	840

2. $SP = \frac{510}{510 + 20} = 0,96$

ce qui signifie que lorsque le patient ne souffre pas d'une appendicite, il y a 96 % de chance que l'échographie soit négative.

3. $SE = \frac{235}{235 + 75} = 0,76$

ce qui signifie que lorsque le patient souffre d'une appendicite, il y a 76 % de chance que l'échographie soit positive.

4. $VPP = \frac{235}{235 + 20} = 0,92$

ce qui signifie que si l'échographie est positive, il y a 92 % de chance que le patient souffre d'une appendicite.

5. $VPN = \frac{510}{510 + 75} = 0,87$

ce qui signifie qu'il y a 87 % de chance qu'un patient pour lequel l'échographie est négative ne présente pas d'appendicite.

THÈME 7 Répétitions d'expériences indépendantes, échantillonnage

Manuel p. 277-281

I. Introduction

Ce thème, très lié au chapitre 7 sur les lois discrètes, est l'occasion de mettre en pratique les notions qui y sont abordées dans des cas concrets proposés par le programme (tirages de boules dans une urne, tests d'hypothèse, problème de surréservation, réflexion autour des sondages), en particulier grâce aux outils numériques (programmation en Python et tableur).

La loi binomiale, nouveauté du programme de Terminale, tient naturellement une place importante dans ce thème mais il y est également question de la loi des grands nombres (pas formellement, mais intuitivement), vue en Première, dans les TP plus centrés sur la notion d'échantillonnage.

Les sondages en particulier tiennent une place importante dans ce thème puisqu'ils font l'objet des trois derniers TP, dans lesquels on en interrogera différents aspects (conditions de réalisation, types de suffrages, marge d'erreur).

II. Corrigés des TP et des problèmes thématiques

1. TP Simulation de variable aléatoire, comportement des moyennes d'échantillons

- **Durée estimée** : 55 min
- **Objectif** : Simuler des variables aléatoires.

A ► Simulation d'une variable aléatoire

```
1. import math
import random
def moyenne (L) :
    return sum(L)/len(L)
```

```
2. def ecart_type (L) :
    m=moyenne (L)
    L2=[]
    for i in L:
        L2.append ((i-m)**2)
    return math.sqrt (sum(L)/len(L))
```

```
3. def simul_bernou (p) :
    if random.random () <= p:
        x=1
    else:
        x=0
    return x
```

4. La fonction renvoie la somme des éléments de la liste qui ne contient que des 0 ou des 1 c'est-à-dire qu'elle renvoie le nombre de 1.

Autrement dit, le nombre de succès quand on réalise n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p simulée par **simul_bernou(p)**.

5. a) La loi uniforme sur $[1 ; n + 1[$.

b) Pour tout k entre 1 et n , la probabilité que **n*random.random()+1** soit dans $[k ; k + 1[$ est

$$\frac{k+1-k}{n+1-1} = \frac{1}{n} \text{ puis } \mathbf{n*random.random()} \text{ simule}$$

une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[1 ; n + 1[$.

Or si $x \in [k ; k + 1[$ alors **math.floor(x)=k**

Donc la fonction renvoie les valeurs 1, 2, ..., n

avec les probabilités $\frac{1}{n}$: elle simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$.

B ► Avec la loi binomiale

1. a) La liste renvoyée est un échantillon de taille t d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p .

b) Elle renvoie la liste des moyennes de N échantillons de taille t d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p .

2. a)

```
def comparaison_binom1 (N,t,n,p):
    L=serie_moyennes_binom (N,t,n,p)
    s=ecart_type(L)
    print (s)
    print (math.sqrt(n*p*(1-p))/math.sqrt(t))
```

b) Les deux valeurs affichées sont proches.

3. a)

```
def comparaison_binom2 (N,t,n,p):
    L=serie_moyennes_binom (N,t,n,p)
    s=ecart_type(L)
    mu=n*p
    i=0
    for x in L:
        if abs(x-mu) <= 2*s:
            i=i+1
    print (i/N>I)
```

b) On remarque qu'on obtient des proportions toujours assez proches de 0,95.

2. Tirages aléatoires avec remise

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Simuler un tirage avec remise dans une urne.

1.

```
import random
def urne():
    if random.randint(1,100) <= 20:
        couleur="vert"
    else:
        couleur="rouge"
    return couleur
```

2. a) [urne() for i in range(n)]

b)

```
def echantillon(n):
    return [urne() for i in range(n)]
```

3. La variable aléatoire X donnant le rang de la première boule verte obtenue suit la loi géométrique

de paramètre $\frac{20}{100} = 0,2$. On a $p(X > 3) = 0,8^3 = 0,512$.

4. a)

```
def premier_vert():
    c=urne()
    i=1
    while c!="vert":
        c=urne()
        i=i+1
    return i

A=[premier_vert() for i in range(1000)]
m=sum(A)/1000
```

b) La moyenne des rangs d'obtention de la première boule verte sur 1 000 répétitions de l'expérience consistant à tirer des boules avec remise dans cette urne jusqu'à en obtenir une verte.

c) De l'espérance de X soit 5.

Remarque : Penser à ajouter un affichage de m .

3. Vérification d'une pièce

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Tester une pièce par construction d'un intervalle de fluctuation.

1. a) $p(\text{PILE}) = 0,5$.

b) X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,5$.

On tabule $x \mapsto p(X \leq x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
81	0.0044				
82	0.0066				
83	0.0097				
84	0.0141				
85	0.02				
86	0.028				
87	0.0384				
88	0.0518				
89	0.0687				
90	0.0895				
91	0.1146				

X=81

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
108	0.8854				
109	0.9105				
110	0.9313				
111	0.9482				
112	0.9616				
113	0.972				
114	0.98				
115	0.9859				
116	0.9903				
117	0.9934				
118	0.9956				

X=118

donc [86 ; 114].

c) $110 \in [86 ; 114]$ donc non.

2. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de PILE obtenus quand on lance 300 fois cette pièce dans le cas où la pièce est équilibrée. Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 300$ et $p = 0,5$.

On tabule $x \mapsto p(Y \leq x)$:

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
130	0.0121				
131	0.0162				
132	0.0216				
133	0.0283				
134	0.0367				
135	0.047				
136	0.0594				
137	0.0744				
138	0.0921				
139	0.1126				
140	0.1363				

X=130

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
160	0.8874				
161	0.9079				
162	0.9256				
163	0.9406				
164	0.953				
165	0.9633				
166	0.9717				
167	0.9784				
168	0.9838				
169	0.9879				
170	0.9911				

X=170

Donc un intervalle de fluctuation centré de Y au seuil de 95 % est $[133 ; 167]$.

Comme Ben a fait la vaisselle 173 fois sur 300 et $173 \notin [133 ; 167]$, il paraît légitime de penser que la pièce est truquée, au risque d'erreur de 5 %.

