

Exercices : Les intégrales

Exercice 1 :

Intégration maths terminale : Calcul d'intégrales

1. $\int_1^3 (2t^3 + 3t^2 - t - 1) dt$
2. $\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^{2t} dt$
3. $\int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^2} dt$
4. $\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} + 1 - 2t \right) dt$

Solution 1 :

Correction exercice n°1 sur l'intégration

- 1. Valeur : 60

$$\begin{aligned} I &= \int_1^3 (2t^3 + 3t^2 - t - 1) dt \\ I &= \left[\frac{1}{2} t^4 + t^3 - \frac{1}{2} t^2 - t \right]_1^3 \\ I &= \frac{81}{2} + 27 - \frac{9}{2} - 3 - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - 1 \right) \\ I &= \frac{81-9}{2} + 24 - 0 = 36 + 24 = 60. \end{aligned}$$

- 2. Valeur : 5/2

$$\begin{aligned} I &= \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_{\ln(2)}^{\ln(3)} \\ I &= \frac{1}{2} (e^{2 \ln(3)} - e^{2 \ln(2)}) \\ I &= \frac{1}{2} (9 - 4) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

- 3. Valeur : 1/3

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^2} dt \\ I &= \left[\frac{-1}{2(2t+1)} \right]_0^1 = \frac{-1}{6} + \frac{1}{2} \\ \boxed{I} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- 4. Valeur : ln(2)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} + 1 - 2t \right) dt \\ I &= \left[\ln(t+1) + t - t^2 \right]_0^1 = \ln(2) + 1 - 1 \quad \boxed{I = \ln(2)}. \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Intégration maths terminale : Calcul de primitives

1. Soit $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$.

Trouver la primitive F sur $I =]0, +\infty[$, nulle en 1 de la fonction f en effectuant une **intégration par parties**.

2. Soit $f : t \mapsto (3t - 2) \sin(t)$.

Trouver la primitive F sur $I = \mathbb{R}$, nulle en 0 de la fonction f en effectuant une intégration par parties

3. Soit $f : t \mapsto \ln^2(t)$.

Trouver la primitive F sur $I =]0, +\infty[$, nulle en 1 de la fonction f en effectuant deux **intégrations par parties**.

4. Soit $f : t \mapsto \cos(t) e^{-2t}$.

Trouver la primitive F sur $I = \mathbb{R}$, nulle en 0 de la fonction f en effectuant deux intégrations par parties

Solution 2 :

Correction exercices n°2 sur l'intégration

1. F est définie pour $x \in I$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$ On introduit $u = \ln$ et $v : t \mapsto 2\sqrt{t}$.

Ces fonctions sont dérivables sur I de dérivées continues.
$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = 1/\sqrt{t} \end{cases} \begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = 2\sqrt{t} \end{cases}$$

$$F(x) = \left[2\sqrt{t} \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x \frac{2}{\sqrt{t}} dt$$

$$F(x) = 2\sqrt{x} \ln(x) - \left[4\sqrt{t} \right]_1^x$$

$$\boxed{F(x) = 2\sqrt{x} \ln(x) - 4\sqrt{x} + 4}$$

2. $F(x) = \int_0^x (3t - 2) \sin(t) dt$

On introduit $u : t \mapsto 3t - 2$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$, ces fonctions sont dérivables sur I de dérivées continues.

$$\begin{cases} u(t) = 3t - 2 \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases} \begin{cases} u'(t) = 3 \\ v(t) = -\cos(t) \end{cases}$$

$$F(x)$$

$$= [-(3t - 2) \cos(t)]_0^x + \int_0^x 3 \cos(t) dt$$

$$= (2 - 3x) \cos(x) - 2 + [3 \sin(t)]_0^x$$

$$\boxed{F(x) = (2 - 3x) \cos(x) - 2 + 3 \sin(x)}$$

3. F est définie pour $x \in I$ par $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$

On introduit $u = \ln^2$ et $v : t \mapsto t$. Ces fonctions sont dérivables sur I de dérivées continues.

$$\begin{cases} u(t) = \ln^2(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \begin{cases} u'(t) = 2 \ln(t)/t \\ v(t) = t \end{cases}$$

$$F(x) = [t \ln^2(t)]_1^x - 2 \int_1^x \ln(t) dt$$

$$F(x) = x \ln^2(x) - 2 G(x) \text{ avec } G(x) = \int_1^x \ln(t) dt.$$

Pour calculer $G(x)$,

On introduit

$u = \ln$ et $v : t \mapsto t$. Ces fonctions sont dérivables sur I de dérivées continues.

