

Equations différentielles pour la physique

1. Principe et définitions:

- (a) Une équation différentielle (E.D) est une équation dont la solution n'est pas un nombre mais une **fonction** (par exemple $u(t)$). L'E.D. donne une relation entre la fonction cherchée et ses dérivées.
- (b) En physique, la plupart des E.D. sont du premier ordre ($bu' + cu = f(t)$) ou du deuxième ordre ($au'' + bu' + cu = f(t)$) à **coefficients constants** (a, b, c constants). Seules sont traitées sur cette fiche les E.D. d'ordre 1 à coefficients constants.
- (c) $f(t)$ est appelé le **second membre**, en physique on considérera surtout les cas $f(t) = 0$ (on dit alors que l'équation est "**homogène**") , $f(t) = E = cste$ (on dit que le second membre est constant), ou $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ (on dit que le second membre est sinusoïdal). Cette fiche ne traite que les cas $f(t) = 0$ ou $f(t) = E$.
- (d) La méthode générale à retenir est que pour trouver les solutions d'une équation différentielle il faut d'abord trouver les **solutions de l'équation homogène associée u_H** puis **ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre u_P** : $u(t) = u_H(t) + u_P(t)$ avec $bu'_H + cu_H = 0$ et $bu'_P + cu_P = f(t)$

2. Solutions homogènes : $u_H(t)$

- (a) Si $y(t)$ est solution de l'équation homogène, $\lambda y(t)$ est aussi solution. Il y a donc une infinité de solutions de l'équation homogène qui diffèrent toutes par une constante multiplicative λ appelée **constante d'intégration**.
- (b) **Principe** : Lorsque les coefficients sont constants, **on cherche les solutions de la forme λe^{rt} et on remplace dans l'équation homogène**. En simplifiant par λe^{rt} qui est non nul, on obtient une équation qui permet de déterminer r .
- (c) **Exemple**: Equation du premier ordre homogène: $bu'_H + cu_H = 0$. Avec $u_H(t) = \lambda e^{rt}$, on obtient en remplaçant $br\lambda e^{rt} + c\lambda e^{rt} = 0$, soit après simplification $br + c = 0$. Il y a une solution $r_o = -c/b$. Les solutions de l'équation homogène sont donc $u_H(t) = \lambda e^{r_o t} = \lambda e^{-ct/b}$.

3. Solution particulière : $u_P(t)$

Il s'agit ici de trouver **une** solution **particulière** de l'équation avec second membre. L'idée est de la chercher "de la forme du second membre". Si le second membre est constant ($bu'_P + cu_P = E$), **on cherche $u_P(t) = cste$, soit $u'_P(t) = 0$. En remplaçant dans l'équation différentielle complète on trouve donc $u_P(t) = E/c$.**

4. Constantes d'intégration :

En physique il n'y a pas une infinité de solutions mais une seule évolution possible qui est déterminée par les **conditions initiales** du problème. Pour les équations du premier ordre, il suffit de connaître **une** valeur $u(t_o) = u_H(t_o) + u_P(t_o)$ à un instant t_o donné pour déterminer la constante d'intégration λ . Par exemple, si on sait que $u(0) = 0$, on a $u(0) = \lambda e^0 + E/c = 0$, soit $\lambda = -E/c$.