3. a) TI-83 Premium CE : $Y1 = \text{binomFRép}(300, X, 173)$

CASIO GRAPH 90+E : $Y1 = \text{binomialCD}(173, 300, x)$

NUMWORKS : $f(x) = \text{binomcdf}(173, 300, x)$

b) On obtient :

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
0.5	0.9967				
0.51	0.9912				
0.52	0.9786				
0.53	0.9536				
0.54	0.9088				
0.55	0.838				
0.56	0.7383				
0.57	0.6137				
0.58	0.4754				
0.59	0.3396				
0.6	0.2214				

X=0.5

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP					
APP SUR + POUR ΔTb1					
X	Y1				
0.56	0.7383				
0.57	0.6137				
0.58	0.4754				
0.59	0.3396				
0.6	0.2214				
0.61	0.1306				
0.62	0.0692				
0.63	0.0327				
0.64	0.0137				
0.65	0.005				
0.66	0.0016				

X=0.66

c) Si on reprend le principe d'un intervalle de fluctuation centré, on est sûr que la valeur de p est compatible quand $p(Y \leq 173)$ est compris entre 0,025 et 0,975 ce qui est le cas quand p est entre 0,53 et 0,63.

Remarque : On peut aussi faire remarquer qu'un intervalle de fluctuation centré n'est pas forcément le plus pertinent dans ce cas où l'on teste, finalement, davantage le fait que la pièce soit truquée au désavantage de Ben, que truquée indépendamment à l'avantage de n'importe qui.

d) Dans le modèle physique utilisé, aucun côté n'est privilégié avant de réaliser l'expérience. Donc on pouvait penser à une situation d'équiprobabilité que l'on teste ensuite.

Parmi les valeurs de p possibles trouvées, aucune n'est issue d'un modèle physique et serait donc à privilégier : ce n'est pas comme cela que l'on construit un modèle en sciences.

4. On pourrait prendre la pièce et réaliser l'expérience un grand nombre de fois pour essayer de voir vers quelle valeur la fréquence se stabilise. Dans tous les cas, comme il n'y a pas de modèle physique sous-jacent permettant d'expliquer la probabilité d'obtenir PILE, cela restera une estimation.

Remarque : Un exemple célèbre d'application de la méthode scientifique est le cas des lois de la génétique que Mendel avait théorisées.

Mendel avait prédit que, selon ces lois, il obtiendrait certaines proportions de pois de différents types lors de la réalisation d'une expérience sur des plans de pois.

Ces proportions se sont vérifiées par l'expérience. Presque trop bien car elles étaient presque parfaitement égales aux probabilités attendues alors qu'elles n'auraient pas dû car Mendel n'avait pas pris certains facteurs (qui lui étaient inconnus) en compte.

Depuis, Mendel est régulièrement accusé d'avoir falsifié ses résultats mais les lois de la génétique qu'il a énoncées se sont révélées exactes et son expérience a pu être répétée par de nombreux scientifiques avec succès : c'est un des fondements de la méthode scientifique, les hypothèses doivent être testables et vérifiables par la communauté scientifique.

4. Problème de surréservation

- **Durée estimée :** 55 min
- **Objectif :** Programmer des fonctions avec la loi binomiale et les utiliser dans un cas de surréservation.

A ▶ 1. a) • `parmi(1,1)` renvoie 1 car $k = n$.

• `parmi(0,1)` renvoie 1 car $k = 0$.

• `parmi(1,2)` renvoie `parmi(1,1) + parmi(0,1)` c'est-à-dire 2.

b) • `parmi(2,2)` renvoie 1 car $k = n$.

• `parmi(0,2)` renvoie 1 car $k = 0$.

• `parmi(2,3)` renvoie `parmi(2,2) + parmi(1,2)` c'est-à-dire 3.

• `parmi(1,3)` renvoie `parmi(1,2) + parmi(0,2)` c'est-à-dire 3.

c) `parmi(2,4)` renvoie `parmi(2,3) + parmi(1,3)` c'est-à-dire 6.

Dans tous les cas, les valeurs sont égales. Donc on peut conjecturer que :

`parmi(k,n)` renvoie $\binom{n}{k}$.

$$2. \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ et } \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

```
3. # def parmi(k,n) :
#   if k==0 or n==k :
#       a = 1
#   else:
#       a = parmi(k, n-1) + parmi(k-1, n-1)
#   return a

def f(n) :
    fact = 1
    if n != 0 :
        for i in range(1, n+1) :
            fact = fact*i
    return fact
def parmi(k,n) :
    return f(n) / (f(k)*f(n-k))
def proba_bin(p,n,k) :
    return parmi(k,n)*(p**k)*(1-p)**(n-k)
```

```
4. def seuil_bin(s,p,n) :
    k = 0
    prob = proba_bin(p,n,0)
    while prob < s :
        k = k+1
        prob = prob + proba_bin(p,n,k)
    return k
```

B ▶ 1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes venant effectivement au gala et k le nombre minimal de repas à prévoir.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,74$ et k est le plus petit entier tel que $p(X \leq k) \geq 0,95$ qui est donc donné par `seuil_bin(0.95,0.74,400)` qui donne 310.

2. `seuil_bin(0.99,0.74,400)` qui donne 316.

C ▶ 1.

```
def proba_cum_bin (p,n,k) :
    proba=0
    for i in range (k+1) :
        proba=proba+proba_bin (p,n,i)
    return proba
def seuil_bin2 (s,p,k) :
    n=k
    while proba_cum_bin (p,n,k) >= s :
        n=n+1
    return n-1
```

2. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de personnes venant effectivement au gala et n le nombre d'invitations à envoyer.

Y suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,74$ et on cherche la plus grande valeur de n telle que $p(X \leq 250) \geq 0,95$ qui est donc donnée par **seuil_bin2(0.95,0.74,250)** qui donne **321**.

5. TP Sondage et temps avant l'élection

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Discuter des conditions de réalisation et des résultats d'un sondage.

1. M. Valls ne s'est finalement pas présenté donc le pourcentage d'intention de votes en sa faveur n'a pas grand intérêt.

2. a) • M. Valls : entre 10 % et 16 %

• J.-L. Mélenchon : entre 11 % et 17 %

• E. Macron : entre 11 % et 17 %

• F. Fillon : entre 21 % et 27 %

• M. Le Pen : entre 21 % et 27 %

b) • J.-L. Mélenchon a obtenu 19,6 % des suffrages exprimés, c'est au-dessus de 17 % qui était la fourchette haute pour lui.

• E. Macron a obtenu 24 % des suffrages exprimés, c'est au-dessus de 17 % qui était la fourchette haute pour lui.

• F. Fillon a obtenu 20 % des suffrages exprimés, c'est légèrement en dessous de 21 % qui était la fourchette basse pour lui.

• M. Le Pen a obtenu 21,3 % des suffrages exprimés ce qui est bien entre 21 % et 27 %.

On constate que, pour la plupart des candidats, les résultats annoncés par ces sondages sont inexacts, même en tenant compte de la marge d'erreur.

c) Les intentions de votes données pour ce sondage sont beaucoup plus proches des résultats finaux.