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = t \end{cases}$$

$$G(x) = [t \ln(t)]_1^x - \int_1^x dt$$

$$G(x) = x \ln(x) - [t]_1^x$$

$$G(x) = x \ln(x) - x + 1$$

$$\boxed{F(x) = x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x - 2.}$$

4. Si $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x \cos(t) e^{-2t} dt$$

On introduit

$$u : t \mapsto e^{-2t} \text{ et } v : t \mapsto \sin(t).$$

Ces fonctions sont dérivables sur I de dérivées continues.

$$\begin{cases} u(t) = e^{-2t} \\ v'(t) = \cos(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(t) = -2e^{-2t} \\ v(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$F(x)$$

$$= [\sin(t) e^{-2t}]_0^x + 2 \int_0^x \sin(t) e^{-2t} dt;$$

On effectue une deuxième intégration par parties en introduisant

$$u : t \mapsto e^{-2t} \text{ et } v : t \mapsto -\cos(t).$$

Ces fonctions sont dérivables sur I de dérivées continues.

$$\begin{cases} u(t) = e^{-2t} \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(t) = -2e^{-2t} \\ v(t) = -\cos(t) \end{cases}$$

$$F(x) = \sin(x) e^{-2x} + 2 \left[-\cos(t) e^{-2t} \right]_0^x - 4 \int_0^x \cos(t) e^{-2t} dt;$$

$$F(x) = \sin(x) e^{-2x} - 2 \cos(x) e^{-2x} + 2 - 4 F(x)$$

$$\text{donc } 5 F(x) = (\sin(x) - 2 \cos(x)) e^{-2x} + 2$$

$$\text{et } F(x) = \frac{2 + (\sin(x) - 2 \cos(x)) e^{-2x}}{5}.$$

Exercice 3 :

Intégration maths terminale : intégration par parties

1. $\int_1^e t \ln(t) dt = \frac{e^2 - 1}{4}$ Vrai ou faux ?
2. Si $n \in \mathbb{N}$, $\int_1^e t^n \ln(t) dt$
3. $\int_0^1 (2t + 1) e^{-2t} dt = a + b e^{-2}$.

Solution 3 :

Correction exercices n°3 sur l'intégration

1. On introduit

$u = \ln$ et $v : t \mapsto \frac{t^2}{2}$. Ces fonctions sont dérivables sur I de dérivées continues.

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) \end{cases} = t \begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = t^2/2 \end{cases} I = \int_1^e t \ln(t) dt$$

$$I = \left[\frac{t^2}{2} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2} dt$$

$$I = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4} \right]_1^e$$

$$I = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{I = \frac{e^2 + 1}{4}}.$$

2. On introduit

$$u = \ln \text{ et } v : t \mapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

Ces fonctions sont dérivables sur $[1, e]$ de dérivées continues.

$$\begin{cases} u(t) &= \ln(t) \\ v'(t) &= t^n \end{cases} \begin{cases} u'(t) &= 1/t \\ v(t) &= t^{n+1}/(n+1) \end{cases}$$

$$I_n = \int_1^e t^n \ln(t) \, dt$$

$$I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t) \right]_1^e - \frac{1}{n+1} \int_1^e t^n \, dt$$

$$I_n = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_1^e$$

$$I_n = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1} - 1}{(n+1)^2}$$

3. On introduit

$$u : t \mapsto 2t + 1 \text{ et } v : t \mapsto \frac{-e^{-2t}}{2}.$$

Ces fonctions sont dérivables sur $[0, 1]$ de dérivées continues.

$$\begin{cases} u(t) &= 2t + 1 \\ v'(t) &= e^{-2t} \end{cases} \begin{cases} u'(t) &= 2 \\ v(t) &= -e^{-2t}/2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 (2t + 1) e^{-2t} \, dt.$$

$$I = \left[\frac{-e^{-2t}}{2} (2t + 1) \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-2t} \, dt$$

$$I = -3 \frac{e^{-2}}{2} + \frac{1}{2} + \left[\frac{-e^{-2t}}{2} \right]_0^1$$

$$\boxed{I = 1 - 2e^{-2}}.$$