

Second ordre

Équations différentielles du type $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

Les équations différentielles linéaires homogène à coefficients constants d'ordre 2 sont de la forme : $ay'' + by' + cy = 0$. (avec a, b et c des réels non nul).

On recherche des solutions de la forme $y(x) = e^{rx}$ où r est un nombre inconnu.

On a : $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2e^{rx}$

L'équation devient : $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$

$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$ ce qui revient à résoudre :

$ar^2 + br + c = 0$ (car $e^{rx} \neq 0$) cette équation s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2. (Il faut donc savoir résoudre une équation du second degré. Le rappel est fait dans le chapitre calculs numériques et algébriques).

Nommons r_1 et r_2 les racines

Selon le signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$:

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine double réelle $r = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines réelles $r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{-b + i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} = \alpha + i\beta$

et $r_2 = \frac{-b - i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a} = \alpha - i\beta$

La solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 : $ay'' + by' + cy = 0$ est alors :

$$y(x) = \begin{cases} K_1 e^{r_1 x} + K_2 e^{r_2 x}, & \text{si } \Delta > 0, r_1 \text{ et } r_2 \text{ réels} \\ (K_1 x + K_2) e^{rx}, & \text{si } \Delta = 0, r \text{ réel} \\ (K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}, & \text{si } \Delta < 0, r_1 \text{ et } r_2 \text{ complexes} \end{cases} \quad \text{et avec } K_1 \text{ et } K_2 \text{ réels}$$

On peut aussi écrire $(K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x) e^{\alpha x} = A e^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi)$

Équations différentielles du type $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$

L'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ où ω est un nombre réel strictement positif quelconque est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x$ avec A et B des constantes qui peuvent être déterminées à l'aide des conditions initiales.

L'équation caractéristique est $r^2 + \omega^2 = 0$, on a $\Delta < 0$, l'équation admet deux racines

complexes conjuguées $r_1 = \frac{i\sqrt{4\omega^2}}{2} = i\omega$ et $r_2 = -i\omega$, donc les solutions sont de la forme :

$(A \cos \omega x + B \sin \omega x) e^0$ soit $A \cos \omega x + B \sin \omega x$.

Équations différentielles du type $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$

De même que pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1, on a :

La solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ est la somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène associée et d'une de ses solutions particulières.