3. On constate que l'information apportée par un sondage réalisé 6 mois avant l'élection est assez faible. Elle est de bien meilleure qualité pour un sondage réalisé juste avant et qui a donc plus d'intérêt.

6. TP Sondage et suffrage indirect

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Discuter des résultats d'un sondage dans une élection au suffrage indirect.

1. a) D. Trump a gagné l'élection, on peut donc, en première approche, penser que ce sondage se trompe.

$$b) \bullet \frac{65\,853\,514}{136\,669\,276} \approx 0,48$$

donc 48 % des votes environ pour H. Clinton.

$$\bullet \frac{62\,984\,828}{136\,669\,276} \approx 0,46$$

donc 46 % des votes environ pour D. Trump.

On obtient finalement des scores proches des résultats annoncés par le sondage.

c) Non, car autrement, H. Clinton aurait été gagnante (ou il y aurait eu un deuxième tour).

2. b) Avec les formules **=SOMME(B2:B52)**

et **=SOMME(C2:C52)**, on obtient qu'il y a

308,7 millions d'habitants aux États-Unis et 538 grands électeurs.

c) On écrit **=C2/B2** en D2 et on recopie vers le bas.

f) Cela « suffit » car si l'on fait la somme du nombre de grands électeurs de ces états, on obtient 271 grands électeurs d'après le tableur, soit plus de la moitié.

g) La formule **=SOMME(B2:B41)** permet de déterminer qu'il y a 135 millions d'habitants dans ces 40 états.

h) Finalement, on voit qu'il suffirait (c'est une situation extrême pour illustrer le propos) d'obtenir la moitié des voix dans les 40 états donnés précédemment pour gagner l'élection soit 67,5 millions d'habitants.

Comme $\frac{67,5}{308,7} \approx 0,22$ soit 22 %, cela veut dire

qu'avec l'adhésion de 22 % de la population des États-Unis, on peut gagner l'élection !

Un sondage sur les intentions de votes nationales pour des candidats ne donne donc aucune information sur le résultat final.

7. TP Sondage et marge d'erreur

- **Durée estimée** : 30 min

- **Objectif** : Discuter des conditions de réalisation et des résultats d'un sondage.

1. On constate que sur un sondage portant sur 5 000 personnes, pour un candidat ayant 25 % d'intention de votes, la marge d'erreur est de 1,2 %.

Soit entre 25 % – 1,2 % = 23,8 %

et 25 % + 1,2 % = 26,2 %.

2. • Pour E. Macron : on prend la ligne correspondant à des échantillons de 5 000 personnes pour un pourcentage de 65 % (valeur la plus proche de 63 %).

On obtient une marge d'erreur de 1,3 % soit entre 61,7 % et 64,3 %.

- Pour M. Le Pen : on prend la ligne correspondant à des échantillons de 5 000 personnes pour un pourcentage de 35 % (valeur la plus proche de 37 %).

On obtient une marge d'erreur de 1,3 % soit entre 35,7 % et 38,3 %.

Les résultats de ces élections ont été 66,1 % pour E. Macron et 33,9 % pour M. Le Pen donc on constate que ceux de E. Macron ont été sous-estimés et que ceux de M. Le Pen ont été surestimés (même en tenant compte de la marge d'erreur).

3. a) Par exemple, pour $n = 1\,000$ et $f = 0,2$. Le tableau donne 2,5 % de marge d'erreur.

La formule donne :

$$2\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} = 2\sqrt{\frac{0,2 \times 0,8}{1\,000}} \approx 0,025 \text{ soit } 2,5 \%$$

On retrouve donc les mêmes résultats.

b) Cette formule s'applique dans le cas d'un tirage aléatoire avec remise, c'est-à-dire que pour obtenir un échantillon représentatif, il faudrait tirer n personnes au hasard avec remise dans l'ensemble de la population des inscrits.

En réalité, dans une grande population comme les inscrits qui compte plusieurs dizaines de millions de personnes, le fait que le tirage soit avec remise ou non a peu d'impact et la formule donnée reste valable.

En revanche, quand on ne fait plus un tirage réellement aléatoire dans la population, ce qui est le cas de la méthode des quotas où les sondeurs essaient de reproduire les caractéristiques de la population (en termes de sexe, d'âges, de situation professionnelle, etc.), il n'y a plus de formule permettant d'estimer la marge d'erreur mais les sondeurs considèrent que la formule précédente s'applique : c'est le sens de la phrase de l'énoncé.

THÈME 8 Temps d'attente

I. Introduction

L'accent est mis sur la modélisation probabiliste avec le souci de concevoir la loi qui permet de mettre en forme le problème.

Il est important de mener les modélisations par étapes avec toujours les mêmes idées en tête :

- expliciter les événements en reformulant la question,
- calculer leurs probabilités,
- répondre au problème posé.

Les élèves ont tendance à trop souvent oublier la première étape. Le choix est fait dans ce thème de mettre l'accent sur la loi uniforme qui permet de traiter des problèmes de temps d'attente et de temps de rencontre. La loi uniforme est ici généralisée non plus à un intervalle mais sur un produit d'intervalles. La loi exponentielle est traitée ici dans deux cadres classiques : la durée de vie d'un appareil électronique et la désintégration radioactive.

Enfin, les lois discrètes ont leur part dans ce thème avec en particulier une utilisation de la loi géométrique comme premier succès dans un schéma de Bernoulli.

II. Corrigés des TP et des problèmes thématiques

1. TP Jeu en réseau

- **Durée estimée** : 55 min
- **Objectif** : Simuler la loi uniforme.

A ► Simulation avec un tableur

2. A2 `=rand()` et C2 `=rand()`

3. La formule de la cellule E2 permet de calculer la valeur absolue de la différence entre les valeurs situées dans les cellules A2 et C2 afin d'avoir toujours un résultat positif, ce qui donnera le temps d'attente du premier joueur connecté.

La formule de la cellule G2 donne le nombre de cellules, dans la colonne E, dont les valeurs sont inférieures ou égales à 0,25, ce qui correspond au nombre d'issues de l'évènement « le temps d'attente est inférieur ou égal à un quart d'heure ».

Et la formule de la cellule H2 donne la fréquence de cet évènement.

4. La fréquence obtenue est souvent comprise entre 0,41 et 0,47.

5. On peut en déduire que la probabilité p est un nombre compris entre 0,41 et 0,47.

B ► Simulation avec un algorithme

```
1. import random
   c = 0
   for i in range(100000):
       A = random.random()
       W = random.random()
       TA = abs(A - W)
       if TA <= 0,25 :
           c = c + 1
   print (c/100000)
```

2. La fréquence est une valeur souvent comprise entre 0,435 et 0,439.

Donc p est un nombre proche de ces valeurs.

► 1. $|y - x|$ représente le temps d'attente du premier joueur connecté.

