

Exercices : Les matrices et les calculs matriciels

Exercice 1 :

Exercice avec des matrices carrées d'ordre 2 en Terminale

Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

Solution 1 :

Correction de l'exercice sur des matrices carrées d'ordre 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-6 & y-8 \\ -2x+12 & -2y+16 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

On obtient le système
$$\begin{cases} x-6 & = & -5 \\ -2x+12 & = & 10 \\ y-8 & = & -6 \\ -2y+16 & = & 12 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \begin{cases} x & = & 1 \\ -2x & = & -2 \\ y & = & 2 \\ -2y & = & -4 \end{cases}$$

ssi $x=1$ et $y=2$.

Exercice 2 :

Exercice autour d'une matrice A d'ordre 2

On note $L = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Question 1 :

Déterminer lorsqu'elles sont définies les matrices LA, CA, AC, AL et donner les réponses en fonction de C ou L .

Question 2 :

La matrice $A - 5I_2$ est inversible ou non inversible ?

Question 3 :

Déterminer l'ensemble des réels x, y tels que $AX = O$ lorsque $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(O est la matrice colonne à deux lignes nulles).

On en déduit que A est une matrice inversible ou non inversible ?

Solution 2 :

Correction de l'exercice autour d'une matrice A d'ordre 2

Question 1 :

- L est de type $(2, 1)$, C de type $(2, 1)$ et A carrée d'ordre 2.

On peut définir LA et AC mais on ne peut pas définir CA et AL .

- $LA = (1 \quad -2) \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$LA = (1 \times 3 + 2 \times 1 \quad -1 \times 6 - 2 \times 2)$$

$$LA = (5 \quad -10)$$

$$\boxed{LA = 5L}.$$

- $AC = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$AC = \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 6 \times 1 \\ -1 \times 3 - 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{AC = 5C}.$$

Question 2 :

On note I la matrice identité d'ordre 2.

La matrice O qui intervient dans la suite est la matrice colonne nulle à deux lignes.

On a vu que $AC = 5C$, donc $AC - 5C = O$ soit $AC - 5IC = O$

ou encore $(A - 5I)C = O$

Si la matrice $B = A - 5I$ était inversible, en multipliant à gauche la relation $BC = O$, par la matrice B^{-1} , on aurait $B^{-1}(BC) = B^{-1} \times O$ soit $(B^{-1}B)C = O$ soit $IC = O$ donc $C = O$, ce qui est impossible.

La matrice $A - 5I$ n'est pas inversible.

Question 3 :

- $AX = O$ ssi $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{ssi} \begin{pmatrix} 3x - 6y \\ -x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ssi} \begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

Les deux équations étant identiques à un facteur multiplicatif près ssi $\boxed{x = 2y}$.

- En utilisant $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $AX_0 = O$.

Si A était inversible, en multipliant à gauche par A^{-1} : $A^{-1}AX_0 = O$ donc $X_0 = O$ ce qui est absurde.

A n'est pas inversible.

Exercice 3 :

Exercices de matrices d'ordre 3 en Terminale

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 1 :

Calculer A^n si $n \in \mathbb{N}^*$.

Question 2 :

La formule obtenue dans la question 1 est valable pour $n = -1$

Vrai ou Faux ?

Solution 3 :

Correction de l'exercice 1 sur les matrices d'ordre 3 :

Question 1 :

On calcule les premières valeurs de A^n ce qui conduit à poser une conjecture que l'on démontre par récurrence.

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n): A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

* **Initialisation** $\mathcal{P}(1)$ est évidente.

* **Hérédité**

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie

$$A^{n+1} = A^n A$$

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a prouvé que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

* *Conclusion*

La propriété est vraie par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Question 2 :

Vrai,

On introduit B la matrice obtenue en remplaçant n par -1 :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne $AB = I_3 = BA$

Donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

La propriété est donc encore vraie pour $n = -1$.

