

Primitives - intégrales

f et u fonctions dérivables

1. Différence entre primitive et intégrales :

- **La primitive** $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ est une fonction qui vérifie $F'(x) = f(x)$. Il y a donc une infinité de primitives de la fonction f qui **diffèrent toutes par une constante**.
 - On note souvent abusivement $F(x) = \int f(x)dx$ (sans bornes!)
- **L'intégrale** entre a et b de la fonction $f(x)$ est un nombre qui vérifie $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
 - (On voit que la constante de la primitive est ici sans importance puisqu'elle se simplifie).
- Le symbole $\int_a^b \dots$ se lit aussi "**somme** de a à b ..." en effet $\int_a^b f(x)dx$ correspond à la somme de rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur infiniment fine dx entre $x = a$ et $x = b$.
(Si $b > a$ et $f(x) > 0$ c'est donc "l'aire sous la courbe de f ")

2. Primitive des fonctions usuelles :

Revoir le tableau des dérivées des fonctions usuelles, on a alors facilement (à la constante K près), $n \neq 1$.

$\int \frac{du}{u}$	$\int \exp(u)du$	$\int u^n du$	$\int \frac{du}{\sqrt{u}}$	$\int \frac{du}{u^2}$	$\int \cos(u)du$	$\int \sin(u)du$
$\ln(u) + K$	$\exp(u) + K$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + K$	$2\sqrt{u} + K$	$-\frac{1}{u} + K$	$\sin(u) + K$	$-\cos(u) + K$

Remarque 1 : u peut être soit une variable "muette" (notée généralement x en maths et généralement tout sauf x en physique) soit une fonction $u(x)$ (dérivable), auquel cas $du = u'(x)dx$ (voir fiche dérivée).

Remarque 2 : Comme il est beaucoup plus facile de dériver que d'intégrer, nous vous conseillons de toujours vérifier votre intégrale en re-dérivant.

Remarque 3: Dans les QCM ci dessous quand on demande "déterminer la primitive qui s'annule en a " (par exemple), il faut donc trouver la constante K telle que $F(a) = 0$.

3. Principe des "intégrales à vue"

Lors d'intégrale de fonctions composées, on cherche à faire apparaître $\int f'(u) \times du = \int f'(u(x)) \times u'(x)dx = f(u(x)) + K$ en multipliant éventuellement par une constante .

Exemple 1: $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{u'(x)dx}{u(x)} = \frac{1}{2} \ln(u(x)) + K = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + K$ en posant $u(x) = x^2+1$

Exemple 2: $\int \sin(x) \exp(\cos(x))dx = - \int (-\sin(x)) \times \exp(\cos(x))dx = - \int u'(x) \times \exp(u(x))dx = -\exp(u) + K = -\exp(\cos(x)) + K$ en posant $u(x) = \cos(x)$

Exemple 3: $\int \cos(x)(\sin(x))^2dx = \int \int u'(x) \times (u^2(x))dx = \frac{u^3(x)}{3} + K = \frac{\sin^3(x)}{3} + K$ en posant $u(x) = \sin(x)$