Donc $p\left(|y - x| \leq \frac{1}{4}\right)$ est la probabilité que le temps d'attente du premier joueur connecté soit inférieur à un quart d'heure, c'est-à-dire p .

$$2. |y - x| \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq y - x \leq \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x - \frac{1}{4} \leq y \leq x + \frac{1}{4}$$

3. Les deux droites vertes qui délimitent le domaine $\mathcal{D}$ ont pour équations respectives : $y = x + 0,25$ et $y = x - 0,25$. Donc $M(x; y) \in \mathcal{D}$

$$\Leftrightarrow x - 0,25 \leq y \leq x + 0,25 \Leftrightarrow |y - x| \leq 0,25$$

4. $\mathcal{A}_{\text{g}}$ = aire du carré – aire des deux triangles rectangles

$$\mathcal{A}_{\text{g}} = 1 - 2 \times \left(\frac{0,75^2}{2} \right) = 1 - 0,75^2 = 0,4375$$

Donc $p = 0,4375$

2. À la gare

- **Durée estimée :** 10 min
- **Objectif :** Manipuler une loi uniforme.

Il s'agit dans cet exercice de reformuler correctement les questions afin d'appliquer la modélisation proposée. On note alors T l'instant d'arrivée de l'individu à la gare. On a $T \mapsto \mathcal{U}([0 ; 60])$.

Entre 6 h et 7 h, il y a les trains qui partent à 6 h, à 6 h 30 et à 7 h.

Ceci pris en considération, il s'agit de comprendre les questions.

Attendre moins de 10 minutes le prochain train signifie arriver entre 6 h 20 et 6 h 30 ou entre 6 h 50 et 7 h. En utilisant la variable aléatoire sur $[0 ; 60]$, nous obtenons l'union des événements :

$$(20 \leq T \leq 30) \cup (50 \leq T \leq 60).$$

Ces deux événements étant incompatibles, on a :
 $p((20 \leq T \leq 30) \cup (50 \leq T \leq 60))$
 $= p(20 \leq T \leq 30) + p(50 \leq T \leq 60).$

Afin de calculer ces probabilités, on explicite la fonction de densité associée à T .

$T \mapsto \mathcal{U}([0 ; 60])$ donc la fonction de densité est donnée

par $t \mapsto \frac{1}{60}$. On a alors : $p(a \leq T \leq b) = \int_a^b \frac{1}{60} dt$.

$$\text{Finalement } p(20 \leq T \leq 30) = \frac{1}{6} = p(50 \leq T \leq 60).$$

Il y a donc une chance sur trois que l'individu ait à attendre moins de 10 minutes le prochain train. Attendre plus d'un quart d'heure revient à arriver entre 6 h et 6 h 15 ou entre 6 h 30 et 6 h 45, événement que l'on peut écrire :

$$(0 < T \leq 15) \cup (30 < T \leq 45).$$

Finalement :

$$p((0 < T \leq 15) \cup (30 < T \leq 45))$$

$$= p(0 < T \leq 15) + p(30 < T \leq 45) = \frac{1}{2}$$

Il y a donc une chance sur deux que l'individu attende plus d'un quart d'heure.

3. Loi exponentielle

- **Durée estimée :** 30 min
- **Objectif :** Retrouver les résultats principaux du cours et les manipuler.

A ► Quelques points théoriques

On considère une variable aléatoire réelle à densité X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . On note f sa loi de densité : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

On a :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^x.$$

$$\text{Finalement } F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

2. a) On considère sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : t \mapsto te^{-\lambda t}$. g est dérivable $\mathbb{R}_+$ sur comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{Aussi : } g'(t) = e^{-\lambda t} + t \times (-\lambda e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} - \lambda te^{-\lambda t}.$$

$$\text{Finalement } \lambda te^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - g'(t).$$

b) La question précédente, très classique dès lors que nous sommes confrontés à intégrer un produit d'un polynôme par une exponentielle, nous permet d'obtenir une primitive de la fonction $t \mapsto \lambda te^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, on peut calculer l'intégrale demandée soit $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_0^x \lambda te^{-\lambda t} dt = \int_0^x (e^{-\lambda t} - g'(t)) dt$$

Or, par linéarité de l'intégrale, on obtient :

$$\int_0^x (e^{-\lambda t} - g'(t)) dt = \int_0^x e^{-\lambda t} dt - \int_0^x g'(t) dt$$

$$\text{Or } \int_0^x e^{-\lambda t} dt = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{et } \int_0^x g'(t) dt = g(x) - g(0) = xe^{-\lambda x}$$

Finalement, après factorisation, on a :

$$\int_0^x \lambda te^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda x} + \lambda xe^{-\lambda x}) + \frac{1}{\lambda}$$

c) Si X est une variable aléatoire à densité f sur $\mathbb{R}^+$,

$$\text{alors } E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt.$$

D'après la question précédente :

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda x} + \lambda x e^{-\lambda x}) + \frac{1}{\lambda} \right)$$

et on calcule séparément les limites des différents termes qui interviennent.

On pose $y = \lambda x$.

Comme $\lambda > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ et par composée

de limites de fonctions continues, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = 0.$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda x e^{-\lambda x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y e^{-y} = 0$$

d'après le théorème des croissances comparées.

Finalement, par linéarité de limites, on a $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

$$3. a) F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\lambda x = \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

b) Le temps de demi-vie d'une loi exponentielle est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$.

B ► Durée de vie d'un appareil électronique

1. a) La variable aléatoire T_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ_1 .

L'hypothèse nous donne $E(T_1) = 100$.

Or la partie précédente nous a permis de recalculer la valeur de l'espérance, à savoir $E(T_1) = \frac{1}{\lambda_1}$.

Ainsi, on obtient $\lambda_1 = \frac{1}{100}$.

b) Par hypothèse, le temps de demi-vie est ainsi donné par 120.

Or, ce temps a été ré-établi de manière théorique

dans la partie précédente, égal à $\frac{\ln(2)}{\lambda_2}$.

D'où $\lambda_2 = \frac{\ln(2)}{120}$.

2. a) Comme dans toute modélisation mathématique, on commence par reformuler l'énoncé : soit $x \in \mathbb{R}^+$, l'appareil fonctionne à un instant x si les deux composants fonctionnent à cet instant.

Dans le cadre des variables à densité, l'instant n'a aucun poids, il s'agit donc de considérer le temps de vie par rapport à x .

Concernant l'hypothèse de fonctionnement, il convient de considérer l'événement $\{T > x\}$: le temps de vie de l'appareil dépasse x .

Cet événement est équivalent à dire que le temps de vie de C_1 et celui de C_2 dépasse x .

Ainsi : $\{T > x\} = \{T_1 > x\} \cap \{T_2 > x\}$.

Par hypothèse, le fonctionnement des deux composants est indépendant, ainsi que les événements $\{T_1 > x\}$ et $\{T_2 > x\}$.

$$\begin{aligned} p(\{T_1 > x\} \cap \{T_2 > x\}) &= p(T_1 > x) \times p(T_2 > x) \\ &= e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}. \end{aligned}$$

La question interroge sur l'événement complémentaire : $\{T \leq x\} = [T > x]$.

