

Test de rentrée : Les Intégrales : Exercices du chapitre :

Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx \qquad B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5 dx \qquad C = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx$$

Correction

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx$$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{3}{x^2} = 3 \times \frac{1}{x^2}$$

Une primitive de f est la fonction F telle que : $F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x}$

Donc :

$$A = \int_1^4 \frac{3}{x^2} dx = \left[-\frac{3}{x}\right]_1^4 = F(4) - F(1) = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{1}\right) = \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} B &= \int_2^5 3x^2 + 4x - 5 dx \\ &= [x^3 + 2x^2 - 5x]_2^5 \\ &= 5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2) = 144 \end{aligned}$$

$$C = \int_{-1}^1 e^{-2x} dx$$

$$\text{On a : } f(x) = e^{-2x} = \frac{1}{-2}(-2)e^{-2x}$$

Une primitive de f est la fonction F telle que : $F(x) = \frac{1}{-2}e^{-2x}$

Donc :

$$\begin{aligned} C &= \int_{-1}^1 e^{-2x} dx = \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^1 = F(1) - F(-1) \\ &= \frac{1}{-2}e^{-2 \times 1} - \frac{1}{-2}e^{-2 \times (-1)} \\ &= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right) \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

$$\text{On pose : } A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx \text{ et } B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx$$

a) Calculer $A + B$ et $A - B$.

On donne : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$

b) En déduire A et B .

Correction

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$A + B = \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx + \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx \qquad A - B = \int_0^{2\pi} \cos^2(x) dx - \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \cos^2(x) + \sin^2(x) dx \\
&= \int_0^{2\pi} 1 dx \\
&= [x]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \cos^2(x) - \sin^2(x) dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx \\
&= \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2} \sin(2 \times 2\pi) - \frac{1}{2} \sin(2 \times 0) = 0
\end{aligned}$$

b) On a ainsi :

$$\begin{cases} A + B = 2\pi \\ A - B = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} 2A = 2\pi \\ A = B \end{cases} \text{ soit : } A = B = \pi$$

Exercice 3 :

Encadrer une intégrale

a) Démontrer que pour tout x de $[0 ; 1]$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$.

Correction

a) Sur $[0 ; 1]$, $x^2 \leq x$.

Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 0 dx &\leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq \int_0^1 e^x dx \\
\int_0^1 0 dx &= 0 \text{ et } \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1 \\
\text{D'où : } 0 &\leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1.
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

Calculer une intégrale en intégrant par parties

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \qquad C = \int_1^{e^2} \ln x dx$$

Correction

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$v \quad u' \quad \Rightarrow$ Ce choix n'est pas anodin ! L'idée est ici de ne plus laisser le facteur x dans l'expression qu'il restera à intégrer. Il faudrait donc dériver x .

On pose : $v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1$

$$u'(x) = \sin x \rightarrow u(x) = -\cos x$$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx \\
&= [-\cos x \times x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x \times 1 dx \\
&= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
&= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 0 \times \cos 0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1
\end{aligned}$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{\cos x}_{u'} dx$$

On pose : $v(x) = x^2 \rightarrow v'(x) = 2x$
 $u'(x) = \cos x \rightarrow u(x) = \sin x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}
B &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) v(x) dx = [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx \\
&= [\sin x \times x^2]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times 2x dx \\
&= [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx
\end{aligned}$$

Or, dans le terme de droite, on reconnaît l'intégrale A de la question précédente qui a été calculée par parties. Il s'agit ici d'une **double intégration par parties**.

On a donc :

$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin \frac{\pi}{2} - 0^2 \sin 0 - 2 \times 1 \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2
\end{aligned}$$

$$C = \int_1^{e^2} \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln x}_{v} dx$$

On pose : $v(x) = \ln x \rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$
 $u'(x) = 1 \rightarrow u(x) = x$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned}
C &= \int_1^{e^2} u'(x) v(x) dx = [u(x)v(x)]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} u(x)v'(x) dx \\
&= [x \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x \frac{1}{x} dx \\
&= e^2 \ln e^2 - 1 \ln 1 - \int_1^{e^2} 1 dx
\end{aligned}$$

$$= e^2 \times 2 \ln e - [x]_1^{e^2}$$

$$= e^2 \times 2 - e^2 + 1$$

$$= e^2 + 1$$

Exercice 5 :

Calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions continues et positives. On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.

On admet que pour tout x de $[-1 ; 2]$, on a $f(x) \leq g(x)$.

Déterminer l'aire délimitée par les courbes représentatives de f et de g sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.

Correction

On calcule la différence de l'aire sous la courbe représentative de g et de l'aire sous la courbe représentative de f .