Exercice 4 :

Question 1 :

Avec une calculatrice, calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Question 2 :

Résoudre matriciellement le système
$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$$

Solution 4 :

Correction de l'exercice 2 sur les matrices d'ordre 3 en Terminale Générale :

Question 1 :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 2 :

On écrit le système sous la forme

$$A X = Y \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Comme A est inversible d'ordre 3, on peut multiplier la matrice $A X$ de type $(3, 1)$ à gauche par la matrice A^{-1} :

On obtient $A^{-1} A X = A^{-1} Y$ soit $I_3 X = A^{-1} Y$ donc $X = A^{-1} Y$.

Dans le cours, on a vu que la réciproque est vraie.

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2/2 \\ 4/2 \\ 8/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Les solutions sont $x = 1, y = 2$ et $z = 4$.

Exercice 5 :

Exercice sur les calculs matriciels en terminale maths expertes

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorsque c'est possible, calculez les matrices $AB, BA, AB A, BC, DA, ABC, BCD$.

Solution 5 :

Correction de l'exercice sur les calculs matriciels en maths expertes

Il faut bien sûr avant tout calcul vérifier que le produit est défini.

Je donne uniquement les résultats dans la suite :

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$ABA = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 4 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 0 \\ 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$ABC = \begin{pmatrix} 17 \\ 1 \\ 37 \end{pmatrix}$$

Le produit BC n'a pas de sens car B est de type $(2, 3)$ et C de type $(4, 3)$, donc BCD n'a pas de sens.

Exercice 6 :

Exercice sur les matrices avec de la trigonométrie en terminale

Si $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $(R(t))^n = R(nt)$.

Vrai ou Faux ?

Solution 6 :

Correction de l'exercice sur les matrices avec de la trigonométrie

Vrai,

Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n) : (R(t))^n = R(nt)$

* **Initialisation**

$$(R(t))^0 = I_2 \text{ et } R(0 \times t) = R(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = I_2$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

* **Hérédité**

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$(R(t))^{n+1} = (R(t))^n \times R(t).$$

$$\text{Par } \mathcal{P}(n), (R(t))^{n+1} = R(nt) \times R(t)$$

$$(R(t))^{n+1} = R(nt + t) = R((n+1)t).$$

On a donc obtenu $\mathcal{P}(n+1)$.

* **Conclusion**

Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n .

Exercice 7 :

Exercice pour déterminer une suite en maths expertes

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 8u_n$.

On considère de plus les matrices $B = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Question 1 :

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $A^n = 2^n B + 4^n C$.

Question 2 :

Pour tout entier naturel n , on a : $U_n = A^n U_0$.

Vrai ou Faux ?

Solution 7 :

Correction de l'exercice pour déterminer une suite avec des matrices

Question 1 :

Si $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{P}(n), A^n = 2^n B + 4^n C.$$

*** Initialisation.**

Si $n = 1$,

$$\begin{aligned} 2^n B + 4^n C &= 2B + 4C = 2 \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -16 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

On a prouvé que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

*** Hérédité.**

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

On écrit $A^{n+1} = A^n \times A$

$$= (2^n B + 4^n C) (2B + 4C)$$

$$A^{n+1} = 2^{n+1} B^2 + 2^n \times 4 B C + 4^n \times 2 C B + 4^{n+1} C^2.$$

On fait quelques calculs intermédiaires :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = B$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} C^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = C$$

$$B C = \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} B C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

$$C B = \begin{pmatrix} -1 & 0,5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -0,5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} C B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$$

$$\text{donc } A^{n+1} = 2^{n+1} B + 4^{n+1} C.$$

On a prouvé que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

*** Conclusion :** la propriété est vraie par récurrence sur n .

On remarque que la propriété est aussi vraie au rang 0 car si $n = 0$,

$$2^n B + 4^n C = B + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2^0 B + 4^0 C = I_2 = A^0,$$

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Question 2 :

Vrai,

Si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n) : U_n = A^n U_0$.

** Initialisation.*

Si $n = 0$, $A^0 = I_2$

$A^0 U_0 = I_2 U_0 = U_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

** Hérité.*

On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$U_{n+1} = A U_n = A (A^n U_0) = (A A^n) U_0$$

$$U_{n+1} = A^{n+1} U_0.$$

On a prouvé que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

** Conclusion :* la propriété est vraie par récurrence sur n .