D'où, $p(T \leq x) = 1 - p(T > x) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}$.

b) $x \mapsto p(T \leq x)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire T .

On reconnaît donc une fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Par définition, T est une variable aléatoire à densité qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

c) On recherche la probabilité de l'événement $\{T > 100\}$. On a : $p(T > 100) = e^{-100(\lambda_1 + \lambda_2)}$.

Les valeurs des deux paramètres ont été déterminées plus haut.

D'où, $p(T > 100) = e^{-100\left(\frac{1}{100} + \frac{\ln(2)}{120}\right)} \approx 0,21$.

L'appareil fonctionne plus de 100 heures avec probabilité 0,21.

4. Parcoursup

• **Durée estimée :** 15 min

• **Objectif :** Utiliser une loi de probabilité.

1. On peut dresser le tableau de la loi de la variable aléatoire discrète T .

t	0	10	25	60
$P(T = t)$	0,2	0,1	0,3	0,4

2. On a :

$$E(T) = 0 \times 0,2 + 10 \times 0,1 + 25 \times 0,3 + 60 \times 0,4 = 32,5.$$

Le temps d'attente moyen est donc de 32,5 secondes.

$$\text{Ensuite } V(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \frac{2\,325}{4}$$

Afin d'obtenir une interprétation, on détermine l'écart-type $\sqrt{V(T)} \approx 24$ qui nous indique la manière dont sont réparties les valeurs autour de l'espérance.

3. Il y a ici présence d'une conditionnelle.

Il s'agit de calculer :

$$p_{(T>0)}(T=60) = \frac{p((T>0) \cap (T=60))}{p(T>0)} = \frac{1}{2}$$

Il n'est donc pas anormal d'attendre plus de 30 secondes puisque s'il y a un grand nombre d'élèves, environ la moitié auront à attendre une minute.

5. Rendez-vous à l'opéra

• **Durée estimée** : 20 min

• **Objectif** : Manipuler et représenter une loi uniforme.

1. On note T_C l'instant d'arrivée de Camille et T_A celui d'Alexis. Par hypothèse, on a $T_C \mapsto \mathcal{U}([0 ; 1])$ et $T_A \mapsto \mathcal{U}([0 ; 1])$. On impose ici les intervalles sur lesquels on dresse la loi uniforme. L'intervalle de 30 minutes doit être converti sur $[0 ; 1]$.

a) On traite la modélisation en plusieurs étapes.

Première étape : comprendre la question afin d'explicitier les événements à considérer.

Entrer avant la sonnerie signifie que les instants d'arrivée doivent être compris entre 15 h 30 et 15 h 45. En effet il ne faut pas oublier qu'ils attendent 5 minutes avant d'entrer. Cet intervalle de 15 minutes correspond à l'intervalle $[0 ; 0,5]$.

On doit donc considérer les événements :

$$0 \leq T_C \leq 0,5 \text{ et } 0 \leq T_A \leq 0,5$$

Deuxième étape : calculer la probabilité des événements explicités.

Dans la situation d'une loi à densité, on commence par préciser la fonction de densité associée aux variables aléatoires. Les variables aléatoires T_C et T_A suivent la même loi uniforme dont la fonction de densité est $f : t \mapsto 1$ sur $[0 ; 1]$.

$$\text{Ainsi } p(0 \leq T_C \leq 0,5) = \int_0^{0,5} 1 dt = [x]_0^{0,5} = 0,5$$

$$\text{De même } p(0 \leq T_A \leq 0,5) = 0,5$$

b) De même, avant de calculer des probabilités, on reformule la question afin d'explicitier les événements. Il s'agit ainsi de reformuler le fait que Camille et Alexis entrent avant la sonnette.

Ainsi l'instant d'arrivée de Camille et celui d'Alexis doit être compris entre 15 h 30 et 15 h 45.

Ce « et » employé nous donne une intersection d'événements : $(T_C \in [0 ; 0,5]) \cap (T_A \in [0 ; 0,5])$.

Afin de calculer la probabilité de cette intersection, il faut amener ici une hypothèse supplémentaire.

On peut, grâce à l'énoncé, supposer, sans grand risque, que les deux instants d'arrivée sont indépendants l'un de l'autre. Les deux événements considérés dans l'intersection sont alors, de même, considérés comme indépendants.

$$\text{Ainsi } p((T_C \in [0 ; 0,5]) \cap (T_A \in [0 ; 0,5]))$$

$$= p(0 \leq T_C \leq 0,5) \times p(0 \leq T_A \leq 0,5) = 0,25$$

2. La question reprend les techniques et calculs abordés dans le TP 1 concernant une généralisation de la loi uniforme à un espace produit.

Liberté est laissée pour approfondir ce point.

a) Soit M un point du plan de coordonnées $(x ; y)$. L'appartenance de M à la surface se caractérise par un écart entre abscisse et ordonnée de moins d'un sixième.

L'exercice concerne deux variables aléatoires. Si l'on assimile l'axe des abscisses à T_C et l'axe des ordonnées à T_A , la surface colorée correspond

$$\text{donc à la condition } |T_C - T_A| \leq \frac{1}{6}.$$

Un sixième sur $[0 ; 1]$ correspond à un temps de 5 minutes. La surface colorée peut donc correspondre à des instants d'arrivée dont l'écart n'excède pas 5 minutes.

b) L'événement : « Alexis et Camille rentrent ensemble dans la salle » peut se traduire ainsi : ils arrivent tous deux avec un instant d'arrivée dont l'écart est plus petit que 5 minutes.

La probabilité $p\left(|T_C - T_A| \leq \frac{1}{6}\right)$ est égale à l'aire de la surface décrite.

Celle-ci est composée de deux triangles équilatéraux et d'un rectangle. Le théorème de Pythagore nous permet d'obtenir la largeur du rectangle qui

$$\text{est } \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ ainsi que sa longueur qui est } \frac{5\sqrt{2}}{6}.$$

$$p\left(|T_C - T_A| \leq \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{5\sqrt{2}}{6} \times \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{11}{36}$$

6. TP Datation du carbone 14

- **Durée estimée** : 55 min
- **Objectif** : Simuler une durée de vie.

A ► Désintégration du carbone 14

1. Le phénomène de désintégration de l'atome nous permet de former l'équation différentielle $y'(x) = \lambda(1 - y(x))$ où y est définie sur $\mathbb{R}_+$, pour une certaine constante $\lambda > 0$.

a) Afin de résoudre cette équation différentielle, on l'écrit sous la forme usuelle $y'(x) + \lambda y(x) = \lambda$. Les solutions de cette équation différentielle sont données comme somme des solutions de l'équation homogène $y'(x) + \lambda y(x) = 0$ avec une solution particulière.

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y(x) = Ae^{-\lambda x}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

De plus, une solution particulière est la fonction constante égale à 1. Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$X \mapsto Ae^{-\lambda x} + 1 \text{ avec } A \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, il existe une valeur réelle A telle que :

$$F(x) = Ae^{-\lambda x} + 1 \text{ pour } x \in \mathbb{R}_+$$

Reste à déterminer cette valeur.