Cela revient à calculer la différence des intégrales :

$$A = \int_{-1}^2 g(x) dx - \int_{-1}^2 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} I_g &= \int_{-1}^2 g(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5x \right]_{-1}^2 \\ &= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + 5 \times 2 - \left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + 5 \times (-1) \right) \end{aligned}$$

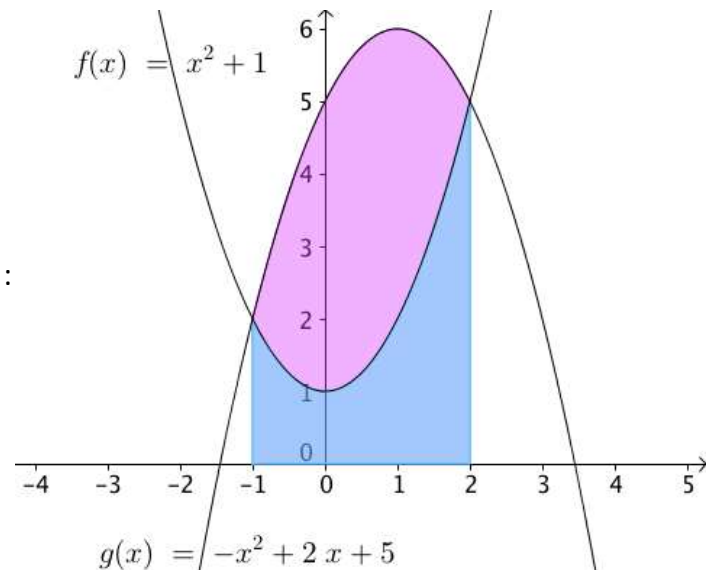
$$= 15$$

$$\begin{aligned} I_f &= \int_{-1}^2 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 x^2 + 1 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{3} \times 2^3 + 2 - \left(\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1) \right) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } A = I_g - I_f = 15 - 6 = 9 \text{ u. a.}$$

Remarque : Une autre méthode, un peu plus rapide, consisterait à utiliser la linéarité de l'intégrale.

$$A = \int_{-1}^2 g(x) dx - \int_{-1}^2 f(x) dx$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 \, dx - \int_{-1}^2 x^2 + 1 \, dx \\
&= \int_{-1}^2 -x^2 + 2x + 5 - x^2 - 1 \, dx \\
&= \int_{-1}^2 -2x^2 + 2x + 4 \, dx = \dots = 9
\end{aligned}$$

Exercice 6 :

Calculer une valeur moyenne d'une fonction

On modélise, à l'aide d'une fonction, le nombre de malades lors d'une épidémie.

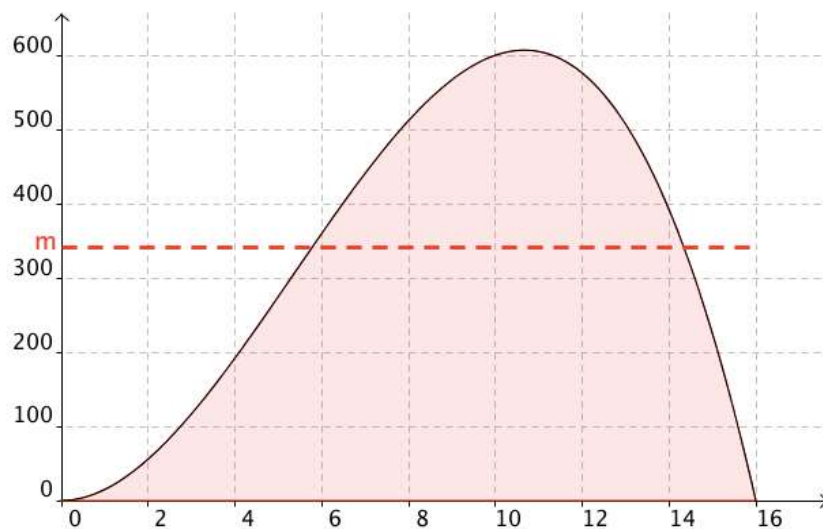
Au x -ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.

Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

Correction

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{16-0} \int_0^{16} f(x) \, dx \\
&= \frac{1}{16} \int_0^{16} 16x^2 - x^3 \, dx \\
&= \frac{1}{16} \left[\frac{16}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^{16} \\
&= \frac{1}{16} \left(\frac{16}{3} \times 16^3 - \frac{1}{4} \times 16^4 \right) \\
&= \frac{1024}{3} \approx 341
\end{aligned}$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



Exercice 7 :

Étudier une suite d'intégrales

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier n , par :

$$I_n = \int_1^e x (\ln x)^n \, dx$$

a) Calculer I_0 .

b) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$

Correction

a) Pour $n = 0$, on a :

$$I_0 = \int_1^e x \, dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} 1^2 = \frac{e^2 - 1}{2}$$

b) L'objectif est d'exprimer I_{n+1} en fonction de I_n .

$$I_{n+1} = \int_1^e x (\ln x)^{n+1} dx$$

$u' \quad v$

On pose : $v(x) = (\ln x)^{n+1} \rightarrow v'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n$

$$u'(x) = x \rightarrow u(x) = \frac{1}{2} x^2$$

Ainsi, en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e u'(x) v(x) dx = [u(x) v(x)]_1^e - \int_1^e u(x) v'(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 (\ln e)^{n+1} - \frac{1}{2} \times 1^2 (\ln 1)^{n+1} - \frac{n+1}{2} \int_1^e x (\ln x)^n dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n \end{aligned}$$

Donc : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$