

# Vecteurs

## 1. Définitions :

Un vecteur  $\vec{u}$  peut être défini de deux manières différentes :

- par ses 3 composantes dans le repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  que l'on choisira ici orthonormé direct :

$$\overrightarrow{OM}(x; y; z) \iff \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- par sa norme, sa direction et son sens :

- La norme du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  représente la distance entre le point  $O$  et le point  $M$ .

$$\text{On a } \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

- La direction et le sens est souvent donné par le **vecteur unitaire** (vecteur de norme 1) :  $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ .

## 2. Propriétés :

Soient  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère,  $\vec{u}(x; y; z)$  et  $\vec{v}(x'; y'; z')$  deux vecteurs,  $a$  un réel,  $A(x_A, y_A, z_A)$  et  $B(x_B, y_B, z_B)$  deux points :

- $\vec{u} = \vec{v} \iff x = x' \text{ et } y = y' \text{ et } z = z'$
- $\vec{u} + \vec{v}$  a pour composantes  $(x + x'; y + y'; z + z')$
- $a\vec{u}$  a pour composantes  $(ax; ay; az)$
- $\overrightarrow{AB}$  a pour composantes  $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $I$  le milieu de  $[AB]$  a pour coordonnées  $(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2})$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  (Relation de **Chasles**)

## 3. Produit scalaire :

On peut définir le produit scalaire de 2 vecteurs  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  à partir de leurs composantes OU bien à partir de leur (norme + sens + direction) :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' \quad \text{OU} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Deux vecteurs sont donc orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Le résultat d'un produit scalaire est un réel qui peut être positif ou négatif selon que les 2 vecteurs forment un angle aigu ou obtus.

## 4. Projection d'un vecteur $\vec{F}$ sur un axe

En physique on appelle souvent « projection de  $\vec{F}$  sur  $(Ox)$  » la composante de  $\vec{F}$  sur  $(Ox)$  c.à.d  $F_x$ . Les trois composantes d'un vecteur sont des grandeurs algébriques (c'est-à-dire qu'elles peuvent être positives ou négatives) contrairement à la norme qui est toujours positive.

La composante d'un vecteur sur un axe (en physique « projection d'un vecteur sur un axe ») s'obtient facilement en faisant le produit scalaire de ce vecteur avec le vecteur unitaire de l'axe.

Par exemple :  $F_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x = \|\vec{F}\| \cos(\vec{F}, \vec{u}_x)$  car  $\|\vec{u}_x\| = 1$  si  $\vec{u}_x$  est le vecteur unitaire de l'axe  $(Ox)$ .

## 5. Additions de vecteurs

Attention :  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ . Pour sommer des vecteurs il est indispensable de les projeter, c'est à dire de sommer les composantes.