Rappelons que F est la fonction de répartition de la variable aléatoire T . On va ainsi pouvoir obtenir une condition initiale sur la fonction : $F(0) = p(T \leq 0) = 0$.

Ainsi $A = -1$ et $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.

b) On reconnaît alors F comme fonction de répartition d'une loi exponentielle. T est une variable à densité de loi exponentielle de paramètre λ .

2. Rappelons tout d'abord que la fonction **Python** `log` désigne le logarithme népérien.

On rentre comme paramètre la valeur `lambda` : λ et l'on simule une valeur aléatoire x .

$$\text{On a alors } x = 1 - e^{-\lambda y} \Leftrightarrow y = \frac{-\ln(1-x)}{\lambda}$$

$$3. \text{ On a } t_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{t_{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{Ainsi, on obtient, si } t_{\frac{1}{2}} = 5730, \lambda = \frac{\ln(2)}{5730}$$

Le paramètre de la loi s'exprime ainsi en an^{-1} . En convertissant le temps de demi-vie en seconde, on peut également obtenir $\lambda \approx 3,8 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$.

b) Afin d'obtenir une simulation du temps de vie, à voir dans quelle unité on le souhaite, on rentre à la suite du programme :

```
print(desintegration(log(2)/5730))
```

B ► Datation

On considère un nombre d'atomes N de carbone 14 que contenait un organisme à l'instant initial.

1. B_i compte si l'atome numéro i s'est désintégré

ou pas, ainsi $\sum_{i=1}^N B_i$ compte le nombre d'atomes qui se sont désintégrés.

$$\text{On a ainsi } \sum_{i=1}^N B_i = N - n$$

2. B_i est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli. La question nous demande finalement de déterminer le paramètre de cette loi.

Ce paramètre est la probabilité pour un atome de carbone de se désintégrer avant un instant donné.

Mettons que cet instant soit noté t , alors :

$$p(B_i = 1) = F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

B_i suit ainsi une loi de Bernoulli de paramètre $1 - e^{-\lambda t}$.

3. a) La fréquence d'atomes désintégrés est égale au nombre d'atomes désintégrés quotienté par le nombre d'atomes à l'instant initial, soit donc :

$$\frac{N - n}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N B_i}{N}$$

b) `return S/N`

Le mode aléatoire permet d'obtenir la simulation du nombre d'atomes désintégrés avant l'instant t suivant $p(B_i = 1) = 1 - e^{-\lambda t}$.

c) On représente pour plusieurs valeurs de t arbitraires le résultat de cette fonction de N .

d) On peut observer que cette fonction semble converger lorsque N devient très grand.

Cette fréquence d'atomes correspond à la moyenne empirique de la loi de Bernoulli, cette convergence correspond donc à la loi forte des grands nombres que l'on peut observer ici.

La limite de la fonction correspond ainsi à l'espérance de la loi de Bernoulli.

4. La valeur de $N = 7 \cdot 10^{10}$ est très grande donc on peut sans trop risquer approximer la fréquence à sa limite : l'espérance de la loi.

Ainsi :

$$\frac{N-n}{N} = E(B_p) = 1 - e^{-\lambda t}$$

5. Suivant cette approximation :

$$\frac{N-n}{N} = 1 - e^{-\lambda t} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{n}{N} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(N) - \ln(n)}{\lambda}$$

7. Greffes de rosiers

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Justifier et manipuler une loi géométrique.

1. a) Lors de la greffe d'un rosier, il s'agit de considérer si la greffe prend ou pas.

Il s'agit donc d'une épreuve de Bernoulli avec comme deux issues :

- prise de la greffe, de probabilité $p = 0,6$,
- non prise de la greffe, de probabilité $1 - p = 0,4$.

La tentative de greffe d'un rosier suit donc une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1; 0,6)$.

b) Si l'on choisit de modéliser le problème par une loi binomiale, il s'agit alors de considérer un certain nombre n de tentatives de greffes.

On répète alors n fois l'expérience de Bernoulli décrite précédemment de manière indépendante. Le nombre de greffes nécessaire pour un rosier associé à ce schéma suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,6)$.

On calcule alors, pour $n = 4$:

$$p(G = 0) = 0,4^4 = 0,0256$$

2. a) G est une variable aléatoire qui correspond au premier succès dans un schéma de Bernoulli. Par définition, G suit donc une loi géométrique de paramètre $p = 0,6$.

On a ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p(G = n) = p(1 - p)^{n-1}$$

Ici, le calcul revient à $p(G \geq 5) = 0,4^4$ qui est exactement le même résultat qu'avec la loi binomiale. Ici effectivement, il n'y avait pas lieu de parler d'un succès quelconque, on ne regardait que les échecs.

b) L'espérance de la loi géométrique est donnée par :

$$E(G) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,6} \approx 1,67$$

Il faut, en moyenne, un peu moins de deux tentatives afin que la greffe prenne.

3. On note X le nombre de greffes nécessaires pour que la totalité des rosiers soient greffés. Si l'on note G_i le nombre de greffes nécessaires pour le rosier numéro i , alors :

$$X = G_1 + \dots + G_{20}$$

On suppose les rosiers indépendants les uns des autres.

D'après les questions précédentes, chaque G_i suit une loi géométrique de paramètre p .

On applique ensuite la linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(G_1 + \dots + G_{20}) = E(G_1) + \dots + E(G_{20})$$

$$= 20 \times E(G_1) = \frac{20}{0,6} \approx 33,3$$

Il faut ainsi, en moyenne, 33 greffes afin que les 20 rosiers aient chacun une greffe prise.

4. a) Le nombre nécessaire de greffes pour que les 20 rosiers prennent doit être plus grand que 20.

b) On somme les probabilités données.

C'est un peu laborieux et si l'on dispose d'ordinateur, on peut réécrire la loi et utiliser une somme sur tableur.

$$p(X \leq 30) \approx 0,2915$$

c) Finalement : $p(X \geq 50) = 1 - p(X < 50) \approx 0,018$

Il est très peu probable qu'il faille exécuter plus de 50 greffes.

THÈME 9 Corrélation et causalité

I. Introduction

À travers l'étude de séries statistiques à deux variables, l'objectif de ce thème est d'amener l'élève à évaluer une corrélation entre deux phénomènes, à développer une réflexion critique sur le lien entre deux phénomènes corrélés, et à distinguer corrélation et causalité.

Les différents TP choisis permettent de répondre à cet objectif essentiel qui, au-delà de la maîtrise des outils mathématiques et numériques, permet à l'élève de comprendre l'importance de l'analyse critique des données qui nous environnent. Ces TP balayent les différents champs de connaissance (sciences expérimentales, sociales, économiques) et s'appuient sur une bonne connaissance des fonctions usuelles.

