

Equation différentielle d'ordre 1 :

1^{ère} étape : on écrit l'équation différentielle sous la forme :

$$y'(x) + a(x)y(x) = g(x)$$

2^{nde} étape : On résout l'équation sans second membre (ou équation homogène)

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

Pour $y(x) \neq 0$ on vérifie à cette étape si $y(x) = 0$ convient comme solution dans l'équation différentielle de départ.

$$\frac{y_H'(x)}{y_H(x)} = -a(x)$$

On intègre (on cherche alors une primitive de $a(x)$, nommons la $A(x)$, il vient :

$$\ln|y_H(x)| = -A(x) + C$$

On passe à l'exponentielle il vient :

$$e^{\ln|y_H(x)|} = e^{-A(x)+C}$$

Et $e^{\ln|y_H(x)|} = y_H(x)$ et $e^{-A(x)+C} = e^{-A(x)} \times e^C = K_1 e^{-A(x)}$, il vient :

$$y_H(x) = K_1 e^{-A(x)}$$

Avec K_1 une constante réelle et $A(x)$ une primitive de $a(x)$ (on la prend toujours avec constante nulle, car cela n'a aucune utilité de la prendre non nulle).

On a trouvé les solutions de l'équation homogène

3^{ème} étape : on cherche **une solution particulière**, en observant l'équation différentielle pour déterminer la forme de la solution particulière ou en procédant à la méthode de variation la constante, c'est-à-dire qu'on remplace K_1 par $K(x)$ et on détermine $K(x)$ il vient :

$$y_p(x) = K(x)e^{-A(x)}$$

$$\frac{dy_p(x)}{dx} = K'(x)e^{-A(x)} - (A(x))'K(x)e^{-A(x)} \text{ avec : } (A(x))' = a(x)$$

$$\frac{dy_p(x)}{dx} = K'(x)e^{-A(x)} - a(x)K(x)e^{-A(x)}$$

On remplace dans l'équation différentielle complète (celle de départ), il vient :

$$y_p'(x) + a(x)y_p(x) = g(x)$$

$$K'(x)e^{-A(x)} - a(x)K(x)e^{-A(x)} + a(x)K(x)e^{-A(x)} = g(x)$$

$$K'(x)e^{-A(x)} = g(x)$$

$$K'(x) = g(x)e^{A(x)}$$

On intègre l'égalité précédente pour obtenir $K(x)$ et on obtient la solution particulière.

$$K(x) = \int g(x)e^{A(x)} dx$$

La solution générale de l'équation différentielle est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de l'équation particulière, il vient :

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = K_1 e^{-A(x)} + K(x) e^{-A(x)}$$

$$y(x) = K_1 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int g(x) e^{A(x)} dx$$

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(K_1 + \int g(x) e^{A(x)} dx \right)$$

Un exemple avec variation de la constante :

$$y'(x) - 2xy(x) = 3xe^{x^2}$$

On résout tout d'abord l'équation sans second membre, on trouve : $y_h(x) = Ke^{x^2}$ et on ne voit pas de solution particulière évidente, on applique la méthode de variation de la constante en posant $y_p(x) = K(x)e^{x^2}$ d'où $y'_p(x) = K'(x)e^{x^2} + 2xK(x)e^{x^2}$ en remplaçant dans l'équation différentielle de départ il vient : $K'(x)e^{x^2} + 2xK(x)e^{x^2} - 2xK(x)e^{x^2} = 3xe^{x^2}$ soit :

$$K'(x)e^{x^2} = 3xe^{x^2} \text{ d'où } K'(x) = 3x \text{ d'où } K(x) = \frac{3}{2}x^2 + C \text{ d'où :}$$

$$y_p(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 + C \right) e^{x^2} \text{ donc } y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 + C_2 \right) e^{x^2}$$

On peut parfois éviter la méthode de variation de la constante, en observant l'équation différentielle de départ, selon les expressions qu'on y trouve.

Des exemples de détermination des solutions particulières sans passer par la méthode de variation de la constante :

Pour : $y'(x) + x^2 y(x) = -x^2$; $y_p(x) = -1$ convient.

Pour : $2xy'(x) - y(x) = x$; $y_p(x) = x$ convient.

Pour : $y'(x) - \frac{x}{1+x^2} y(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $y_p(x) = x$ convient.

Pour : $(x+1)y' + xy = x^2 - x + 1$, un polynôme de degré 1 convient, on pose : $y_p(x) = ax + b$ alors $y'_p(x) = a$ on remplace dans l'équation différentielle et on procède par identification : $(x+1)a + x(ax+b) = x^2 - x + 1$ soit $ax + a + ax^2 + bx = x^2 - x + 1$ (deux polynômes sont égaux si et seulement si tous les coefficients de même degré sont égaux) d'où $a = 1$ et $a + b = -1$ d'où $b = -2$. On obtient $y_p(x) = x - 2$

Pour : $y'(x) + 2y(x) = \sin(x)$, une fonction de la forme :

$y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$ convient, on a $y'_p(x) = -a \sin(x) + b \cos(x)$ on remplace dans l'équation différentielle de départ et on identifie, il vient : $-a \sin(x) + b \cos(x) + 2(a \cos(x) + b \sin(x)) = \sin(x)$, d'où $-a + 2b = 1$ et $b + 2a = 0$ soit $b = \frac{2}{5}$ et $a = -\frac{1}{5}$ d'où :

$$y_p(x) = -\frac{1}{5} \cos(x) + \frac{2}{5} \sin(x)$$

Pour : $y'(x) + y(x) = \cos(2x)$, une fonction de la forme :

$y_p(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x)$ et on procède comme pour le cas précédent,

$y_p'(x) = -2a \sin(2x) + 2b \cos(2x)$ on remplace dans l'équation différentielle et on procède par identification : $-2a \sin(2x) + 2b \cos(2x) + a \cos(2x) + b \sin(2x) = \cos(2x)$, d'où $-2a + b = 0$ et $2b + a = 1$ soit $b = \frac{2}{5}$ et $a = \frac{1}{5}$. on trouve finalement : $y_p(x) = \frac{1}{5} \cos(2x) + \frac{2}{5} \sin(2x)$

Pour : $y'(x) + y(x) = e^{3x}$ une fonction de la forme : $y_p(x) = ae^{3x}$ convient, $y_p'(x) = 3ae^{3x}$ il vient : $3ae^{3x} + ae^{3x} = e^{3x}$ d'où $a = \frac{1}{4}$ donc $y_p(x) = \frac{1}{4}e^{3x}$

4^{ième} étape : si dans l'énoncé, on donne des conditions particulières on procède aux calculs pour déterminer les coefficients dans la solution (attention c'est seulement à cette dernière étape qu'il faut faire ces calculs et non pas à l'étape 2).