

Dérivées

(f, u, g fonctions dérivables)

1. Définition :

La dérivée est définie comme la limite du taux de variation : $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Ceci a plusieurs conséquences importantes :

- La dérivée en un point donne le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de $f(x)$ en ce point.
- La dérivée est donc utile pour savoir si la fonction est croissante ($f'(x) > 0$), décroissante ($f'(x) < 0$) ou a atteint un extrémum (alors $f'(x) = 0$ sur un intervalle ouvert).
- En physique la dérivée est souvent notée $f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{\text{variation élémentaire de } f}{\text{variation élémentaire de } x}$.

2. Composée de fonctions :

Pour une fonction composée $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ on a :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{soit} \quad (f \circ u)'(x) = (f' \circ u)(x) \times u'(x)$$

3. Dérivées des fonctions usuelles à connaître par cœur :

Dans le tableau ci dessous, pour la première colonne u est la variable dont dépend f , et on dérive donc f par rapport à u . Dans la deuxième colonne $u(x)$ est une fonction de x et on dérive f par rapport à x .

	$\frac{d(f(u))}{du}$	$\frac{d(f(u(x)))}{dx}$
$f(u) = \ln(u)$	$\frac{1}{u}$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$f(u) = \exp(u)$	$\exp(u)$	$u'(x) \times \exp(u(x))$
$f(u) = \cos(u)$	$-\sin(u)$	$-u'(x) \times \sin(u(x))$
$f(u) = \sin(u)$	$\cos(u)$	$u'(x) \times \cos(u(x))$
$f(u) = \frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2}$	$-\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$
$f(u) = \sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$f(u) = u^n$ ($n \neq -1$)	$n u^{n-1}$ ($n \neq -1$)	$n u'(x) (u(x))^{n-1}$ ($n \neq -1$)

4. Produit, somme

$$(f \times g)' = f' \times g + g' \times f \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$$

$$(f + g)' = f' + g' \quad \text{et} \quad (af)' = af' \quad (\text{avec } a = \text{cste})$$