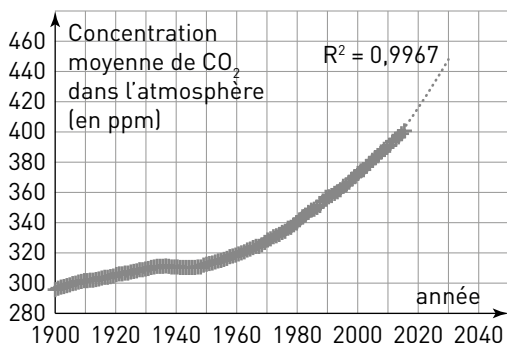
II. Corrigés des TP et des problèmes thématiques

1. TP Température et gaz à « effet de serre ».

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Utiliser un tableur pour ajuster un nuage de points et extrapoler.

A ► Étude de la concentration moyenne de CO₂ dans l'atmosphère

1. 2. 3. et 4. a)



4. b) Ajustement :

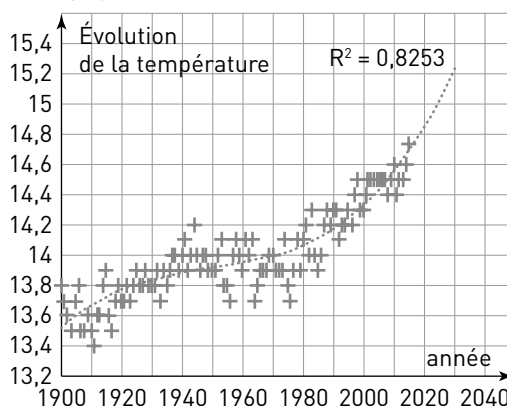
- linéaire : $r^2 \approx 0,873\ 2$
- polynomial de degré 2 : $r^2 \approx 0,988\ 8$
- polynomial de degré 3 : $r^2 \approx 0,996\ 7$

Le meilleur ajustement du nuage est donc l'ajustement par une courbe représentative d'un polynôme du troisième degré.

c) Avec l'ajustement polynomiale de degré 3 on observe, sur le graphique, qu'en 2030 la concentration moyenne en CO₂ dans l'atmosphère pourrait être d'environ 450 ppm. Cela confirme les prévisions données dans l'énoncé.

B ► Température moyenne globale

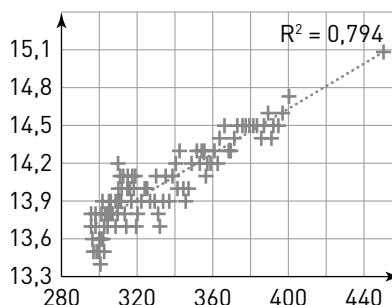
1. 2. et 3.



4. Selon cet ajustement on observe sur le graphique que la température moyenne globale pourrait être égale à 15,2 °C en 2030.

C ► Lien entre température et concentration de CO₂

1. 2. 3. et 4.



5. Si cette corrélation linéaire se poursuit jusqu'en 2030, alors, à une concentration en CO₂ de 450 ppm devrait correspondre une température d'environ 15,1 °C.

2. TP Loi de Moore

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Modéliser des évolutions.

A ► Évolution du nombre de transistors selon la première loi de Moore

1. Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} = 2u_n.$$

$$2. u_1 = 4\,600, u_2 = 9\,200, u_3 = 18\,400$$

3. (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

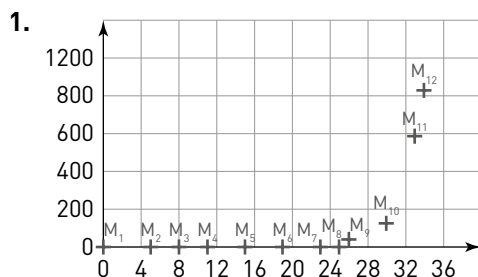
$$4. u_n = 2\,300 \times 2^n.$$

$$5. u_3 = 18\,400$$

$$u_{11} = 2\,300 \times 2^{11} = 4\,710\,400$$

Donc, en 1974, un microprocesseur devait contenir 18 400 transistors et en 1982, il devait y en avoir environ 4,7 millions.

B ► Évolution réelle du nombre de transistors par microprocesseur



2. a) v_0 correspond bien au nombre de transistors en 1974 soit 6 000. Et la relation $v_{n+2} = 2v_n$ signifie que le nombre de transistors double tous les deux ans.

b) Si (v_n) est une suite géométrique de raison q alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+2} = q \times v_{n+1} = q^2 \times v_n$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+2} = 2v_n$$

$$\text{Donc } q^2 = 2 \Leftrightarrow q = \sqrt{2}$$

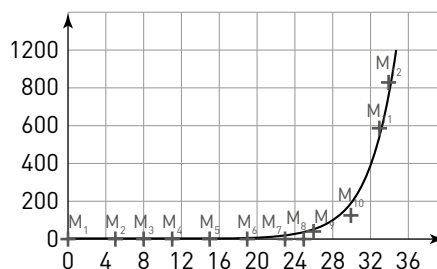
(car $q > 0$, un nombre de transistors ne pouvant être négatif !).

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 0,006 \times (\sqrt{2})^n$

$$d) v_{34} = 0,006 \times (\sqrt{2})^{34} \approx 786.$$

Cette valeur théorique n'est pas très éloignée de la valeur réelle (820).

3. a)



b) La courbe obtenue coïncide assez bien avec le nuage de points.

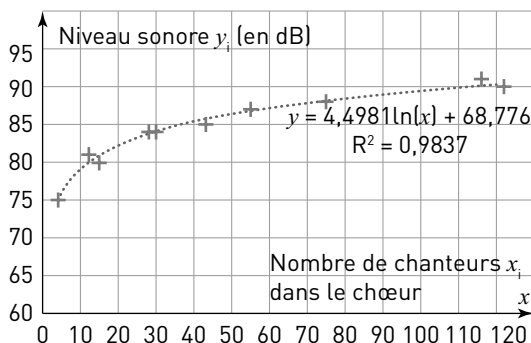
c) La deuxième loi de Moore (représentée par la courbe) est une prédiction relativement juste de l'évolution du nombre de transistors sur les microprocesseurs de 1974 à 2008 (représentée par le nuage de points M_i).

3. TP Chorale et décibels

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Découvrir un ajustement logarithmique.

A ► Étude du nuage de points à l'aide d'un tableur

1. 2. 3. et 4.



$$5. a) y = 4,5 \ln 200 + 68,8 \approx 92,6$$

Pour une chorale de 200 personnes le niveau sonore devrait être d'environ 93 décibels.

$$b) 4,5 \ln x + 68,8 \geq 100 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{31,2}{4,5}$$

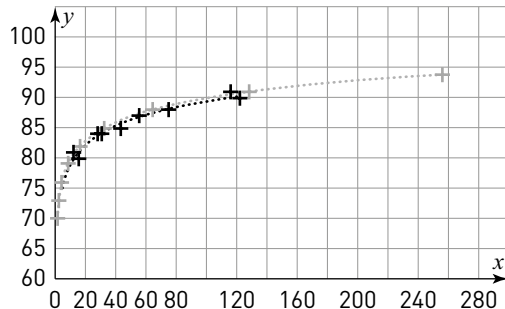
$$\Leftrightarrow x \geq e^{\frac{31,2}{4,5}}$$

$$\text{Or } e^{\frac{31,2}{4,5}} \approx 1\,026.$$

Donc il faudrait réunir 1 026 chanteurs sur scène pour obtenir une puissance supérieure à 100 décibels.

B ► Comparaison avec une autre série statistique1. $A4 = A3 \times 2$ et $B4 = B3 + 3$

2. et 3.

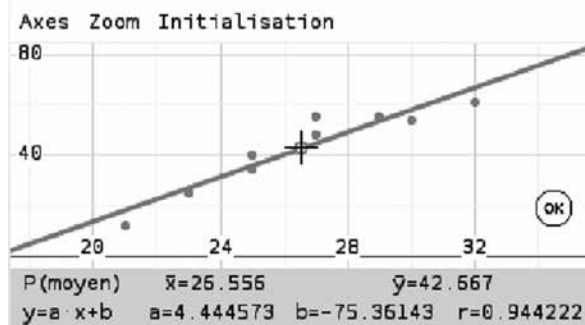


La courbe de tendance obtenue coïncide avec celle de la partie A.

4. Donc l'affirmation du directeur de la salle est correcte.

4. TP Effet cigogne

- **Durée estimée :** 40 min
- **Objectif :** Comprendre la différence entre la corrélation et le lien de causalité de deux quantités.

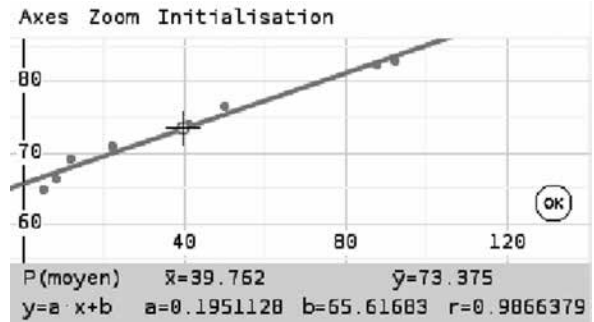
A ► Ventes de glaces et température moyenne1. a) et b) $y = 4,44x - 75,36$.

2. Le coefficient de corrélation ($r \approx 0,94$) est assez proche de 1. Donc on peut estimer qu'il y a une certaine corrélation entre la température x et le nombre y de glaces vendues.

3. Il semble logique de considérer que plus il fait chaud plus les clients du glacier ont envie d'acheter une glace. Donc le lien de causalité entre la température et le nombre de glaces vendues semble pertinent.

4. $y \approx 4,44 \times 37 - 75,36 \approx 89$

Elle pourrait vendre environ 89 glaces.

B ► Consommation de viande et espérance de vie1. a) et b) $y = 0,195x + 65,617$ et $r \approx 0,987$ 

2. a) Le coefficient de corrélation r est très proches de 1, donc on peut dire que les deux quantités sont bien corrélées.

b) $y \approx 0,195 \times 82 + 65,617 \approx 81,6$

On peut ainsi estimer que l'espérance de vie en Israël, en 2018, est autour de 81,6 ans.

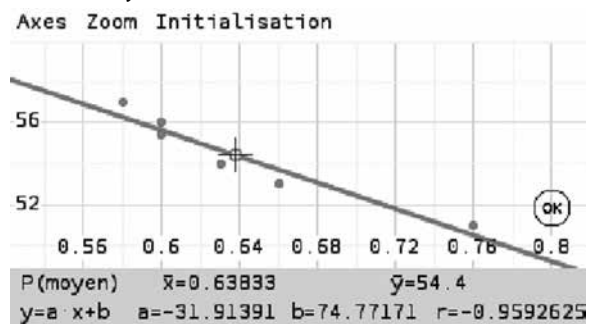
$y \approx 0,195 \times 40,6 + 65,617 \approx 73,5$

On peut ainsi estimer que l'espérance de vie en Arabie Saoudite, en 2018, est autour de 73,5 ans. Sur Internet, on trouve 82,5 pour Israël et 74,5 pour l'Arabie Saoudite. Ce qui confirme que la corrélation est assez bonne.

3. Il n'y a aucune raison de penser que plus on mange de viande, plus on vit vieux, d'autant plus qu'on connaît les effets négatifs sur la santé d'un régime trop riche en viande.

En revanche, la corrélation peut venir du fait que les pays où on mange le plus de viande sont les pays riches qui ont des systèmes de santé plus efficaces et des conditions de vie meilleures que dans les pays pauvres et donc une espérance de vie plus élevée.

Il y a donc un lien de causalité indirect.

C ► Prix du timbre et consommation de lait1. a) et b) $y = -31,91x + 74,77$ et $r \approx -0,96$.

2) Le coefficient de corrélation r est très proche de -1 . La corrélation est donc bien réelle entre ces deux quantités.

3) Il n'y a pas pour autant de lien de causalité entre ces deux quantités.

L'affirmation : « Plus l'envoi de courrier est cher, moins on consomme de lait » est absurde.

La corrélation est, dans ce cas, simplement un pur hasard.

5. TP Force centrifuge

- **Durée estimée** : 30 min
- **Objectif** : Ajuster avec un changement de variable

A ► Effet sur un liquide

1.

x	0	5	8	10	12	15	20
y	0	0,89	1,3	1,67	1,92	2,45	3,19

2. $r \approx 0,999$ 3. On a r très proche de 1.

Donc l'ajustement affine du nuage de points $\{x, y\}$ est particulièrement adapté.

3. L'équation de la droite de régression de y en x est : $y = 0,159x + 0,047$

$$\sqrt{h - 7,6} = 0,159x + 0,047$$
$$\Leftrightarrow h - 7,6 = [0,159x + 0,047]^2$$

$$\Leftrightarrow h - 7,6 = 0,025x^2 + 0,015x + 0,002$$

$$\Leftrightarrow h = 0,025x^2 + 0,015x + 7,602$$

4. f est la fonction définie sur $[0;25]$ par :

$$f(x) = h = 0,025x^2 + 0,015x + 7,602$$

5.

x	0	5	8	10	12	15	20
$f(x)$	7,6	8,3	9,3	10,3	11,4	13,5	17,9

Les valeurs $f(x)$ sont très proches des valeurs expérimentales de h .

B ► Effet sur une cycliste

1.

x	1,5	2,5	5	12	17,5	25	33
y	100	169	400	900	1 406	1 936	2 500

2. $r \approx 0,999$. Ce coefficient de corrélation linéaire étant proche de 1, cette série statistique $\{x, y\}$ peut être ajustée par une droite.

$$3. y = 76,908x - 1,487$$

$$\Leftrightarrow v^2 = 76,908x - 1,487$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{76,908x - 1,487}$$

$$4. v = \sqrt{76,908 \times 10 - 1,487} \approx 27,7$$

Dans un virage de 10 m de rayon de courbure, la vitesse maximale est donc environ égale à 27,7 km⁻¹.

Achevé d'imprimer
À VENIR